數學A

110 年學科能力測驗第六次模擬考試

數學A考科

110-W6

命題範圍：第一～二冊、第三冊 A～第四冊 A

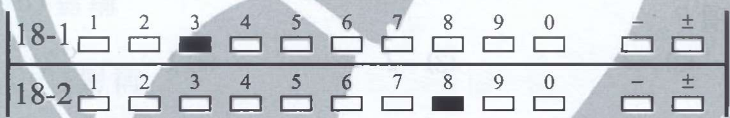
—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

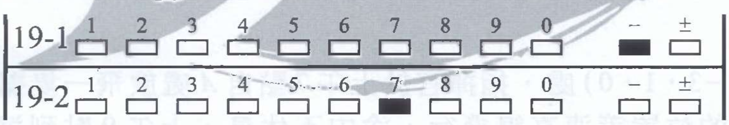
作答方式：

- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響考生成績並損及權益。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若答案格式是 $\dfrac{(18\text{-}1)}{(18\text{-}2)}$，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答題卷上的第 18-1 列的 3 與第 18-2 列的 8 劃記，如：



例：若答案格式是 $\dfrac{(19\text{-}1)(19\text{-}2)}{50}$，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答題卷的第 19-1 列的 – 與第 19-2 列的 7 劃記，如：



選擇（填）題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\dfrac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

第壹部分、選擇（填）題（占85分）

一、單選題（占35分）

說明：第1題至第7題，每題5分。

1. 已知k為正數，滿足絕對值不等式$|3x-a|\leq k$的所有實數x所形成的區間長度為8，則下列關於k值的敘述，哪一個選項是正確的？
⑴沒有k值可以滿足條件
⑵只有1個k值可以滿足條件
⑶恰有2個k值可以滿足條件
⑷恰有3個k值可以滿足條件
⑸k值個數和a的取值有關

2. 已知平面E平行yz平面且通過$A(2,3,4)$，則下列哪一個選項代表平面E的方程式？
⑴$x=2$　⑵$y=3$　⑶$z=4$　⑷$x+y+z=9$　⑸$2x+3y+4z=0$

3. 圓$x^2+y^2+2x+4y+k=0$上的點到直線$x+y+1=0$的距離為$\sqrt{2}$的點恰有3個，則k值為下列哪一個選項？
⑴-11　⑵-7　⑶-3　⑷$1$　⑸$4$

4. 軍隊被困於$A(-3,1,0)$處，指揮官於上午7點自A處放飛一隻攜帶求救信之鴿子，鴿子朝著援軍的位置等速直線飛行，途中不休息，上午9點到達$B(1,5,2)$。敵軍在平面$2x+3y+5z-87=0$之處布下一張天羅地網，其中z坐標之範圍為$0\leq z\leq 7$，如果援軍位於$C(17,21,10)$，則下列哪一個選項是正確的？
⑴鴿子下午3點到達援軍處
⑵鴿子下午5點到達援軍處
⑶鴿子上午11點被捕獲
⑷鴿子上午12點被捕獲
⑸鴿子下午1點被捕獲

5. 三人「黑白配」的遊戲規則如下：三人同時出示手勢，以手心（白）、手背（黑）來決定勝負。若其中一人的手勢與其他人都不一樣時，則此人勝出，其他情況則不分勝負。現有甲、乙、丙三人一起玩「黑白配」遊戲，設甲、乙、丙三人每次出示手心（白）、手背（黑）的某一個手勢的機率都是$\frac{1}{2}$，則一次遊戲中甲獲勝的機率是多少？

(1) $\frac{1}{4}$　(2) $\frac{1}{3}$　(3) $\frac{1}{8}$　(4) $\frac{3}{8}$　(5) $\frac{3}{16}$

6. 已知$\omega>0$，函數$f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})$的圖形最小正週期為$\pi$，則下列關於$f(x)$的敘述，哪一個選項是正確的？

