

全國公立高級中學

110 學年度學科能力測驗第四次聯合模擬考試

考試日期：110 年 12 月 14~15 日

數學 A 考科

— 作答注意事項 —

考試時間：100 分鐘

作答方式：

- 選擇(填)題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正液(帶)。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績並損及權益。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若答案格式是 $\frac{\textcircled{18-1}}{\textcircled{18-2}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答題卷上的第

18-1 列的 $\overset{3}{\square}$ 與第 18-2 列的 $\overset{8}{\square}$ 劃記，如：

18-1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
18-2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若答案格式是 $\frac{\textcircled{19-1}\textcircled{19-2}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答題卷的第 19-1 列的 \square

與第 19-2 列的 $\overset{7}{\square}$ 劃記，如：

19-1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19-2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

選擇(填)題計分方式：

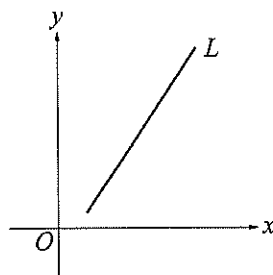
- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
 - 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\frac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
 - 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。
- ※ 試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

第壹部分、選擇（填）題（占 85 分）

一、單選題（占 35 分）

說明：第 1 題至第 7 題，每題 5 分。

1. 如何準確地記錄一條直線，當然方法很多。其中有一個方法就是量測出這條直線上任意一點的位置及這條直線的斜率即可。請利用你手邊現有的簡易測量工具，將圖(1)中直線 L 的斜率量測出來，其值最接近下列哪一個選項呢？



圖(1)

- (1) 1 (2) 1.5
(3) 2 (4) 2.5
(5) 3

2. $\langle a_n \rangle$ 為等比數列，且每一項均為正數，若第一項到第十項的和為 369，第三項到第十二項的和為 164，則 $\frac{a_2}{a_1}$ 的值為下列哪一個選項？

- (1) $\frac{9}{4}$ (2) $\frac{3}{2}$
(3) 1 (4) $\frac{2}{3}$
(5) $\frac{4}{9}$

3. 中央流行疫情指揮中心醫療應變小組於 2021 年 6 月 5 日報告：新冠肺炎死亡人數初步分析，其中大於 60 歲的死亡人數比例為 90%，死亡平均年齡為 72 歲；大於 60 歲的死亡個案中 80% 有慢性病史、不大於 60 歲的死亡個案中 70% 有慢性病史，已知新冠肺炎死亡個案有慢性病史的條件下，其年齡大於 60 歲的機率最接近下列哪一個選項？

- (1) 0.72 (2) 0.8
(3) 0.85 (4) 0.88
(5) 0.91

4. 某生物科技公司開發出新冠肺炎疫苗後，讓該公司的股價不斷地上漲，已知在 2021 年 6 月連續 30 天平均每天上漲幅度 8%，則 30 天後該公司的股價為一開始股價的倍數最接近下列哪一個選項？

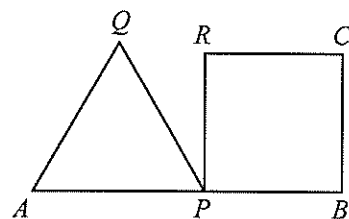
- (1) 2 倍 (2) 5 倍
(3) 8 倍 (4) 10 倍
(5) 12 倍

5. 已知 \vec{a} , \vec{b} 均為非零向量， $\vec{a} + 2\vec{b}$ 平分 \vec{a} , \vec{b} 夾角，且 $|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{6}|\vec{b}|$ ，若 \vec{a} , \vec{b} 的夾角為 θ ，則 $\cos \theta$ 的值為下列哪一個選項？

- (1) $-\frac{1}{4}$ (2) $-\frac{1}{8}$
(3) 0 (4) $\frac{1}{4}$
(5) $\frac{1}{8}$

6. 如圖(2)之示意圖， $\overline{AB} = 20$ ， P 在 \overline{AB} 上移動，以 \overline{AP} 為一邊作正 $\triangle APQ$ ，又以 \overline{PB} 為一邊作正方形 $PBCR$ ，則 \overline{QR}^2 的最小值最接近下列哪一個選項？

- (1) 26 (2) 27
(3) 28 (4) 29
(5) 30



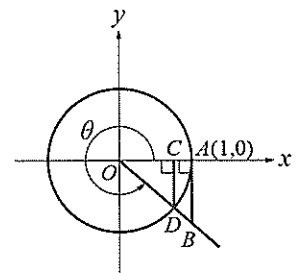
圖(2)

7. 關於物體的冷卻，牛頓觀察到一個冷卻體的冷卻速率和該物體溫度跟室溫的溫差成正比，我們稱之為牛頓冷卻定律。若一冷卻體的初始溫度為 T_0 ，且在室溫下放置了 t 小時的溫度為 $T(t)$ ，室溫為一常數 H ，由牛頓冷卻定律可得關係式 $T(t) - H = (T_0 - H) \times 2^{-\alpha t}$ ，其中 α 為常數。若我們從冷凍庫拿出一塊 -2°C 的牛肉，在室溫 23°C 下解凍，過了一小時，牛肉溫度為 3°C ，如果希望在料理時，牛肉溫度為 13°C ，則至少要再等待的時間最接近下列哪一個選項？
- (1) 1 小時 (2) 1.5 小時 (3) 2 小時
(4) 2.5 小時 (5) 3.1 小時

二、多選題 (占 30 分)

說明：第 8 題至第 13 題，每題 5 分。

8. 如圖(3)所示，單位圓 $x^2 + y^2 = 1$ ，圓上一點 $A(1, 0)$ ， θ 角的終邊與此圓交於 D 點， D 在 x 軸上的投影點為 C ，過 A 作圓之切線交 \overrightarrow{OD} 於 B ，則下列哪些選項是正確的？



圖(3)

- (1) $\sin \theta = \overline{CD}$
(2) $\cos \theta = \overline{OA}$
(3) $\tan \theta = \overline{AB}$
(4) $\sin(180^\circ + \theta) = \overline{CD}$
(5) $\cos(270^\circ - \theta) = \overline{CD}$

9. 某校高三第一次期中考結束後，抽選出十位學生並調出他們的數學及物理成績如下：

學生姓名	趙一	錢二	孫三	李四	周五	吳六	鄭七	王八	馮九	陳十
數學成績 X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
物理成績 Y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}

經計算得到這十位學生數學成績的算術平均數與標準差分別為 μ_X 、 σ_X ；物理成績的算術平均數與標準差分別為 μ_Y 、 σ_Y ，其中 $\sigma_X = 16$ 且 $\sigma_Y = 14$ 。數學和物理成績的相關係數為 r 。物理成績 Y 對數學成績 X 的迴歸直線為 $y = \frac{7}{8}x + 5$ 。試選出正確的選項。

- (1) $0 < r < 1$
(2) $\mu_X > \mu_Y$
(3) 若這十位學生中陳十的數學成績是最高分，那麼他的物理成績也是最高分
(4) 這十位學生中，數學和物理成績的最低分可能是不同人
(5) 褚衛是這十位學生的同校同學，若褚衛數學成績 80 分，則他的物理成績為 75 分

