全國公私立高級中學 110 學年度學科能力測驗第三次聯合模擬考試

數學 B 考科解析

考試日期：110 年 11 月 3～4 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12-1	12-2	12-3	12-4
2	2	4	3	1	4	1345	145	35	12	1235	5	5	3	6
13-1	13-2	14-1	14-2	15-1	15-2	15-3	16-1	16-2	17-1	17-2	17-3	18-1	18-2	18-3
7	0	1	8	5	1	1	3	4	2	－	4	1	1	6
19	20													
4														

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (1) 反例：$a=(3+\sqrt{2})^2$，$b=(3-\sqrt{2})^2$，
則 $\sqrt{a}+\sqrt{b}=(3+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})$ 為有理數。
(2) $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\in Q$。
(3) $ab+a-b=(a-1)(b+1)+1$。
反例：取 $a=\sqrt{2}+1$，$b=\sqrt{2}-1$，
則 $ab+a-b=\sqrt{2}\times\sqrt{2}+1=3\in Q$。
(4) 反例：$2+(\sqrt{2}-1)=3+(\sqrt{2}-2)$。
(5) 反例：$a=0.\overline{2}=\dfrac{2}{9}$。
故選(2)。

2. $(x-2)^2\le 1\Rightarrow 1\le x\le 3$；$\left|y-\dfrac{7}{2}\right|\le\dfrac{13}{2}\Rightarrow -3\le y\le 10$，
因此 $1\le x^2\le 9$，$0\le y^2\le 100$，故 $1\le x^2+y^2\le 109$，
可得 $M+m=109+1=110$，故選(2)。

3. $f(x)=2(x-3)^2+a(x-3)+3$，
又 $f(2)=2-a+3=1\Rightarrow a=4$
$\Rightarrow f(x)=2(x-3)^2+4(x-3)+3$，
故 $f(x)$ 除以 $x-1$ 之餘式為
$f(1)=2\times(1-3)^2+4(1-3)+3=3$，
故選(4)。

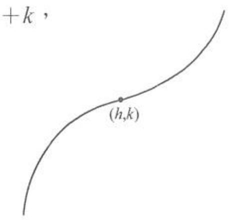
4. 設數列 $\langle a_n\rangle$ 代表 n 個月後結算的資產，
所以 $a_1=3$ 且遞迴關係式 $a_{n+1}=2a_n+1$
$a_{n+1}+k=2(a_n+k)\Rightarrow a_{n+1}=2a_n+k\Rightarrow k=1$，
所以原遞迴關係式可改為 $(a_{n+1}+1)=2(a_n+1)$。
令 $b_n=a_n+1\Rightarrow b_{n+1}=2b_n$，
即 $<b_n>$ 為等比數列且公比為 2，首項 $b_1=a_1+1=3+1=4$
$\Rightarrow b_n=b_1\times 2^{n-1}=4\times 2^{n-1}=2^{n+1}$，
故 $a_n=b_n-1=2^{n+1}-1\Rightarrow a_{12}=2^{13}-1=8191$，
故選(3)。

5. $\begin{cases}\overleftrightarrow{OA}:3x-4y=0\\ \overleftrightarrow{OB}:7x-24y=0\end{cases}$ 的角平分線也是 $\overleftrightarrow{OA},\overleftrightarrow{OB}$ 過 O 點之法線
$\begin{cases}4x+3y=0\\ 24x+7y=0\end{cases}$ 的角平分線，
因為角平分線上任意點到兩直線的距離相等，
$\dfrac{|4x+3y|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{|24x+7y|}{\sqrt{24^2+7^2}}$，因為 P 點的 x 和 y 坐標均為正整數，
所以 $\dfrac{4x+3y}{5}=\dfrac{24x+7y}{25}\Rightarrow x=2y$，
符合關係式的整數，故選(1)。

6. ① 因為 $x=0,6,12,18,24$ 時，$y=10$，
所以(1)(2)均不可能。
② $(0,10)$ 代入選項(3)錯誤，而選項(5)亦不通過 $(3,13)$，
都不符合選項條件。
選項(4)通過表中所有數據，
故選(4)。