(1)振幅為2π

(2)圖形對稱於直線$x=\frac{\pi}{3}$

(3)圖形對稱於直線$x=-\frac{\pi}{2}$

(4)關於點$(\frac{\pi}{3},0)$對稱

(5)關於點$(-\frac{\pi}{2},0)$對稱

7. 某歌手舉行新歌發表記者會，共有6位電子媒體記者與4位平面媒體記者參加，若要從中選出3位進行提問，要求3人中既有電子媒體記者又要有平面媒體記者，且電子媒體記者不能連續提問。則不同的記者提問順序有幾種？

(1) 96　(2) 248　(3) 276　(4) 336　(5) 396

二、多選題（占30分）

說明：第8題至第13題，每題5分。

8. 已知數據 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 的標準差為 σ 且 $\sigma>0$，另有五組數據資料如下：
第1組：$-x_1$，$-x_2$，$-x_3$，$-x_4$，$-x_5$
第2組：$x_1-\alpha$，$x_2-\alpha$，$x_3-\alpha$，$x_4-\alpha$，$x_5-\alpha$
第3組：$\frac{x_1}{\sigma}$，$\frac{x_2}{\sigma}$，$\frac{x_3}{\sigma}$，$\frac{x_4}{\sigma}$，$\frac{x_5}{\sigma}$
第4組：σx_1，σx_2，σx_3，σx_4，σx_5
第5組：x_1+2017，x_2+2018，x_3+2019，x_4+2020，x_5+2021
這五組的標準差依序為 σ_1，σ_2，σ_3，σ_4，σ_5，試選出正確的選項。
(1) $\sigma>\sigma_1$　(2) $\sigma=\sigma_2$　(3) $\sigma_3=1$　(4) $\sigma_4>\sigma$　(5) $\sigma_5>\sigma$

9. 已知三次實係數多項式函數 $f(x)=x^3+bx^2+74x-130$ 的圖形之對稱中心為 $(5,-10)$，試選出正確的選項。
(1) $b=15$
(2) 若點 (p,q) 在 $y=f(x)$ 的圖形上，則點 $(10-p,-20-q)$ 也在 $y=f(x)$ 的圖形上
(3) $y=f(x)$ 的圖形在 $x=5$ 附近的近似直線的斜率為 -1
(4) 若三次函數 $g(x)=x^3-x-10$，則 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的圖形在 $x=5$ 附近的近似直線相同
(5) 存在實數 α，使得 $f(\alpha)=0$

10. 設 $f(x)=|\log x|$，若 $a<b<c$，且 $f(a)>f(c)>f(b)$，試選出正確的選項。
(1) $0<a<1$　(2) $b<0$　(3) $c>1$　(4) $ac>1$　(5) $abc<1$

11. 帕累托法則（Pareto principle，義大利經濟學家）說：在一個國家裡，年收入不少於 m 美元的人數占全體人數的 $\frac{c}{m^k}$，這裡的常數 k，c 和這個國家的經濟發達程度有關。現有一個國家的人民年收入的 60 百分位數為 19600 美元，而且知道該國家的帕累托常數 $k=0.5$。如果年收入在全國前 20 % 的人為高所得族群，年收入在全國後 20 % 的人為低所得族群，試選出正確的選項。

(1) c 的最小值為 54
(2) 甲的年收入為 80000 美元，可歸類為高所得族群
(3) 乙的年收入為 5000 美元，可歸類為低所得族群
(4) 此國家人民的年收入中位數超過 12000 美元
(5) 高所得族群的最低收入超過低所得族群最高收入的 20 倍

12. 給定坐標空間中的四個向量 $\vec{a}=(1,1,2)$、$\vec{b}=(1,5,-5)$、$\vec{c}=(-1,-3,1)$、$\vec{d}=(0,-2,2)$，試選出正確的選項。

(1) $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 不共平面
(2) $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 所形成的平行六面體體積為 11
(3) $\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ 有唯一解
(4) $\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ 有無限多組解
(5) $\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ 的解和聯立方程式 $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ x+5y-5z=-2 \\ -x-3y+z=2 \end{cases}$ 的解相同