10. 若 x, y, z 均為實數滿足 $|x-6| \leq 2, |y-2| \leq 3, |z+1| \leq 2$ 。試選出正確的選項。

- (1) $x-y$ 的最大值為 3
- (2) $y-z$ 的最小值為 2
- (3) $|x-y| + |y-z|$ 的最小值為 3
- (4) 當 $|x-y| + |y-z|$ 之值為最小時， y 的取值可以為 0
- (5) 當 $|x-y| + |y-z|$ 之值為最大時， y 的取值可以為 5

11. 二階方陣 A 和 B 均代表平面上的線性變換，若矩陣 A 為平面上對 $y=mx$ 作鏡射的矩陣，矩陣 B 為平面上以原點為中心旋轉 θ 的旋轉矩陣，則下列哪些選項可能為 AB ？

- | | |
|---|---|
| (1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ | (2) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ |
| (3) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ | (4) $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$ |
| (5) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ | |

12. 空間中有一平面 E 和直線 L 不相交， A 點為直線 L 上一點， A 點到平面 E 的距離為 5。已知直線 M 滿足以下兩個條件：

- ① 直線 M 和直線 L 平行。
- ② A 點到直線 M 的距離為 2。

若 B 點為直線 M 上一點， B 點到平面 E 的距離為 d 。試選出正確的選項。

- (1) $d=2$ 時，滿足條件①②的直線 M 只有一條
- (2) $d=3$ 時，滿足條件①②的直線 M 只有一條
- (3) $d=5$ 時，滿足條件①②的直線 M 只有兩條
- (4) $d=7$ 時，滿足條件①②的直線 M 只有兩條
- (5) $d=8$ 時，滿足條件①②的直線 M 只有一條

13. 已知三次多項函數 $y=f(x)$ 的對稱中心為 $(2, k)$ ，將 $y=f(x)$ 左移後圖形和 $y=3x^3-9x^2+bx+c$ 重合，又 $f(x)$ 除以 $(x-2)^2$ 的餘式為 $4x-7$ 。試選出正確的選項。
- (1) $k=1$
 - (2) $b=5$
 - (3) $c=6$
 - (4) $f(x)$ 除以 $(7x-7)$ 的餘式為 6
 - (5) $f(x)$ 除以 $\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$ 的餘式為 $7x-13$

三、選填題 (占 20 分)

說明：第 14 題至第 17 題，每題 5 分。

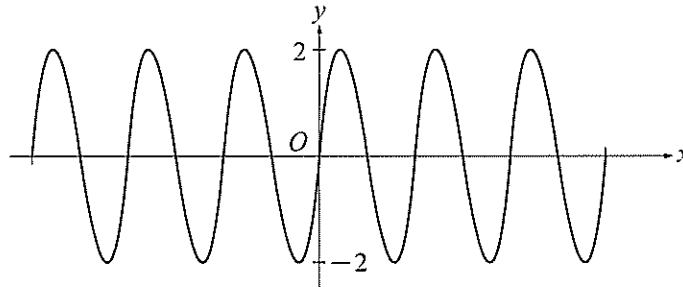
14. 公益彩卷公司發行一種刮刮樂，每張售價 100 元，其遊戲玩法是從六個位置去選擇兩個位置來刮，而這六個位置是由 100 元、200 元、300 元各兩個任意排列而成，若刮到的兩個位置數字金額相同，則可獲得此金額，其餘皆無獎金，則顧客買一張刮刮樂獲利的期望值為 (14-1) (14-2) (14-3) 元。
15. 坐標平面上 O 為原點，二階方陣 A 代表一個平面上的線性變換，矩陣 A 將 $P(\cos\theta, \sin\theta)$ 變換到 $P'(2, 0)$ ，也將 $Q(-\sin\theta, \cos\theta)$ 變換到 $Q'(0, 2)$ ，其中 $\theta \in R$ ，則 $\triangle OP'Q'$ 經矩陣 A 變換後的三角形面積為 (15-1) 。
16. 已知 $\triangle ABC$ 是圓 $\Gamma: x^2+y^2-4x-6y=32$ 的圓內接三角形，若 $\vec{u}=(3, 4)$ ， $\vec{v}=(-1, 2)$ ，且 $\vec{AB} \parallel \vec{u}$ ， $\vec{AC} \parallel \vec{v}$ ，則 $\overline{BC} =$ (16-1) (16-2) 。
17. 空間中，若平面 $x+5y=10$ 分別和 yz 平面、 xz 平面交於直線 L_1, L_2 。若 P, Q 兩點分別在直線 L_1, L_2 上，當 \overline{PQ} 最小時， $\overrightarrow{PQ} =$ (17-1) (17-2), (17-3) (17-4), (17-5) 。

第貳部分、混合題或非選擇題 (占 15 分)

說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

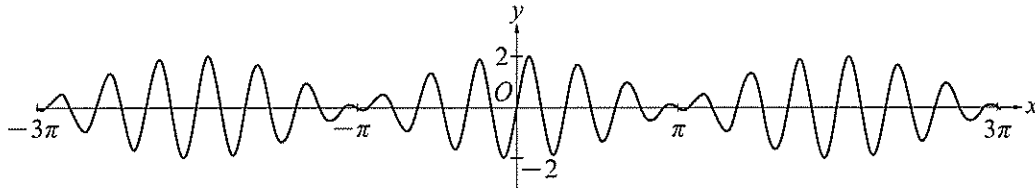
第 18 至 20 題為題組

樂器調音時的拍頻原理如下：下圖(4)為 $y=f_1(x)=\sin 7x+\sin 7x$ 的部分函數圖形。當樂器的聲音 $y=\sin 7x$ 與標準音叉的聲音 $y=\sin 7x$ 一致時，音量保持恆定，則調音完成。



圖(4)

下圖(5)為 $y=f_2(x)=\sin 7x+\sin 6x$ 的部分函數圖形。當樂器的聲音 $y=\sin 6x$ 與標準音叉的聲音 $y=\sin 7x$ 不一致時，音量會忽大忽小，則調音未完成。



圖(5)

已知 $f(x)=\sin ax+\sin bx$ ，其中 $a, b \in \mathbb{N}$ 。

性質 1：若 a, b 互質，則 $f(x)=\sin ax+\sin bx$ 的週期為 2π 。

性質 2： k 為正實數，若 $f(x)$ 的週期為 2π ，則 $f(kx)$ 的週期為 $\frac{2\pi}{k}$ 。

請利用以上兩個性質，回答下列問題：

18. $y=f_1(x)=\sin 7x+\sin 7x$ 的週期為下列哪一個選項？(單選題，5 分)

- (1) $\frac{\pi}{7}$ (2) $\frac{2\pi}{7}$ (3) π
 (4) $\frac{4\pi}{7}$ (5) 2π

19. 試計算出 $y=f_3(x)=\sin 70x+\sin 69x$ 的週期為多少？(非選擇題，5 分)

20. 試計算出 $y=f_4(x)=\sin 7x+\sin 6.9x$ 的週期為多少？(非選擇題，5 分)

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項的和為 $S = \frac{n[2a + (n-1)d]}{2}$ 。

首項為 $a(a \neq 0)$ ，公比為 $r(r \neq 1)$ 的等比數列前 n 項的和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ 。

2. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ （ R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑）。

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ 。

3. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，

算術平均數 $\mu_x = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ 。

標準差 $\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1 - \mu_x)^2 + (x_2 - \mu_x)^2 + \dots + (x_n - \mu_x)^2]} = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - n\mu_x^2]}$ 。

4. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，

相關係數 $r_{x,y} = \frac{(x_1 - \mu_x)(y_1 - \mu_y) + (x_2 - \mu_x)(y_2 - \mu_y) + \dots + (x_n - \mu_x)(y_n - \mu_y)}{n\sigma_x\sigma_y}$ 。

迴歸直線（最適合直線）方程式 $y - \mu_y = r_{x,y} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \mu_x)$ 。

5. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$ 。

6. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ， $\log_{10} 7 \approx 0.8451$ 。

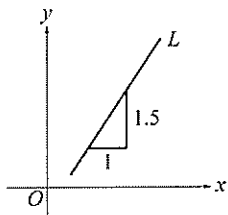
$10^{0.3010} \approx 2$ ， $10^{0.4771} \approx 3$ ， $10^{0.6990} \approx 5$ ， $10^{0.8451} \approx 7$ 。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14-1	14-2
2	4	5	4	1	2	5	45	3	35	45	23	15	-	6
14-3	15-1	16-1	16-2	17-1	17-2	17-3	17-4	17-5	18	19	20			
0	8	1	2	1	0	-	2	0	2					

第壹部分、選擇(填)題

一、單選題

1. 依斜率定義量測如下，直線 L 的斜率為 1.5，

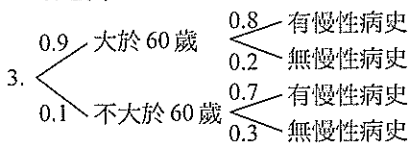


故選(2)。

2. 設公比為 r ，

將第一項到第十項每一項乘上 r^2 為第三項到第十二項
 $\Rightarrow 369r^2 = 164 \Rightarrow r^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow r = \pm \frac{2}{3}$ (取正) $\Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = r = \frac{2}{3}$ ，

故選(4)。



\therefore 所求 $= \frac{0.9 \times 0.8}{0.9 \times 0.8 + 0.1 \times 0.7} = \frac{72}{79} \approx 0.91 = 91\%$ ，

故選(5)。

4. 30 天後的股價為一開始股價的 $(1+8\%)^{30} = 1.08^{30}$ 倍，

$\log 1.08 = \log \frac{108}{100} = \log 108 - \log 100$
 $= 2 \log 2 + 3 \log 3 - \log 100 \approx 0.0333$ ，
 $\log 1.08^{30} = 30 \log 1.08 \approx 0.999 \approx 1 = \log 10$ ，
 所以 1.08^{30} 倍 ≈ 10 倍，

故選(4)。

5. $\vec{a} + 2\vec{b}$ 平分 \vec{a} 、 \vec{b} 夾角 $\Rightarrow |\vec{a}| = 2|\vec{b}|$ 。

設 $|\vec{b}| = k > 0 \Rightarrow |\vec{a}| = 2k$ ， $|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{6}k$ ，
 又 $|\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2$ ，
 $6k^2 = 4k^2 + 4 \times 2k \times k \cos \theta + 4k^2 \Rightarrow \cos \theta = -\frac{1}{4}$ 。

故選(1)。

6. 設 $\overline{AP} = x$ ， $\overline{PB} = y \Rightarrow x + y = 20 \Rightarrow x^2 + y^2 = 400 - 2xy$ ，

$\overline{QR}^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 30^\circ = 400 - (2 + \sqrt{3})xy$ ，
 又 $x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow xy \leq 100$ 即 xy 的最大值為 100
 $\Rightarrow \overline{QR}^2$ 的最小值為 $400 - (2 + \sqrt{3}) \times 100 = 200 - 100\sqrt{3} \approx 26.8$ ，
 故選(2)。

7. $T_0 = -2$ ， $H = 23$ ， $T(1) = 3$ ，

$3 - 23 = (-2 - 23) \times 2^{-a}$ ， $2^{-a} = \frac{4}{5}$ ，
 設經過了 t 小時，牛肉溫度降到 13°C ，
 $13 - 23 = (-2 - 23) \times 2^{-at}$ ， $2^{-at} = \frac{2}{5}$ ， $(\frac{4}{5})^t = \frac{2}{5}$ ，

所以 $t = \log_{\frac{4}{5}} \frac{2}{5} = \frac{\log \frac{2}{5}}{\log \frac{4}{5}} = \frac{\log 2 - \log 5}{2 \log 2 - \log 5} \approx 4.1$ ，

所求 $\approx 4.1 - 1 = 3.1$ 小時，
 故選(5)。

二、多選題

8. (1) \times ： $\sin \theta = -\overline{CD}$ 。

(2) \times ： $\cos \theta = \overline{OC}$ 。

(3) \times ： $\tan \theta = -\overline{AB}$ 。

(4) \circ ： $\sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta = \overline{CD}$ 。

(5) \circ ： $\cos(270^\circ - \theta) = -\sin \theta = \overline{CD}$ 。

故選(4)(5)。

9. (1) \times ：迴歸直線斜率 $\frac{7}{8} = r \times \frac{14}{16} \Rightarrow r = 1$ 。

(2) \times ： $r = 1$ 表示 (μ_X, μ_Y) 及 (x_k, y_k) 均在

直線 $y = \frac{7}{8}x + 5$ 上，其中 $k = 1, 2, 3, \dots, 10$ 。

$\mu_Y = \frac{7}{8}\mu_X + 5$ ，若 $\mu_X = 40$ ，

則 $\mu_Y = 40$ 為此選項的反例。

(3) \circ (4) \times ：由 (x_k, y_k) 均在直線 $y = \frac{7}{8}x + 5$ 上，

其中 $k = 1, 2, 3, \dots, 10$ 。

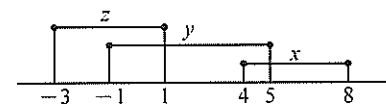
可知數學和物理的最高分必是同一人；
 數學和物理的最低分也必是同一人。

(5) \times ：可以預測褚衛的物理成績為 $\frac{7}{8} \times 80 + 5 = 75$ 分，

但不一定為 75 分。

故選(3)。

10. $4 \leq x \leq 8$ ， $-1 \leq y \leq 5$ ， $-3 \leq z \leq 1$ ，如下圖所示。



(1) \times ： $-1 \leq x - y \leq 9 \Rightarrow x - y$ 的最大值為 9。

(2) \times ： $-2 \leq y - z \leq 8 \Rightarrow y - z$ 的最小值為 -2。

(3) \circ (4) \times ：當 $x = 4$ ， $1 \leq y \leq 4$ ， $z = 1$ 時，
 $|x - y| + |y - z|$ 有最小值為 3。

(5) \circ ：當 $x = 8$ ， $-1 \leq y \leq 5$ ， $z = -3$ 時，
 $|x - y| + |y - z|$ 有最大值為 11。

故選(3)(5)。

11. 令 $y = mx$ 的斜角為 ϕ ，則 $m = \tan \phi$ ，

所以 $A = \begin{bmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{bmatrix}$ ，而 $B = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ ，

$AB = \begin{bmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} \cos(2\phi - \theta) & \sin(2\phi - \theta) \\ \sin(2\phi - \theta) & -\cos(2\phi - \theta) \end{bmatrix}$

