臺北區 111 學年度第一學期
第二次學科能力測驗模擬考試

數學 A 考科

—作答注意事項—

考試範圍：第一～二冊、數學 A 第三～四冊

考試時間：100 分鐘

作答方式：

- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響考生成績並損及權益。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若答案格式是 $\dfrac{\text{18-1}}{\text{18-2}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答題卷上的第 18-1 列的 $\underset{\square}{3}$ 與第 18-2 列的 $\underset{\square}{8}$ 劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
18-1	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□
18-2	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□

例：若答案格式是 $\dfrac{\text{19-1}\ \text{19-2}}{50}$ ，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答題卷的第 19-1 列的 $\underset{\square}{-}$ 與第 19-2 列的 $\underset{\square}{7}$ 劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
19-1	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□
19-2	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□

選擇(填)題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\dfrac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

祝考試順利

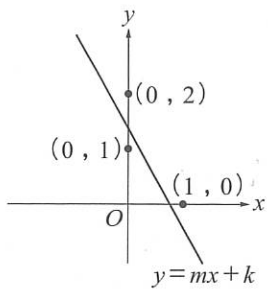
99363203-31

第壹部分、選擇（填）題（占 85 分）

一、單選題（占 25 分）

說明：第 1 題至第 5 題，每題 5 分。

1. 在坐標平面上，直線 $y=mx+k$ 的圖形如右圖所示，其中 m、k 皆為實數，則下列哪一個式子是正確的？



(1) $mk<-1$
(2) $-1<mk<0$
(3) $mk=0$
(4) $0<mk<1$
(5) $mk>1$

2. 小明、小美與小強三人進行籃球戰術訓練。訓練過程中，小明在戰術板上以三角形 ABC 中的 A 點為起點，順時針方向沿著三邊繞一圈再回到 A 點。小明先行測出 $\overrightarrow{AB}=(1,2)$，小美測出 $\overline{BC}=5$，小強測出 $\overrightarrow{CA}=(2x,-x)$ 且 x 為大於 0 的實數，請問 x 之值為何？
(1) $\frac{1}{2}$
(2) $\frac{3}{4}$
(3) 1
(4) 2
(5) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

3. 某國有一個經濟學家提出一個觀察：年收入超過 x 美元(x 為正整數)的人數占全體人數的 $\frac{c}{x^k}\left(\text{其中 } k=\frac{1}{3}\text{，}c\text{ 為一常數}\right)$。已知該國人民年收入的第 50 百分位數為 8000 美元，則該國人民年收入的第 75 百分位數約為多少美元？
(1) 2300 美元
(2) 6400 美元
(3) 12000 美元
(4) 23000 美元
(5) 64000 美元

4. 已知$f(x)=-4x^3+3x$，若$f(\sin\theta)=\sin 2\theta$且$\theta$為銳角，試問$\cos\theta$為下列哪一個選項中方程式的根？

(1) $x^2-x-1=0$

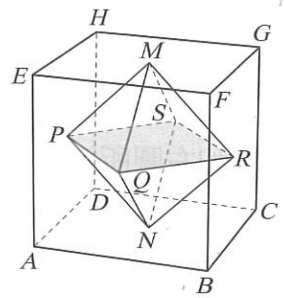
(2) $2x^2-x-1=0$

(3) $4x^2-2x-1=0$

(4) $4x^2+2x-1=0$

(5) $x^2+x+1=0$

5. 已知正立方體$ABCD-EFGH$，將其六個面之中心點P、Q、R、S、M、N相連，形成正八面體，如右圖所示，請問平面MQR與平面BCF夾角的餘弦值為多少？



(1) $\pm\dfrac{1}{3}$

(2) $\pm\dfrac{1}{2}$

(3) $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(4) $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(5) $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

二、多選題（占 25 分）

說明：第 6 題至第 10 題，每題 5 分。

6. 坐標平面上三點$P(1,0)$、$Q\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$、$R\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，且原點為$O(0,0)$，對於下列二階方陣的敘述，請選出正確的選項。

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2}\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix},\ E=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

(1) Q點經過B的變換後，變換至R點

(2)「$\triangle PQR$經過B的變換後所得圖形面積」=「$\triangle PQR$經過C的變換後所得圖形面積」

(3)若Q點經過C的變換後，變換至Q'點，則「Q點到原點的距離」=「Q'點到原點的距離」

(4)$\triangle PQR$經過A，B，C，D，E的各自變換後，其中有 3 個變換保持$\triangle PQR$原本的形狀和大小

(5)$\triangle PQR$經過E的變換後所得圖形面積為$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