13. 二階方陣 $P=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 所對應的平面變換是推移變換，試選出正確的選項。

(1) 可以將坐標平面上的點 $(1,2)$ 變換成點 $(5,2)$
(2) 坐標平面上的任意點經過矩陣 P 推移後，不會改變該點到 x 軸的距離
(3) A、B 是 x 軸上的相異兩點，則線段 AB 經矩陣 P 推移後仍然是線段 AB
(4) 若水平線段 CD 離 x 軸的距離大於水平線段 EF 離 x 軸的距離，則線段 CD 經矩陣 P 推移後的水平位移會大於線段 EF 經矩陣 P 推移後的水平位移
(5) 坐標平面上的正方形經矩陣 P 推移後的圖形仍然是正方形

三、選填題（占20分）

說明：第14至17題，每題5分。

14. 老馬在一所大學附近經營一座書報攤，根據長期經驗顯示，晴天時每天可獲利1500元，陰天時每天可獲利1200元，雨天時每天可獲利1000元。假設晴天、陰天和雨天三個事件發生的機率分別為0.6，0.3和0.1，老馬希望以後下雨天時能停止營業，於是他投保了某保險公司推出的「雨天險」，內容為「每天保費200元，如果下雨則理賠a元」。為保證投保後期望利潤不減少，則a的最小值等於 (14-1)(14-2)(14-3)(14-4) 。

15. 坐標平面上直線L的方程式為$(1+\cos\theta)x+(1-\sin\theta)y=5$，則原點$(0,0)$到$L$的距離的最小值為 (15-1)$\sqrt{(15\text{-}2)}$ − (15-3) 。（化為最簡根式）

16. 在極坐標系上，極點O及兩點$A[6,80°]$、$B[9,200°]$，若C在$\overline{AB}$上且$\overline{AC}:\overline{BC}=1:2$，則$\overline{OC}$的長度為 $\sqrt{(16\text{-}1)(16\text{-}2)}$ 。（化為最簡根式）

17. 在$\triangle ABC$中，已知$\cos B=\dfrac{3}{5}$，$\overline{AC}=6$，則$\triangle ABC$面積的最大值為 (17-1)(17-2)。

第貳部分、混合題或非選擇題（占15分）

說明：本部分共有1題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

18-19題為題組

坐標平面上有一序列的點 (a_1, b_1)，(a_2, b_2)，(a_3, b_3)……，已知 $\begin{cases} a_{n+1} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}a_n - \dfrac{\sqrt{2}}{2}b_n \\ b_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a_n - \dfrac{\sqrt{2}}{2}b_n \end{cases}$ 對所有的正整數 $n=1, 2, 3, \ldots\ldots$ 都成立。若二階方陣 A 滿足 $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$，試回答下列問題。

18. 試選出正確的選項。（多重選擇題，5分）

(1) $A = \begin{bmatrix} -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

(2) $A = \begin{bmatrix} \cos\dfrac{5\pi}{4} & -\sin\dfrac{5\pi}{4} \\ \sin\dfrac{5\pi}{4} & \cos\dfrac{5\pi}{4} \end{bmatrix}$

(3) 滿足 $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的最小正整數 $n = 12$

(4) $\det A = 1$

(5) $A^{2021} = A^5$

19. 若 $(a_{110}, b_{110}) = (\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2})$，試求 (a_1, b_1)。（非選擇題，10分）

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S_n=\dfrac{n(2a+(n-1)d)}{2}$

   首項為 a，公比為 r（$r\neq 1$）的等比數列前 n 項之和為 $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角函數的和角公式：$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

   $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

   $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

3. $\triangle ABC$ 的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$（$R$ 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑）

   $\triangle ABC$ 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

4. 一維數據 X：x_1，x_2，……，x_n，算術平均數 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)$