為鏡射矩陣。

(1) \times : $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$ 為二階單位方陣，非鏡射矩陣。

(2) \times : $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix}$

為旋轉 30° 的旋轉矩陣。

(3) \times : $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-30^\circ) & -\sin(-30^\circ) \\ \sin(-30^\circ) & \cos(-30^\circ) \end{bmatrix}$

為旋轉 -30° 的旋轉矩陣。

(4) \circ : $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix}$

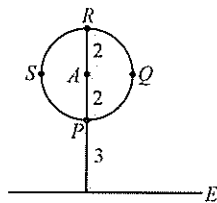
為對 $y = (\tan \alpha)x$ 鏡射的矩陣， $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ 。

(5) \circ : $\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 135^\circ & \sin 135^\circ \\ \sin 135^\circ & -\cos 135^\circ \end{bmatrix}$

為對 $y = (\tan 67.5^\circ)x$ 鏡射的矩陣。

故選(4)(5)。

12. 依題意繪截面圖如右，直線 L 為自 A 點垂直紙面射出的直線，直線 M 為自圓上的點垂直紙面射出的直線，平面 E 亦為垂直紙面而出的平面。



(1) \times : $d=2$ 時，直線 M 只有 0 條。

(2) \circ : $d=3$ 時，直線 M 只有 1 條，為自 P 點垂直紙面的直線。

(3) \circ : $d=5$ 時，直線 M 只有 2 條，為分別自 Q, S 兩點垂直紙面的直線。

(4) \times : $d=7$ 時，直線 M 只有 1 條，為自 R 點垂直紙面的直線。

(5) \times : $d=8$ 時，直線 M 只有 0 條。

故選(2)(3)。

13. (1) \circ : 依題意可知

$$y=f(x)=3(x-2)^3+4x-7$$

$$=3(x-2)^3+4(x-2)+1$$

\Rightarrow 中心 $(2, 1)$ ，即 $k=1$ 。

(2) \times (3) \times : $y=3x^3-9x^2+bx+c=3(x-1)^3+\dots$

\Rightarrow 中心 $(1, 1)$

$$\Rightarrow y=3x^3-9x^2+bx+c=3(x-1)^3+4(x-1)+1$$

$\Rightarrow b=13, c=-6$ 。

(4) \times : $f(x)$ 除以 $(7x-7)$ 的餘式 $=f(1)=-6$ 。

(5) \circ : 設 $f(x)=\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\right)q(x)+mx+n$

$$=\frac{1}{6}(x-2)(x-1)q(x)+mx+n$$

$\Rightarrow f(2)=2m+n, f(1)=m+n$ ，又 $f(2)=1, f(1)=-6$

$\Rightarrow m=7$ 且 $n=-13$ ，

即 $f(x)$ 除以 $\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$ 的餘式為 $7x-13$ 。

故選(1)(5)。

三、選填題

14. $100 \times \frac{C_2^2}{C_2^6} + 200 \times \frac{C_2^2}{C_2^6} + 300 \times \frac{C_2^2}{C_2^6}$

$$= 100 \times \frac{1}{15} + 200 \times \frac{1}{15} + 300 \times \frac{1}{15} = 40$$

所以 $E=40-100=-60$ 。

15. $A \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ，

$\det(A) \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ ， $\det(A)=4$ ，

$\triangle OP'Q' = \frac{2 \times 2}{2} = 2$ ，

\Rightarrow 所求 $= |\det(A)| \times \triangle OP'Q' = 4 \times 2 = 8$ 。

16. 圓 $\Gamma: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 45$

$\Rightarrow \triangle ABC$ 的外接圓半徑 $R = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ 。

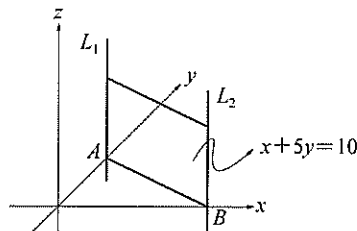
設 \vec{u}, \vec{v} 夾角為 θ

$\Rightarrow \cos \theta = \frac{3 \times (-1) + 4 \times 2}{\sqrt{3^2 + 4^2} \sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \frac{BC}{2R} = \sin A = \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow BC = \frac{2}{\sqrt{5}} \times 2R = 12$ 。

17. 依題意，繪示意圖如下，



$L_1 \parallel L_2$ 且 L_1 過點 $A(0, 2, 0)$ ，

L_2 過點 $B(10, 0, 0)$ ，

$\overline{AB} \perp L_1, \overline{AB} \perp L_2 \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \overline{AB} = (10, -2, 0)$ 。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. $y=f_1(x)=2 \sin 7x$ 的週期為 $\frac{2\pi}{7}$ ，

故選(2)。

19. 令 $y=f_3(x)=\sin 70x + \sin 69x$ ，

由性質 1，因為 $(70, 69)=1$ ，(2 分)

所以 $y=f_3(x)$ 的週期為 2π 。(3 分)

20. 由性質 2 可知，

$f_3\left(\frac{x}{10}\right) = \sin 7x + \sin 6.9x$ 的週期為 $\frac{2\pi}{1} = 20\pi$ 。(5 分)

全國公私立高級中學

110 學年度學科能力測驗第四次聯合模擬考試

考試日期：110 年 12 月 14~15 日

數學 B 考科

— 作答注意事項 —

考試時間：100 分鐘

作答方式：

- 選擇(填)題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正液(帶)。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績並損及權益。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若答案格式是 $\frac{\textcircled{18-1}}{\textcircled{18-2}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答題卷上的第

18-1 列的 \square^3 與第 18-2 列的 \square^8 劃記，如：

18-1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
18-2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若答案格式是 $\frac{\textcircled{19-1}\textcircled{19-2}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答題卷的第 19-1 列的 \square

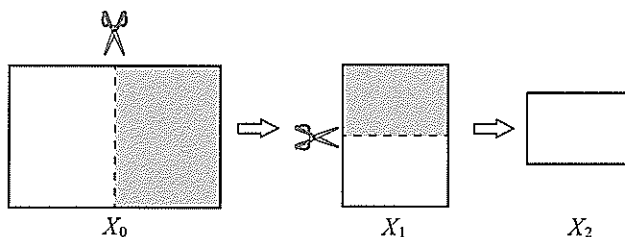
與第 19-2 列的 \square^7 劃記，如：

19-1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19-2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

選擇(填)題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
 - 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\frac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
 - 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。
- ※ 試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

4. 美術社應客戶的要求設計特殊規格的 X 系列紙張。例如：將一張 X_0 紙的長邊對摺後剪開就是 X_1 紙，如圖(4)，而沿 X_1 紙的長邊對摺後剪開就是 X_2 紙，依此類推。



圖(4)