7. 對於下列的敘述，請選出正確的選項。

(1)若 $0<b<1$，則 $b^{-6}>b^{-7}$

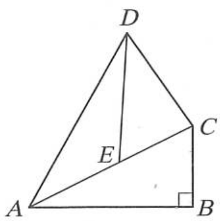
(2)若 $0<b<a$，則 $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{b}>\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{a}$

(3)若 $0<b<a$，則 $\dfrac{1}{2}\left(\log_{\frac{1}{2}}a+\log_{\frac{1}{2}}b\right)<\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{a+b}{2}$

(4) $y=2\log_4 x$ 的圖形可經平移後與 $y=\log_2 4x$ 的圖形重合

(5)方程式 $\log_2 x+1-x=0$ 恰有兩個實數解

8. 如右圖所示，$\angle B=90^\circ$。已知 $\overline{DE}=8$，$\tan\angle CDE=\dfrac{5\sqrt{3}}{11}$，$\overline{CD}=7$，$\overline{BC}=5$，$\overline{AB}=10$，請選出正確的選項。



(1) $\cos\angle CDE=\dfrac{11}{14}$

(2) $0^\circ<\angle CDE<30^\circ$

(3) $\angle BAC=30^\circ$

(4) $\overline{CE}=5$

(5) $\overline{AE}=5(\sqrt{5}-1)$

9. 已知有 A，B，C 三個袋子，各有三種色球若干個，其組成個數如下：

A 袋(綠球 4 個，藍球 5 個，白球 3 個)；
B 袋(綠球 5 個，藍球 5 個，白球 2 個)；
C 袋(綠球 6 個，藍球 3 個，白球 3 個)，

有一抽獎遊戲規則如下：

先從 A，B，C 三個袋子中取出一袋，每個袋子被取出的機會相同，再從袋中一次取兩球，每個球被取出的機會亦相同。若取出兩個綠球或兩個藍球可得 100 元，若取出兩個白球可得 150 元。

若取出綠白各一球或藍白各一球可得 200 元，若取出綠藍各一球可得 250 元。

對於下列的敘述，請選出正確的選項。

(1)在 A，B，C 三個袋子中，B 袋取出兩個白球的機率最小

(2)在 A，B，C 三個袋子中，C 袋取出異色兩球的機率最大

(3)在 A 袋中，至少獲得獎金 150 元的機率大於 $\dfrac{5}{6}$

(4)在 A 袋中，獎金期望值小於 200 元

(5)在 A，B，C 三個袋子中，從 C 袋獲得獎金的期望值為最高

10. 關於函數 $f(x)=\sqrt{3}\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin 2x$，請選出正確的選項。

(1) $f(x)$ 的最小值為 -1

(2) $f(x)$ 是一個週期函數，其週期為 π

(3) $y=f(x)$ 的圖形對稱於鉛垂線 $x=-\dfrac{\pi}{6}$

(4)在 $0\leq x<\dfrac{5\pi}{12}$ 範圍內，$y=f(x)$ 的圖形為遞減

(5)把 $y=\cos 2x$ 的圖形向左平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 單位後，可得 $y=f(x)$ 的圖形

三、選填題（占 35 分）

說明：第 11 題至第 17 題，每題 5 分。

11. 設 $a>0$，$b>0$ 且 $ab=49$，則 $\dfrac{9}{a}+\dfrac{4}{b}-1$ 的最小值為 $\dfrac{⑪\text{-}1}{⑪\text{-}2}$。(化為最簡分數)

12. 已知等比數列 $\langle a_n \rangle$ 的每一項均為實數，前 9 項的乘積為 1，且 $a_{13}=\dfrac{1}{16}$，則

$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11}=\dfrac{⑫\text{-}1\ ⑫\text{-}2}{⑫\text{-}3}$。(化為最簡分數)

13. 設 $A(a\,,1)$、$B(1\,,b)$、$P(2\,,3)$ 為坐標平面上三點，已知 $\overline{PA}$ 與 $\overline{PB}$ 互相垂直，當行列式 $\begin{vmatrix} a & 2b \\ -2b & a \end{vmatrix}$ 的值為最小值時，則此時 $\triangle PAB$ 的面積為 ⑬ 。

14. 為了有效防止 COVID-19 疾病傳播及降低染病後的重症率和死亡率，某國政府通過 A、M、B、G 四種 COVID-19 疫苗的緊急授權 (EUA)，供符合年齡的該國國人施打第 1 劑。依據該國政府規定，民眾以完成同一廠牌 COVID-19 疫苗 2 劑(基礎劑)接種為原則，若第 2 劑要實施混打的民眾，施打規定如下表一；另外，第 3 劑(追加劑)的施打規定如下表二，其中，若前兩劑疫苗混打，第 3 劑規定只可選擇已經施打過的疫苗廠牌，不可施打第三種疫苗廠牌。請問，依該國的規定，民眾若都接種完整的三劑疫苗，請問在疫苗接種紀錄卡上，最多可以看到 __14-1 14-2__ 種不同的接種結果。