   標準差 $\sigma_x=\sqrt{\dfrac{1}{n}((x_1-\overline{X})^2+(x_2-\overline{X})^2+\cdots+(x_n-\overline{X})^2)}=\sqrt{\dfrac{1}{n}(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2)-\overline{X}^2}$

5. 二維數據 $(X，Y)$：$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$，……，$(x_n，y_n)$，

   相關係數 $r_{X,Y}=\dfrac{(x_1-\overline{X})(y_1-\overline{Y})+(x_2-\overline{X})(y_2-\overline{Y})+\cdots+(x_n-\overline{X})(y_n-\overline{Y})}{n\sigma_x\sigma_y}$

   迴歸直線（最適合直線）方程式 $y-\overline{Y}=r_{X,Y}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\overline{X})$

6. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414$，$\sqrt{3}\approx 1.732$，$\sqrt{5}\approx 2.236$，$\sqrt{6}\approx 2.449$，$\sqrt{10}\approx 3.162$，$\pi\approx 3.142$

7. 對數值：$\log_{10}2\approx 0.3010$，$\log_{10}3\approx 0.4771$，$\log_{10}5\approx 0.6990$，$\log_{10}7\approx 0.8451$

110 年學科能力測驗第六次模擬考試

數學 A 考科解析

第壹部分、選擇（填）題

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14-1	14-2
(2)	(1)	(3)	(5)	(1)	(4)	(4)	(2)(3)	(2)(3)(5)	(1)(3)	(2)(4)	(1)(3)	(1)(2)(3)(4)	3	0
14-3	14-4	15-1	15-2	15-3	16-1	16-2	17-1	17-2						
0	0	5	2	5	1	3	1	8						

第貳部分、混合題或非選擇題

18. (1)(4)(5)　19. $(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4})$

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (2)　【難易度】★☆☆

【出處】第一冊 數與式

【解析】$|3x-a|\le k$

$\Rightarrow -k\le 3x-a\le k$

$\Rightarrow a-k\le 3x\le a+k$

$\Rightarrow \frac{a-k}{3}\le x\le \frac{a+k}{3}$

所以區間長度等於 $\frac{a+k}{3}-\frac{a-k}{3}=\frac{2k}{3}=8$

$\therefore k=12$ 和 a 的取值無關

故選(2)

2. (1)　【難易度】★☆☆

【出處】第四冊 A 空間中的平面與直線

【解析】此平面 E 垂直 x 軸

故法向量為 $(1,0,0)$

設此平面為 $1x+0y+0z+d=0$

$A(2,3,4)$ 代入得 $d=-2$

$\therefore$ 平面 $E: x-2=0$

即 $x=2$

故選(1)

3. (3)　【難易度】★★☆

【出處】第一冊 直線與圓

【解析】將圓方程式配方成

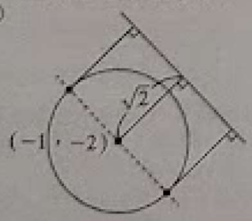
$(x+1)^2+(y+2)^2=5-k$ 得到圓心 $(-1,-2)$

圓心到直線 $x+y+1=0$ 的距離 $=\frac{|-1-2+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}$

$=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

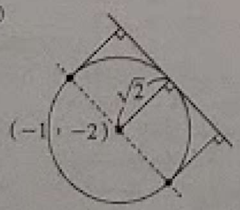
圓和直線的可能關係如下：

①



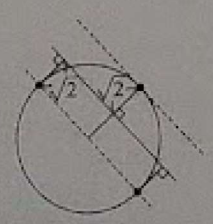
有 2 個點到直線距離 $=\sqrt{2}$

②



有 2 個點到直線距離 $=\sqrt{2}$

③



有 3 個點到直線距離 $=\sqrt{2}$

此時圓半徑 $=2\sqrt{2}$

$\therefore 5-k=(2\sqrt{2})^2$

$k=-3$

故選(3)