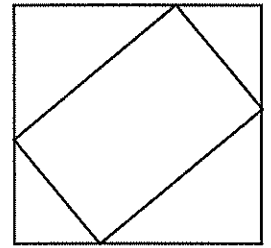
X 系列紙張的規格是長與寬的比值對半裁切後仍維持相同。

若已知 X_2 紙的短邊長為 1024 毫米，則 X_5 紙的長邊長為多少毫米？

- (1) $128\sqrt{2}$ (2) 256 (3) $256\sqrt{2}$
 (4) 512 (5) $512\sqrt{2}$
5. 福島核災甫屆十年，日本政府於日前決議要將 125 萬噸核廢水排放到太平洋，環保組織綠色和平表示此廢水中除了受媒體關注的“氚”外，尚含有十幾種放射性物質，例如碳-14，它能融入蛋白質、核酸，特別是 DNA 等細胞組織中，因此造成 DNA 損傷而致細胞死亡與潛在的遺傳突變，更嚇人的是它的半衰期長達 5730 年，即其濃度降為原來的一半須歷經 5730 年，由此推知若其濃度降為原來的 $\frac{1}{10}$ 須歷經約多少年？
- (1) 15000 (2) 19000 (3) 21000
 (4) 23000 (5) 25000
6. 遊樂場中有一戳戳樂遊戲，只要付 45 元，便可從一 4×4 的十六宮格中任選一格，並獲得內藏的獎金，若已知每格均有獎金，且獎金恰可分成 100、50、10 元三種。在僅有獎金的支出，無其他成本考量下，欲使此遊戲設計達公平，則需設計有多少格是內藏 10 元獎金？
- (1) 5 (2) 6 (3) 7
 (4) 8 (5) 9

7. 水果盤商想設計一款年節禮盒，禮盒上方的正方形盒蓋要內接一個黃金矩形的透明視窗，如圖(5)，如此顧客不必打開盒子便能看到部分內容物。試問此黃金矩形視窗面積占正方形盒蓋面積的百分比最接近下列哪一選項？

- (1) 45% (2) 47%
(3) 51% (4) 53%
(5) 55%



圖(5)

二、多選題 (占 25 分)

說明：第 8 題至第 12 題，每題 5 分。

8. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ，則矩陣 B 為下列哪些時，可滿足 $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ？

- (1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$
(4) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

9. 試問下列哪些不等式之解是相同的？

- (1) $|2x-3| \leq 1$
(2) $2^{x^2-3x} \geq \frac{1}{4}$
(3) $\log_{0.1}(x^2+2) \geq \log_{0.1} 3x$
(4) $(x-1)^2(x-2) \leq 0$
(5) $2(x^3-1) \geq x(x^3-1)$

10. 高三甲班有 50 位同學，期中考英文成績 (x) 之算術平均數為 50 分，標準差 5 分，數學成績 (y) 之算術平均數為 μ_y 分，標準差 10 分，而 y 對 x 之迴歸 (最適) 直線為

$$y = \frac{3}{5}x + 10$$

方案 A：每位同學的數學成績 (y) 均加 h 分得新成績 (y')，使得新的班平均分數恰為 60 分

方案 B：每位同學的數學成績 (y) 均乘以 k 倍得新成績 (y'')，使得新的班平均分數恰為 60 分

試選出正確的選項。

(1) $\mu_y = 40$

(2) 英文成績 (x) 與數學成績 (y) 之相關係數 $r_{x,y}$ 為 $\frac{3}{10}$

(3) 方案 A 所得的新成績 (y') 與方案 B 所得的新成績 (y'') 之相關係數 $r_{y',y''}$ 必小於 1

(4) 無論採取哪一方案調整數學成績，數學成績之標準差均不會改變

(5) 無論採取哪一方案調整數學成績，英文成績與數學成績之相關係數均不會改變

11. 如圖(6)，大型風車某葉片的頂端為 P 點，開始運轉時， P 點恰在離地最高的位置上， x 秒後， P 點離地的高度 y (公尺) 可表為

$$y = 40 \sin\left(\frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{2}\right) + 70$$

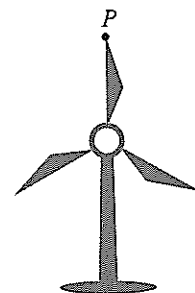
(1) 4 秒後， P 點離地為 90 公尺

(2) 6 秒後， P 點離地最近

(3) P 點離地最高為 70 公尺

(4) P 點離地最近為 30 公尺

(5) 此發電機的葉片轉一圈需 6 秒



圖(6)

12. 設 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，若已知 $f(x)$ 除以 $(x-1)^2$ 餘 1，除以 $x(x+1)$ 餘 $x+2$ ，試選出正確的選項。

(1) $a - b + c - d = 1$

(2) $a + b + c + d = 1$

(3) $f(x)$ 除以 $x^2 - 1$ 餘 1

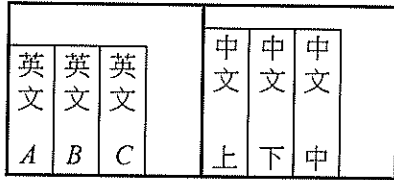
(4) 若相異三點 $(x_0 + t, y_0 + s)$, (x_0, y_0) , $(x_0 - t, y_0 - s)$ 均在 $y = f(x)$ 之圖形上，則 $x_0 = \frac{1}{3}$

(5) $y = f(x)$ 圖形在 $x = 2$ 的一次近似直線為 $y = 7x - 10$

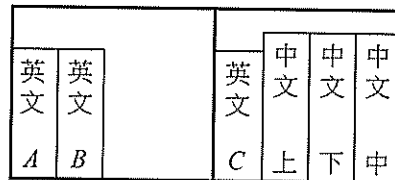
三、選填題 (占 25 分)

說明：第 13 題至第 17 題，每題 5 分。

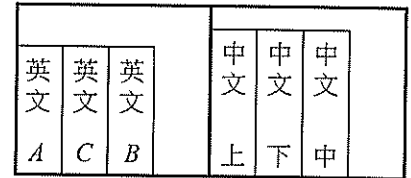
13. 靜香有 3 本不同的英文書及 3 本不同的中文書，今欲立放於有左右兩格的書架中，每格內自左而右擺放且最多只放 4 本，觀察其排放的位置和順序，如圖(7)、圖(8)、圖(9)為三種不同排法，



圖(7)



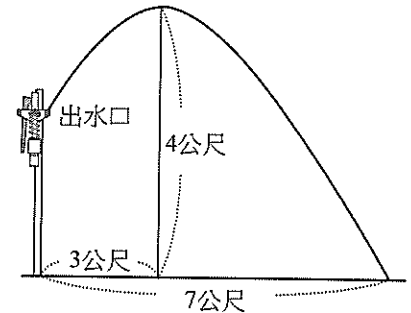
圖(8)



圖(9)

則任意排放有 (13-1)(13-2)(13-3)(13-4) 種不同排法。

14. 如圖(10)，公園裡有一自動灑水器，噴出的水柱最高點距離地面 4 公尺高，且與灑水器的水平距離為 3 公尺，已知水柱的軌跡為拋物線，且灑水器噴出的水柱落在地面上後，離灑水器的最遠距離為 7 公尺，則可推知灑水



圖(10)

器的出水口距離地面 (14-1)
(14-2) 公尺。(化為最簡分數)

15. 有一稜長均為 10 的四角錐 $O-ABCD$ ，底面 $ABCD$ 恰為一正方形，若 P 為 \overline{OC} 之中點，今有一隻螞蟻自 A 爬行此錐體表面到 P ，則其最短路徑為 (15-1) $\sqrt{(15-2)}$ 。(化成最簡根式)