二、多選題

7. 若 $f(x)=a(x-h)^3+p(x-h)+k$，則對稱中心為 (h,k)。
(1) ○：$h=\dfrac{-(-6)}{3\times 2}=1$，由綜合除法可得
$f(x)=2(x-1)^3+3(x-1)-7$，
故對稱中心為 $(1,-7)$。
$$\begin{array}{rrrr|r} 2 & -6 & +9 & -12 & 1\\ & +2 & -4 & +5 & \\ \hline 2 & -4 & +5 & -7 & \\ & +2 & -2 & & 1\\ \hline 2 & -2 & +3 & & \\ & +2 & & & 1\\ \hline 2 & +0 & & & \end{array}$$
(2) ×：設 $f(x)=a(x-h)^3+p(x-h)+k$，
若 $a\times p>0$ 且 $a>0$，
則函數略圖如右，
故 $y=f(x)$ 之圖形和 x 軸
恰有一個交點。



(3) ○：由右圖可知，
$y=f(x)$ 的圖形由左往右上升。
(4) ○：$y=f(x)$ 的圖形對稱中心為 $(1,-7)$，
而 (a,b) 關於 $(1,-7)$ 的對稱點為
$(2-a,-14-b)$ 亦在 $y=f(x)$ 的圖形上。
(5) ○：由一次近似的性質可知，$y=f(x)$ 在 $x=1$ 附近的圖形
近似於直線 $y=3(x-1)-7=3x-10$。
故選(1)(3)(4)(5)。

8. ① $C:x^2+y^2-4x+ky+5=0$
$\Rightarrow C:(x-2)^2+(y+\dfrac{k}{2})^2=\dfrac{k^2}{4}-1$ 表一圓，
故 $\dfrac{k^2}{4}-1>0\Rightarrow k>2$ 或 $k<-2$。
② 點 $(k,k-3)$ 在圓 C 外部，
故 $k^2+(k-3)^2-4k+k(k-3)+5>0$，
整理得 $3k^2-13k+14>0\Rightarrow(3k-7)(k-2)>0$，
故 $k>\dfrac{7}{3}$ 或 $k<2$。
由①②知，$k>\dfrac{7}{3}$ 或 $k<-2$。
故選(1)(4)(5)。

9. (1) ×：$y=\log_a x$ 與 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ 兩圖形對稱於 x 軸。
(2) ×：$y=a^x$ 與 $y=(\dfrac{1}{a})^x$ 兩圖形對稱於 y 軸。
(3) ○：依指數函數與對數函數的對稱性可知。
(4) ×：$y=\log_a(8x)=\log_a 8+\log_a x$ 為 $y=\log_a x$ 的圖形
向上平移 $\log_a 8$ 單位，故兩個圖形不相交。
(5) ○：$y=a^x$ 和 $y=\log_a x$ 的圖形對稱直線 $y=x$，
且直線 $y=7x$ 和和直線 $y=\dfrac{1}{7}x$ 也對稱於直線 $y=x$，

則若 $y=a^x$ 的圖形和直線 $y=7x$ 交於相異兩點，

則 $y=\log_a x$ 的圖形和直線 $y=\frac{1}{7}x$ 也交於相異兩點。

故選(3)(5)。

10. (1) ○ (2) ○：

設 $X'=\frac{X}{100}$，則 $\mu_{X'}=\frac{\mu_X}{100}=\frac{1}{100}\mu_X$ 且

$\sigma_{X'}=\frac{1}{100}\sigma_X$，所以

$$r_{X',Y}=\frac{(X_1'-\mu_{X'})(Y_1-\mu_Y)+\cdots+(X_n'-\mu_{X'})(Y_n-\mu_Y)}{\sqrt{(X_1'-\mu_{X'})^2+\cdots+(X_n'-\mu_{X'})^2}\sqrt{(Y_1-\mu_Y)^2+\cdots+(Y_n-\mu_Y)^2}}$$