4. (5)　【難易度】★☆☆

【出處】第四冊 A 空間中的平面與直線

【解析】$\overrightarrow{AB}=(4,4,2)$（上午 7 點到 9 點）

$\therefore$ 鴿子每 1 小時飛行了向量 $(2,2,1)$

則鴿子飛行路線的參數式為 $\begin{cases}x=-3+2t\\ y=1+2t\\ z=t\end{cases}$，$t\ge 0$

代入 $2x+3y+5z-87=0$

得 $2(-3+2t)+3(1+2t)+5t-87=0$

解得 $t=6$

所以交點坐標為 $(9,13,6)$

z 坐標 $=6$ 滿足 $0\le z\le 7$

$\therefore$ 鴿子飛行了 6 小時後被捕獲，即下午 1 點被捕獲

故選(5)

5. (1)　【難易度】★☆☆

【出處】第二冊 排列組合與機率

【解析】甲勝出的情形為：

①甲（白），乙（黑），丙（黑）

機率 $=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

②甲（黑），乙（白），丙（白）

機率 $=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

$\therefore$ 甲勝出的機率 $=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$

故選(1)

6. (4)　【難易度】★★☆

【出處】第三冊 A 三角函數

【解析】$\because$ 圖形的最小正週期為 π

$\therefore \frac{2\pi}{\omega}=\pi\Rightarrow\omega=2$

故 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$

(1)×　振幅 $=1$

(2)×　將 $x=\frac{\pi}{3}$ 代入 $f(x)$ 得 $\sin(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3})=0$

不是最高（低）點

(3)×　將 $x=-\frac{\pi}{2}$ 代入 $f(x)$ 得 $\sin(-\pi+\frac{\pi}{3})=\frac{-\sqrt{3}}{2}$

不是最高（低）點

(4)○　由(2)知 $f(x)$ 關於點 $(\frac{\pi}{3},0)$ 對稱

(5)×　由(3)知點 $(-\frac{\pi}{2},0)$ 不是 $f(x)$ 的對稱中心

故選(4)

7. (4)　【難易度】★★☆

【出處】第二冊 排列組合與機率

【解析】① 電$_1$ 平 電$_2$

$C^6_2\times C^4_1\times 2!=120$

6 位電子媒體記者選 2 位　4 位電子媒體記者選 1 位　電$_1$電$_2$可對調

② 電 平$_1$ 平$_2$

$C^6_1\times C^4_2\times 3!=216$

6 位電子媒體記者選 1 位　4 位平面媒體記者選 2 位　這 3 位記者可對調順序

$\therefore$ 共有 $120+216=336$（種）

故選(4)

二、多選題

8. (2)(3) 【難易度】★☆☆

【出處】第二冊 數據分析

【解析】$\sigma_1=|-1|\cdot\sigma=\sigma$

$\sigma_2=\sigma$

$\sigma_3=|\frac{1}{\sigma}|\cdot\sigma=1$

$\sigma_4=|\sigma|\cdot\sigma=\sigma^2$

(1)✕　$\sigma=\sigma_1$

(2)◯

(3)◯

(4)✕　$\sigma_4=\sigma^2$，當 $0<\sigma<1$ 時，$\sigma_4<\sigma$

當 $\sigma\geq 1$ 時，$\sigma_4\geq\sigma$，所以無法判定大小

(5)✕　不一定，例如：$x_1=-2017$，$x_2=-2018$，$x_3=-2019$，$x_4=-2020$，$x_5=-2021$ 時，新數據為 0，0，0，0，0，標準差 $\sigma_5=0<\sigma$

故選(2)(3)

9. (2)(3)(5) 【難易度】★★☆

【出處】第一冊 多項式函數

【解析】(1)✕　點 $(5,-10)$ 代入 $f(x)=x^3+bx^2+74x-130$

得 $5^3+b\cdot 5^2+74\cdot 5-130=-10$，$b=-15$

(2)◯　點 (p,q) 和點 $(10-p,-20-q)$ 的中點坐標為 $(5,-10)$ 恰為對稱中心

(3)◯

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -15 & +74 & -130 & 5 \\ & +5 & -50 & +120 & \\ \hline 1 & -10 & +24 & -10 & \\ & +5 & -25 & & \\ \hline 1 & -5 & -1 & & \\ & +5 & & & \\ \hline 1 & +0 & & & \end{array}$$