16. 半徑為 6 的地球儀，今將空間坐標的原點 O 置於球心， x 、 y 軸正向分別過本初子午線、東經 90° 線與赤道的交點， z 軸正向過北極。設 P 、 Q 為同一經線上的兩點， Q 點的空間坐標為 $(3\sqrt{3}, 3, 0)$ ，且 P 、 Q 兩點在球面上之最短距離為 $\frac{12}{5}\pi$ 。若已知 P 點在東經 x 度、北緯 y 度上，則數對 $(x, y) = \underline{(16-1)(16-2), (16-3)(16-4)}$ 。

17. 設平面上有兩向量 \vec{u} , \vec{v} 滿足 $|\vec{u} + 2\vec{v}| = |\vec{u}| = 2|\vec{v}| = 2$, 若 $(\vec{u} + 5\vec{v}) \perp (\vec{u} + t\vec{v})$, 已知

$$t \text{ 為實數, 則 } t = \frac{\textcircled{17-1}}{\textcircled{17-2}} \text{。 (化為最簡分數)}$$

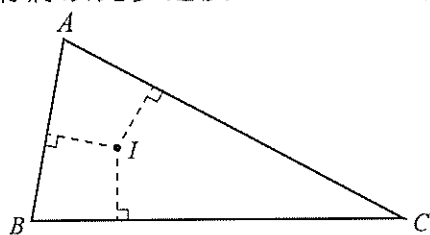
第貳部分、混合題或非選擇題 (占 15 分)

說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

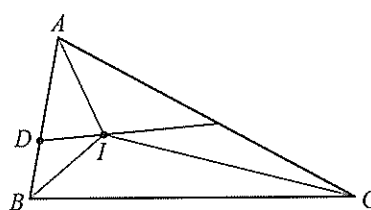
第 18 至 20 題為題組

甲城市有一名為「三角公園」的都市綠地，因其土地形狀特殊且緊鄰知名夜市而饒富盛名。三角公園 $\triangle ABC$ 的地形如下圖(11)，從市府提供的量測結果知其三邊長分別為 $\overline{AB} = 150$ 公尺， $\overline{BC} = 250$ 公尺， $\overline{AC} = 300$ 公尺，公園內部 I 點處設有涼亭一座，因設計之初各方居民均極力爭取將涼亭設於較近自己居住的社區，後基於公平起見，市府決議 I 點定位於到公園三邊等距離處。

公園啟用三個月後發覺內部植被因踐踏而嚴重損毀，所以市府擬增設一條通過涼亭 I 點的直線步道，該步道的一出入口是位於最短邊 \overline{AB} 上的 D 點且 $\overline{AD} = 100$ 公尺。於步道完工後，市府將以此步道及 \overline{AI} 、 \overline{BI} 、 \overline{CI} 為分界線劃分公園腹地 $\triangle ABC$ 為五個區塊，如下圖(12)。



圖(11)



圖(12)

除 $\triangle ADI$ 將安置運動及遊戲設施以為遊樂區外，其他四個區塊均規劃為不同主題的園藝區。試回答下列問題：

18. 從涼亭 I 點到公園任一邊的距離為多少公尺？（單選題，3 分）

- (1) $\frac{80}{7}\sqrt{14}$ (2) $\frac{90}{7}\sqrt{14}$ (3) $\frac{95}{7}\sqrt{14}$
 (4) $\frac{100}{7}\sqrt{14}$ (5) $\frac{120}{7}\sqrt{14}$

19. 若將步道視為一線段，步道面積不計，則遊戲區 $\triangle ADI$ 的面積占公園腹地 $\triangle ABC$ 的面積之百分比為何？試選出最接近的選項。（單選題，4 分）

- (1) 10% (2) 14% (3) 18%
 (4) 20% (5) 24%

20. 若已知陳爺爺以固定速度自步道出入口 D 點直線前行至涼亭 I 點共費時 60 秒，試問若繼續以此速度前行，陳爺爺需再費時多少秒才能到達步道的另一出入口？（非選擇題，8 分）

參考公式及可能用到的數值

1. 黃金矩形的長與寬比值恰為 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 。
2. 內分點公式：設 D 在 \overline{BC} 上，且 $\overline{BD} : \overline{CD} = m : n$ ，則 $\overrightarrow{AD} = \frac{n}{m+n} \overrightarrow{AB} + \frac{m}{m+n} \overrightarrow{AC}$ 。
3. $\triangle ABC$ 中，設 D 在 \overline{BC} 上， \overline{AD} 平分 $\angle BAC$ ，則 $\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC}$ 。
4. 設 $\triangle ABC$ 中， $\angle A, \angle B, \angle C$ 之對邊依次為 a, b, c ， $s = \frac{a+b+c}{2}$ ， R 表 $\triangle ABC$ 外接圓半徑， r 表 $\triangle ABC$ 內切圓半徑，則：
 $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ 。
 $\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ 。
 $\triangle ABC$ 的面積 = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{1}{2}bc \sin A = rs$ 。
5. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，
算術平均數 $\mu_x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ 。
標準差 $\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1 - \mu_x)^2 + (x_2 - \mu_x)^2 + \dots + (x_n - \mu_x)^2]} = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - n\mu_x^2]}$ 。
6. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，
相關係數 $r_{x,y} = \frac{(x_1 - \mu_x)(y_1 - \mu_y) + (x_2 - \mu_x)(y_2 - \mu_y) + \dots + (x_n - \mu_x)(y_n - \mu_y)}{n\sigma_x\sigma_y}$ 。
 y 對 x 的迴歸（最適）直線為 $y - \mu_y = (r_{x,y} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}) \times (x - \mu_x)$ 。
7. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$ 。
8. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ， $\log_{10} 7 \approx 0.8451$
 $10^{0.3010} \approx 2$ ， $10^{0.4771} \approx 3$ ， $10^{0.6990} \approx 5$ ， $10^{0.8451} \approx 7$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13-1	13-2	13-3
3	3	5	4	2	3	2	1345	135	125	24	2345	2	1	6
13-4	14-1	14-2	15-1	15-2	16-1	16-2	16-3	16-4	17-1	17-2	18	19	20	
0	7	4	5	7	3	0	7	2	1	4	4	2		

第壹部分、選擇(填)題

一、單選題

1. 設 A 代表抽中參加運動類社團(含桌球、籃球、瑜珈社)的學生的事件, B 代表抽中男性學生的事件,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.6 \times 0.5}{0.6 \times 0.5 + 0.4 \times 0.4} = \frac{15}{23}$$

故選(3)。

2. 設 P 點在 xy 平面上的投影點為 $R(4, 3, 0)$,

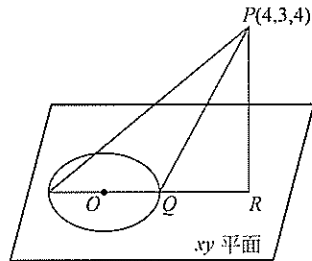
$$\text{則 } \overline{OR} - 1 \leq \overline{QR} \leq \overline{OR} + 1,$$

$$\text{即 } 4 \leq \overline{QR} \leq 6$$

$$\Rightarrow \sqrt{4^2 + 4^2} \leq \overline{PQ} \leq \sqrt{4^2 + 6^2},$$

$$\text{所以 } 4\sqrt{2} \leq \overline{PQ}.$$

故選(3)。



3. 討論滿足 $\begin{cases} x+y \leq 7 \\ 4x-3y \geq 0 \end{cases}$ 的 (x, y) ,

x	1	2	3	4	5	6
y	1	1~2	1~4	1~3	1~2	1
(x, y) 組數	1	2	4	3	2	1

$$\text{由上可知所求為 } \frac{1+2+4+3+2+1}{6 \times 6} = \frac{13}{36}.$$

故選(5)。

4. 設 X_{n-1} 的長邊為 x 毫米, X_n 的長邊為 y 毫米, 則 X_{n-1} 的短邊為 y 毫米, X_n 的短邊為 $\frac{x}{2}$ 毫米。

$$\text{因為 } \frac{x}{y} = \frac{y}{\frac{x}{2}}, \text{ 所以 } x^2 = 2y^2.$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \langle X_n \text{ 的短邊} \rangle \text{ 恰成等比且公比為 } \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\Rightarrow X_5 \text{ 的長邊長} = X_4 \text{ 的短邊} = 1024 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 512 \text{ (毫米)}.$$