$$=\frac{(\frac{X_1}{100}-\frac{1}{100}\mu_X)(Y_1-\mu_Y)+\cdots+(\frac{X_n}{100}-\frac{1}{100}\mu_X)(Y_n-\mu_Y)}{\sqrt{(\frac{X_1}{100}-\frac{1}{100}\mu_X)^2+\cdots+(\frac{X_n}{100}-\frac{1}{100}\mu_X)^2}\sqrt{(Y_1-\mu_Y)^2+\cdots+(Y_n-\mu_Y)^2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{100}[(X_1-\mu_X)(Y_1-\mu_Y)+\cdots+(X_n-\mu_X)(Y_n-\mu_Y)]}{\frac{1}{100}\sqrt{(X_1-\mu_X)^2+\cdots+(X_n-\mu_X)^2}\sqrt{(Y_1-\mu_Y)^2+\cdots+(Y_n-\mu_Y)^2}}$$

$$=\frac{(X_1-\mu_X)(Y_1-\mu_Y)+\cdots+(X_n-\mu_X)(Y_n-\mu_Y)}{\sqrt{(X_1-\mu_X)^2+\cdots+(X_n-\mu_X)^2}\sqrt{(Y_1-\mu_Y)^2+\cdots+(Y_n-\mu_Y)^2}}$$

$$=r_{X,Y}$$

X', Y 迴歸直線的斜率

$$m'=r'\times\frac{\sigma_Y}{\sigma_{X'}}=r\times\frac{\sigma_Y}{\frac{1}{100}\sigma_X}=100\left(r\times\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\right)=100m$$。

(3) ×：相關係數的解讀，沒有必然關係。

(4) ×：只要所有點都在斜率為正的直線上，
相關係數即為 1。

(5) ×：迴歸直線的斜率公式 $m=r\times\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$，
因為 σ_x, σ_y 不確定，
所以斜率與相關係數並非成正比。

故選(1)(2)。

11. (1) ○：當 $\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}=|\overrightarrow{a}|^2-t\,\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$ 時，若存在 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\neq 0$
且 $t=\frac{|\overrightarrow{a}|^2}{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}$，則 $\overrightarrow{c}$ 垂直 $\overrightarrow{a}$。

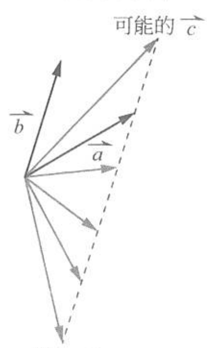
(2) ○：當 $t=0$ 時，$\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}$，則 $\overrightarrow{c}\,/\!/\,\overrightarrow{a}$。

(3) ○：當 $\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}-t|\overrightarrow{a}|^2=0$ 時，
$t=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|^2}$，$\overrightarrow{c}$ 垂直 $\overrightarrow{b}$。

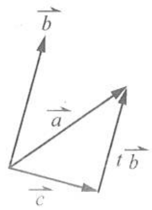
(4) ×：如圖(一)所示，因為 $\overrightarrow{a}$ 不為零向量，
故 $\overrightarrow{c}$ 不可能平行 $\overrightarrow{b}$。

(5) ○：如圖(二)所示，$|\overrightarrow{c}|$ 有最小值時，$\overrightarrow{c}$ 垂直 $\overrightarrow{b}$，
$t\overrightarrow{b}$ 恰為 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上之正射影。

故選(1)(2)(3)(5)。



圖(一)



圖(二)

三、選填題

12. 由題設條件知，$\{a_n\}$ 的公差 $=2-1=1$

$\Rightarrow a_3=3$，所以 $p=\frac{a_3}{b_3}=6$。

因為 $\frac{a_n}{b_n}=6$，所以 $(b_n)^2=\frac{1}{36}(a_n)^2$，

故 $b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2+b_5^2=\frac{1}{36}\times(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2)$

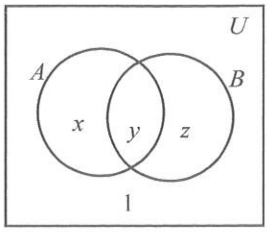
$=\frac{1}{36}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)$