故 $f(x)=(x-5)^3-(x-5)-10$

$\therefore f(x)$ 在 $x=5$ 附近的近似直線為 $y=-(x-5)-10$，斜率 $=-1$

(4)✕　將 $y=f(x)$ 向左平移 5 單位得到 $y=g(x)$ 的圖形

$\therefore$ 近似直線不同

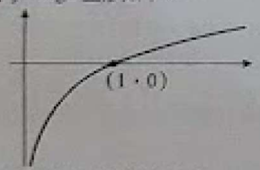
(5)◯　三次函數的圖形和 x 軸至少有一個交點，正確

故選(2)(3)(5)

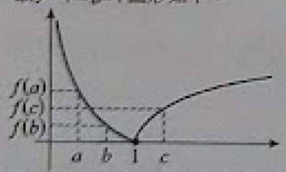
10. (1)(3) 【難易度】★★☆

【出處】第三冊 A 指數與對數函數

【解析】$y=\log x$ 圖形如下：



故 $y=|\log x|$ 圖形如下：



$\because a<b<c$ 且 $f(a)>f(c)>f(b)$

$\therefore$ 必 $a<1$ 且 $c>1$，但 $b<1$，$b=1$，$b>1$ 皆可

(1)◯　$0<a<1$

(2)✕　因 $a<b$，而 $0<a<1$，故 b 應大於 0

(3)◯　$c>1$

(4)✕　$\because a<1$，$c>1$ 且 $f(a)>f(c)$

$\therefore ac$ 必小於 1（例如：$a=\frac{1}{10}$ 時，c 必小於 10）

(5)✕　不一定，例如：$a=\frac{1}{10}$，$b=8$，$c=9$，則 $abc>1$

但 $a=\frac{1}{10}$，$b=\frac{1}{2}$，$c=9$ 時，$abc<1$

故選(1)(3)

11. (2)(4) 【難易度】★☆☆

【出處】第二冊 數據分析

【解析】(1)✕　至少有 40 %的人民年收入不少於 19600 元

$\frac{c}{19600^{0.5}}\geq 0.4$

$\therefore c\geq 0.4\times(19600)^{0.5}=0.4\times 140=56$

(2)◯　$\frac{56}{m^{0.5}}=0.2\Rightarrow m^{0.5}=280\Rightarrow m=78400$

$\therefore$ 年所得超過 78400 美金者可歸類為高所得族群

(3)✕　$\frac{56}{m^{0.5}}=0.8\Rightarrow m^{0.5}=70\Rightarrow m=4900$

$\therefore$ 年所得低於 4900 美金者可歸類為低所得族群

(4)◯　$\frac{56}{m^{0.5}}=0.5\Rightarrow m^{0.5}=112\Rightarrow m=12544>12000$

(5)✕　$4900\times 20=98000>78400$

故選(2)(4)

12. (1)(3) 【難易度】★★☆

【出處】第四冊 A 空間向量；矩陣

【解析】(1)◯　$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -5 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}=-2\neq 0$

$\therefore \vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 不共平面

(2)✕　由(1)知此平行六面體體積 $=|-2|=2$

(3)◯　$\because \vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 不共平面

$\therefore \vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ 有唯一解

(4)✕

(5)✕　$\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$

$\Rightarrow(0,-2,2)=x(1,1,2)+y(1,5,-5)+z(-1,-3,1)$

$\Rightarrow\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+5y-3z=-2 \\ 2x-5y+z=2 \end{cases}$

故選(1)(3)

13. (1)(2)(3)(4) 【難易度】★★★

【出處】第四冊 A 矩陣

【解析】(1)◯　$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

(2)◯　$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x+2y \\ y \end{bmatrix}$