故選(4)。

5. 設碳-14 每過一年其濃度變為原來的 r 倍,

$$n \text{ 年後其濃度降為原來的 } \frac{1}{10},$$

$$\text{因為 } r^{5730} = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } \log r = -\frac{\log 2}{5730}.$$

$$\text{又因為 } r^n = \frac{1}{10}, \text{ 所以 } n \log r = -1$$

$$\Rightarrow n = -\frac{1}{\log r} = -\frac{1}{-\frac{\log 2}{5730}} \approx \frac{5730}{0.3010} \approx 19037.$$

故選(2)。

6. 設有 x 格是內藏 10 元獎金、有 y 格是內藏 50 元獎金, 其中 x, y 為 1 至 14 間的自然數, 則有 $(16-x-y)$ 格是內藏 100 元獎金, 因為欲使此遊戲設計公平, 所以獎金的期望值需恰為 45 元。

$$\text{即 } 100 \times \frac{(16-x-y)}{16} + 50 \times \frac{y}{16} + 10 \times \frac{x}{16} = 45$$

$$\Rightarrow 1600 - 100x - 100y + 50y + 10x = 45 \times 16$$

$$\Rightarrow 9x + 5y = 88,$$

又 x, y 為 1 至 14 間的自然數

$$\Rightarrow x=7 \text{ 且 } y=5 \text{ 即有 7 格是內藏 10 元獎金.}$$

故選(3)。

7. 因為 $\triangle AHE \sim \triangle BEF$ 但不全等 (因為 $\overline{EF} \neq \overline{EH}$)

所以設 $\overline{AH} = \overline{BE} \times t, \overline{AE} = \overline{BF} \times t$, 其中 $t \neq 1$,

因為 $\triangle AHE \cong \triangle CFG$,

$$\text{所以 } \overline{CF} = \overline{AH} = \overline{BE} \times t,$$

$$\text{又 } \overline{AB} = \overline{BC},$$

$$\text{所以 } \overline{BF} \times t + \overline{BE} = \overline{BF} + \overline{BE} \times t$$

$$\Rightarrow \overline{BE}(1-t) = \overline{BF}(1-t)$$

$$\Rightarrow \overline{BF} = \overline{BE},$$

即 $\triangle BEF$ 為等腰直角三角形

$\Rightarrow \triangle AEH$ 亦為等腰直角三角形。

$$\text{因為 } \frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{EH}}{\overline{EF}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

$$\text{所以 } \overline{AE} = \frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \overline{AB}, \overline{BE} = \frac{2}{3+\sqrt{5}} \overline{AB}.$$

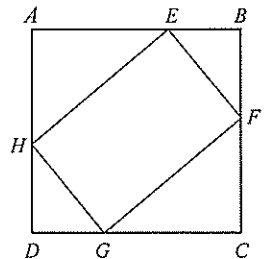
\Rightarrow 黃金矩形視窗面積

$$= \overline{EH} \times \overline{EF} = (\sqrt{2} \times \overline{AE}) \times (\sqrt{2} \times \overline{EB})$$

$$= 2 \times \frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \times \frac{2}{3+\sqrt{5}} \overline{AB}^2 = 2(\sqrt{5}-2) \times \overline{AB}^2$$

$$\approx 0.47 \times \text{禮盒上方面積}.$$

故選(2)。



二、多選題

8. 因為 $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \Leftrightarrow AB = BA$. 所以只要選出滿足 $AB = BA$ 之選項即可

$$(1) \circ : \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$(2) \times : \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 12 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$(3) \circ : \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 20 \\ 30 & 44 \end{bmatrix}.$$

$$(4) \circ : \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(5) \circ : \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 18 \\ 27 & 38 \end{bmatrix}.$$

故選(1)(3)(4)(5)。

9. (1) \circ : 因為 $-1 \leq 2x-3 \leq 1$,

$$\text{所以 } 1 \leq x \leq 2.$$

- (2) \times : 因為 $2^{x^2-3x} \geq 2^{-2}$,

$$\text{所以 } x^2 - 3x \geq -2 \Rightarrow x \geq 2 \text{ 或 } x \leq 1.$$

- (3) \circ : 因為 $x^2 + 2 \leq 3x$,

$$\text{所以 } 1 \leq x \leq 2.$$

- (4) \times : $x \leq 2$.

- (5) ○：因為 $(x^3-1)(x-2) \leq 0$
 $\Rightarrow (x-1)(x^2+x+1)(x-2) \leq 0$ ，
 又因為 $x^2+x+1 > 0$ 恆成立，
 所以 $(x-1)(x-2) \leq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 2$ 。
 故選(1)(3)(5)。

10. (1) ○：因為 $\mu_y = \frac{3}{5}\mu_x + 10$ 且 $\mu_x = 50$ ，
 所以 $\mu_y = 40$ 。

(2) ○：因為 $r_{x,y} \times \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{3}{5}$ ，
 所以 $r_{x,y} \times \frac{10}{5} = \frac{3}{5}$ ， $r_{x,y} = \frac{3}{10}$ 。

(3) ×：因為 $\begin{cases} y' = y + 20 \\ y'' = \frac{3}{2}y \end{cases}$ ，
 所以 $y'' = \frac{3}{2}(y' - 20) \Rightarrow r_{y',y''} = 1$ 。

(4) ×：因為 $\begin{cases} y' = y + 20 \\ y'' = \frac{3}{2}y \end{cases}$ ，
 所以 $\sigma_{y'} = \sigma_y = 10$ ， $\sigma_{y''} = \frac{3}{2}\sigma_y = 15$ 。

(5) ○：因為 $\begin{cases} y' = y + 20 \\ y'' = \frac{3}{2}y \end{cases}$ ，
 所以 $r_{x,y} = r_{x,y'} = r_{x,y''}$ 。
 故選(1)(2)(5)。

11. (1) ×： $y = 40 \sin\left(\frac{\pi}{6} \times 4 + \frac{\pi}{2}\right) + 70 = 40 \sin \frac{7}{6}\pi + 70 = 50$ ，
 4 秒後，P 點離地為 50 公尺。

(2) ○：因為 $\sin\left(\frac{\pi}{6} \times 6 + \frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{3}{2}\pi = -1$ ，
 所以 6 秒後，P 點離地最近。