$=\frac{1}{36}\times\frac{5\times(5+1)(2\times5+1)}{6}=\frac{55}{36}$。

13. $\log x=-7.1549=-8+0.8451\approx\log 10^{-8}+\log 7=\log(7\times10^{-8})$，
故 $x\approx7\times10^{-8}=70\times10^{-9}$，
故此病毒的直徑約為 70 奈米。

14. 設全國共有 n 個類別，由文氏圖可知：

$$\Rightarrow\begin{cases}x+y+z+1=n\\ x+y=\frac{5}{6}n\\ y+z=11\\ y=\frac{1}{2}n\end{cases}$$



$\Rightarrow x=\frac{5}{6}n-y=\frac{1}{3}n$，

代入 $x+y+z+1=n$

$\Rightarrow\frac{1}{3}n+11+1=n\Rightarrow n=18$。

15. 若前 9 輛車停完後，所留下來的空位並無兩個相鄰，則此休旅車無法找到適當的停車位
而前 9 輛車停完後還剩 3 個停車位，此 3 個空位會介於 9 輛停好車的 10 個空隙中
則剩下的 3 個停車位彼此不相鄰的機率為 $\frac{C_3^{10}}{C_9^{12}}=\frac{6}{11}$

此休旅車能夠找到適當停車位的機率為 $1-\frac{6}{11}=\frac{5}{11}$。

16. 因為 $\overline{BC}$ 不為最大邊，所以 $\angle A$ 為銳角，

由正弦定理知 $\frac{4}{\sin C}=\frac{3}{\sin A}\Rightarrow\sin A=\frac{3}{4}\sin C\leq\frac{3}{4}$，

當 $\sin C=1$ 時，$\angle A$ 有最大值為 θ，此時 $\sin\theta=\frac{3}{4}$。

17. 由題意可知，$2\overrightarrow{a}=(6,-2)=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$，
因為 $\overrightarrow{u}\,/\!/\,\overrightarrow{b}$，所以 $\overrightarrow{u}$ 是 $2\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影
$\Rightarrow\overrightarrow{u}=2(2,1)=(4,2)$，
故 $\overrightarrow{v}=2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{u}=(6,-2)-(4,2)=(2,-4)$。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. 由於筊杯出現正反面的機率一樣，

所以擲筊一次得『聖筊』的機率是 $\frac{1}{2}$。

根據規則，前三次都不是『聖筊』，第四次是『聖筊』，

可求到發財金 300 元，所以機率為 $(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{16}$。

19. 設獎金 x 元的機率為 $P(x)$，由題意得知，

x	600	500	400	300	200	100	0
$P(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{2^5}$	$\frac{1}{2^6}$	$\frac{1}{2^6}$

(1) ×：$P_6+P_4+P_2=P(600)+P(400)+P(200)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}=\frac{21}{32}$，

$P_5+P_3+P_1=P(500)+P(300)+P(100)$

$$=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}=\frac{21}{64},$$

所以 $P_1+P_3+P_5\neq P_2+P_4+P_6$。

(2) ×：由上表可知，$P_1+P_2\neq 2P_3$。

(3) ×：全事件還包含沒有求到發財金的事件。

(4) ○：由上表可知，正確。

(5) ×：六種金額的機率相等時，發財金 x 的期望值才是 x 值的算術平均數，所以真正的期望值為

$$\frac{1}{2}\times 600+\frac{1}{2^2}\times 500+\frac{1}{2^3}\times 400+\frac{1}{2^4}\times 300+\frac{1}{2^5}\times 200+\frac{1}{2^6}\times 100。$$

故選(4)。

20. 共擲 i 次的機率為 P_i，則

i	1	2	3	4	5	6
P_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{2^5}$	$\frac{2}{2^6}$

（6分，算出每個 P_i 值各得 1 分）

所以 $E=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{8}+4\times\frac{1}{16}+5\times\frac{1}{32}+6\times\frac{2}{64}$

$$=\frac{16+16+12+8+5+6}{32}=\frac{63}{32}\text{（次）}。\text{（3分）}$$