原來的點 (x,y) 到 x 軸距離為 $|y|$

變換後的點 $(x+2y,y)$ 到 x 軸距離仍是 $|y|$

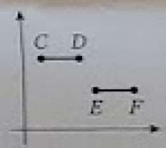
(3)◯　設 $A(a,0)$，$B(b,0)$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$

(4)◯　設 $C(c,t)$，$D(d,t)$，$E(e,s)$，$F(f,s)$

C'：$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c+2t \\ t \end{bmatrix}$

D'：$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d \\ t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d+2t \\ t \end{bmatrix}$



E'：$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e \\ s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e+2s \\ s \end{bmatrix}$

F'：$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f \\ s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f+2s \\ s \end{bmatrix}$

$\therefore \overline{CD}$ 推移後變成 $\overline{C'D'}$，水平位移 $=|2t|$

$\overline{EF}$ 推移後變成 $\overline{E'F'}$，水平位移 $=|2s|$

由條件知：$|t|>|s|$，所以 $|2t|>|2s|$

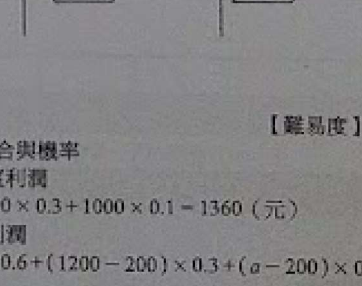
(5)✕　$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x+2y \\ y \end{bmatrix}$，即 $(x,y)\to(x+2y,y)$

①若點 (x,y) 位於 x 軸上方，則 $y>0$，則點 (x,y) 被推移後將往右邊移動（$\because y>0$）

②若點 (x,y) 位於 x 軸下方，則 $y<0$，則點 (x,y) 被推移後將往左邊移動（$\because y<0$）

故正方形推移後不一定是正方形

例如：



故選(1)(2)(3)(4)

三、選填題

14. 3000 【難易度】★☆☆

【出處】第二冊 排列組合與機率

【解析】未投保前的期望利潤

$1500\times 0.6+1200\times 0.3+1000\times 0.1=1360$（元）

投保後的期望利潤

$(1500-200)\times 0.6+(1200-200)\times 0.3+(a-200)\times 0.1$

$=0.1a+1060$

$\Rightarrow 0.1a+1060\geq 1360$

$\Rightarrow a\geq 3000$（元）

15. $5\sqrt{2}-5$ 【難易度】★★☆

【出處】第一冊 直線與圓；第三冊A 三角函數

【解析】$d(\text{原點}，L)=\dfrac{|0+0-5|}{\sqrt{(1+\cos\theta)^2+(1-\sin\theta)^2}}$

$$=\frac{5}{\sqrt{1+2\cos\theta+\cos^2\theta+1-2\sin\theta+\sin^2\theta}}$$

$$=\frac{5}{\sqrt{3-2(\sin\theta-\cos\theta)}}$$

$$=\frac{5}{\sqrt{3-2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)}}$$

$$=\frac{5}{\sqrt{3-2\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}}\ge\frac{5}{\sqrt{3-2\sqrt{2}\times(-1)}}$$

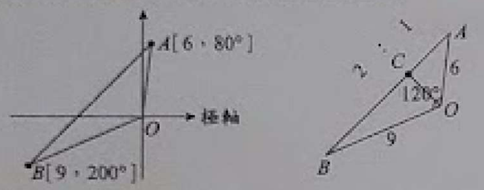
$$=\frac{5}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}=\frac{5}{\sqrt{2}+1}=5(\sqrt{2}-1)$$

$$=5\sqrt{2}-5$$

16. $\sqrt{13}$ 【難易度】★★☆

【出處】第二冊 三角比；第三冊A 平面向量

【解析】將$A[6，80°]$，$B[9，200°]$畫在極坐標系上



則 $\overrightarrow{OC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

$$|\overrightarrow{OC}|^2=\left|\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right|^2$$