(3) ×：P 點離地最高為 $40 \times 1 + 70 = 110$ (公尺)。

(4) ○：P 點離地最近為 $40 \times (-1) + 70 = 30$ (公尺)。

(5) ×：因為一週期為 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$ 秒，

所以此發電機的葉片轉一圈需 12 秒。

故選(2)(4)。

12. (1) ×：因為 $f(x)$ 除以 $x(x+1)$ 餘 $x+2$ ，
 所以設 $f(x) = x(x+1)g(x) + x+2 \Rightarrow f(-1) = 1$
 $\Rightarrow a-b+c-d = -1$ 。

(2) ○：因為 $f(x)$ 除以 $(x-1)^2$ 餘 1，
 所以設 $f(x) = (x-1)^2(ax+e) + 1 \Rightarrow f(1) = 1$
 $\Rightarrow a+b+c+d = 1$ 。

(3) ○：因為 $f(x) = x(x+1)g(x) + x+2$
 $\Rightarrow f(0) = 2$ 且 $f(-1) = 1$ ，
 又 $f(x) = (x-1)^2(ax+e) + 1$ ，
 所以 $\begin{cases} e = 1 \\ 4(-a+e) + 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ e = 1 \end{cases}$
 $\Rightarrow f(x) = (x-1)^2(x+1) + 1 = (x^2-1)(x-1) + 1$
 $= x^3 - x^2 - x + 2$
 $\Rightarrow f(x)$ 除以 x^2-1 餘 1。

(4) ○： $y=f(x)$ 圖形之對稱中心點的 x 坐標為
 $x_0 = -\frac{b}{3a} = \frac{1}{3}$ 。

(5) ○：因為 $f(x) = (x-2)^3 + 5(x-2)^2 + 7(x-2) + 4$ ，
 所以 $y=f(x)$ 圖形在 $x=2$ 的一次近似直線為
 $y = 7x - 10$ 。

故選(2)(3)(4)(5)。

三、選填題

13. 因為將六本書任意排有 $6!$ 種排法，
 書架中間隔板可置於第二與第三、第三與第四、第四與第五
 本間的空隙，
 所以共有 $6! \times 3 = 720 \times 3 = 2160$ 種不同排法。

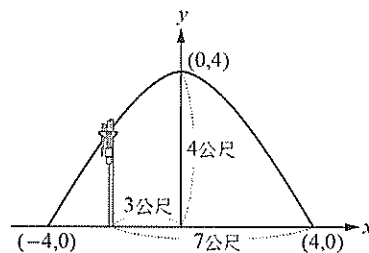
14. 如下圖，取此水柱軌跡為 $y = t(x+4)(x-4)$ ，

將 $(0, 4)$ 代入 $y = t(x+4)(x-4)$ ，可得 $t = -\frac{1}{4}$ ，

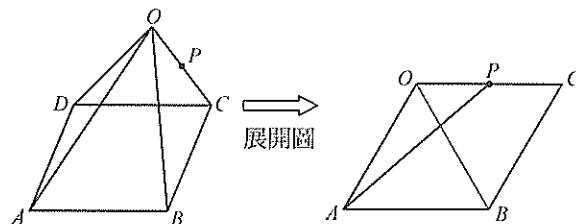
所以水柱軌跡為 $y = -\frac{1}{4}(x+4)(x-4)$ ，

將 $x = -3$ 代入 $y = -\frac{1}{4}(x+4)(x-4)$ ，可得 $y = \frac{7}{4}$ ，

即灑水器的出水口距離地面 $\frac{7}{4}$ 公尺。



- 15.



展開圖中可知

$$\overline{AP} = \sqrt{10^2 + 5^2 - 2 \times 10 \times 5 \cos 120^\circ} = \sqrt{125 + 50} = 5\sqrt{7}。$$

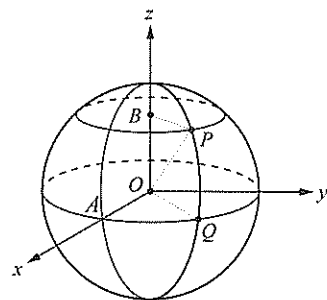
16. 如右圖，

因為 $\begin{cases} 6 \cos x^\circ = 3\sqrt{3} \\ 6 \sin x^\circ = 3 \end{cases}$ ，

所以 $x = 30$ ，

又 $12\pi \times \frac{y}{360} = \frac{12}{5}\pi$ ，

所以 $y = 72$ 。



17. 因為 $|\vec{u} + 2\vec{v}| = 2$ ，

所以 $|\vec{u} + 2\vec{v}|^2 = 4$ ，

$|\vec{u}|^2 + 4|\vec{v}|^2 + 4\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = -1$ 。

因為 $(\vec{u} + 5\vec{v}) \perp (\vec{u} + t\vec{v})$ ，

所以 $(\vec{u} + 5\vec{v}) \cdot (\vec{u} + t\vec{v}) = 0$ ，

$|\vec{u}|^2 + 5t|\vec{v}|^2 + (5+t)\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ，

$4 + 5t - (5+t) = 0$ ， $t = \frac{1}{4}$ 。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. 設 r 為 $\triangle ABC$ 之內切圓半徑，

因為 $\triangle ABC$ 面積 $= \sqrt{350 \times 200 \times 100 \times 50} = 5000\sqrt{14}$ ，

又 $\triangle ABC$ 面積 $= r \times 350$ ，

所以 $r = \frac{100}{7}\sqrt{14}$ (m)。故選(4)。

19. 因為 I 為 $\triangle ABC$ 的內心且 $\overline{AB} = 150$ 、 $\overline{BC} = 250$ 、 $\overline{AC} = 300$ ，

所以 $\triangle ABI$ 面積： $\triangle BCI$ 面積： $\triangle CAI$ 面積

$= \overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CA} = 3 : 5 : 6$ ，

又因為 $\overline{AD} : \overline{AB} = 100 : 150 = 2 : 3$ ，

$$\begin{aligned} \text{所以 } \triangle ADI \text{ 面積} &= \frac{2}{3} \times \triangle ABI \text{ 面積} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{14} \times \triangle ABC \text{ 面積} \\ &= \frac{1}{7} \times \triangle ABC \text{ 面積} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\triangle ADI \text{ 面積}}{\triangle ABC \text{ 面積}} = \frac{1}{7} \approx 0.14,$$

故選(2)。

20. 設 \overline{DI} 交 \overline{AC} 於 E , $\overline{AE} = k \overline{AC}$,

$$\begin{aligned} \Rightarrow \triangle AEI \text{ 面積} &= k \times \triangle ACI \text{ 面積} = k \times \frac{6}{14} \times \triangle ABC \text{ 面積} \\ &= \frac{3k}{7} \times \triangle ABC \text{ 面積}, (2 \text{ 分}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又因為 } \triangle ADE \text{ 面積} &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \overline{AB} \times k \overline{AC} \times \sin A \\ &= \frac{2}{3} k \times \triangle ABC \text{ 面積}, (2 \text{ 分}) \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \overline{EI} : \overline{DE} = \triangle AEI \text{ 面積} : \triangle ADE \text{ 面積} = \frac{3}{7} : \frac{2}{3} = 9 : 14$$

$$\Rightarrow \overline{DI} : \overline{EI} = 5 : 9 (2 \text{ 分})$$

$$\Rightarrow \text{陳爺爺需再費時 } 60 \times \frac{9}{5} = 108 \text{ 秒才能到達步道的另一出入口。} (2 \text{ 分})$$