$$=\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right)$$

$$=\frac{4}{9}|\overrightarrow{OA}|^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{1}{9}|\overrightarrow{OB}|^2$$

$$=\frac{4}{9}|\overrightarrow{OA}|^2+\frac{4}{9}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos120°+\frac{1}{9}|\overrightarrow{OB}|^2$$

$$=\frac{4}{9}\times6^2+\frac{4}{9}\times6\times9\times\left(\frac{-1}{2}\right)+\frac{1}{9}\times9^2$$

$$=16-12+9=13$$

$\therefore \overline{OC}=|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{13}$

17. 18 【難易度】★★★

【出處】第二冊 三角比

【解析】設 $\overline{BC}=a$，$\overline{AB}=c$

由餘弦定理知：$6^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-2ac\times\frac{3}{5}$

$$=a^2+c^2-\frac{6}{5}ac\ge2\sqrt{a^2c^2}-\frac{6}{5}ac=\frac{4}{5}ac$$

故 $ac\le45$

又 $\triangle ABC$面積$=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ac\cdot\frac{4}{5}=\frac{2}{5}ac\le\frac{2}{5}\times45=18$

$\therefore$ $\triangle ABC$面積最大值$=18$

第貳部分、混合題或非選擇題

18-19 題為題組

18. (1)(4)(5) 【難易度】★★☆

【出處】第四冊A 矩陣

【解析】(1)○ (2)× 由 $\begin{cases}a_{n+1}=-\frac{\sqrt{2}}{2}a_n-\frac{\sqrt{2}}{2}b_n\\ b_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}a_n-\frac{\sqrt{2}}{2}b_n\end{cases}$

知 $\begin{bmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\b_n\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}\cos\frac{3\pi}{4}&-\sin\frac{3\pi}{4}\\\sin\frac{3\pi}{4}&\cos\frac{3\pi}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\b_n\end{bmatrix}$$

故 $A=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\frac{3\pi}{4}&-\sin\frac{3\pi}{4}\\\sin\frac{3\pi}{4}&\cos\frac{3\pi}{4}\end{bmatrix}$

(3)× $A^n=\begin{bmatrix}\cos\frac{3\pi}{4}&-\sin\frac{3\pi}{4}\\\sin\frac{3\pi}{4}&\cos\frac{3\pi}{4}\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

即 $\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{3\pi}{4}\cdot n\right)&-\sin\left(\frac{3\pi}{4}\cdot n\right)\\\sin\left(\frac{3\pi}{4}\cdot n\right)&\cos\left(\frac{3\pi}{4}\cdot n\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，由旋轉矩陣的概念知：$n=8$

(4)○ $\det A=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=1$

(5)○ $A^{2021}=A^{252\times8+5}=A^5$ （∵由(3)知：$A^8=I$）

故選(1)(4)(5)

19. $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}，\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$ 【難易度】★★☆

【出處】第四冊A 矩陣

【解析】由 $\begin{bmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}a_n\\b_n\end{bmatrix}$

得 $\begin{bmatrix}a_{110}\\b_{110}\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}a_{109}\\b_{109}\end{bmatrix}=A^2\begin{bmatrix}a_{108}\\b_{108}\end{bmatrix}=\cdots\cdots=A^{109}\begin{bmatrix}a_1\\b_1\end{bmatrix}=A^{13\times8+5}\begin{bmatrix}a_1\\b_1\end{bmatrix}$

$$=A^5\begin{bmatrix}a_1\\b_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\frac{15\pi}{4}&-\sin\frac{15\pi}{4}\\\sin\frac{15\pi}{4}&\cos\frac{15\pi}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\b_1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\b_1\end{bmatrix}$$

故 $\begin{bmatrix}a_1\\b_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}a_{110}\\b_{110}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{bmatrix}$$

$\therefore (a_1，b_1)=\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}，\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$