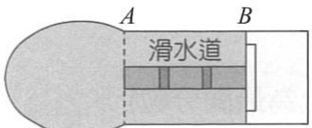
表一：第 2 劑混打的施打規定

第 1 劑廠牌	第 2 劑可接種廠牌
A	M、B、G
M	B、A、G
B	M、A、G
G	M、B

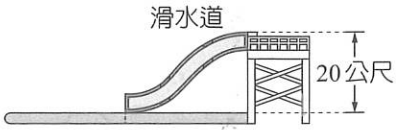
表二：第 3 劑(追加劑)的施打規定

基礎劑 (第 1 劑、第 2 劑) 同廠牌	追加劑 (第 3 劑) 可接種廠牌
M、B、G	M、B、G、A
A	M、B、G

15. 某遊樂園擬於矩形泳池 $ABCD$ 區域中，設置一滑水道，上視圖如圖(一)，上視圖中滑水道矩形區域，其長邊平行 $\overline{CD}$。此高 20 公尺的滑水道縱剖面圖形為三次函數圖形的一部分，如圖(二)所示，且滑道中點恰為三次函數圖形的對稱中心。又為安全考量，在中點附近的圖形近似於斜率為 $\frac{1}{2}$ 的直線，在水道接近水面附近的圖形近似於斜率為 $\frac{1}{4}$ 的直線。則邊長 $\overline{CD}$ 至少為 __15-1 15-2__ 公尺。(四捨五入至整數位)



圖(一)滑水道上視圖



圖(二)滑水道縱剖面圖

16. 若在空間中 $\overrightarrow{a}=(1,2,x-1)$、$\overrightarrow{b}=(-1,2,x+3)$ 與 $\overrightarrow{c}=(4,1,-x)$，三個向量皆互相垂直，則 x 為 __16-1 16-2__ 。

17. 某國海軍潛艇在兩國邊界巡邏時被魚雷打中擊沉，搜尋小隊經過分析後得出：潛艇殘骸有 20 %的機率落在本國海域，此時打撈殘骸的成功機率為 80 %，另外有 80 %的機率落在敵國海域，則打撈作業較為危險，只有 20 %的成功機率。當在本國海域打撈失敗時，會重新進行第二次打撈，若還是失敗，會重新進行第三次打撈後即停止，每次打撈成功的機率都不會改變，但在敵國海域只會打撈一次。若潛艇殘骸被打撈成功，則是在本國海域打撈起來的機率為 $\dfrac{\text{(17-1)(17-2)}}{\text{(17-3)(17-4)}}$ 。(化為最簡分數)

第貳部分、混合題或非選擇題（占 15 分）

說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

18－20 題為題組

某生決定投擲一顆公正的骰子，來模擬產生多項式的係數，假設第一次出現的點數為 a，第二次的點數為 b，第三次的點數為 c，則生成二次多項式 $f(x)=ax^2+9x+a$ 與三次多項式 $g(x)=x^3+(b+1)x^2+\left(\dfrac{c}{2}\right)x+1$，試問：

18. 若 a、b、c 為相異三數，且多項式 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的係數皆為整數，則總共可產生多少組不同的多項式 $f(x)$ 和 $g(x)$？(單選題，3 分)
(1) C^6_3
(2) P^6_3
(3) $C^3_1\times C^5_1\times C^4_1$
(4) $C^3_1\times C^5_2$
(5) $C^3_1\times P^6_2$

19. 若 $f(x)=ax^2+9x+a$ 的圖形恆在 x 軸上方，求 a 之值。(非選擇題，5 分)

20. 若 $g(x)=x^3+(b+1)x^2+\left(\dfrac{c}{2}\right)x+1$ 的對稱中心為點 (α,β)，求點 (α,β) 為整數點的機率。(非選擇題，7 分)

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{n(2a+(n-1)d)}{2}$

   首項為 a，公比為 $r\,(r\neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角比的和角公式：$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

   $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

   $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

3. $\triangle ABC$ 的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)

   $\triangle ABC$ 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

4. 一維數據 X：x_1，x_2，……，x_n，

   算術平均數 $\mu_X=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)$

   標準差 $\sigma_X=\sqrt{\dfrac{1}{n}\left[(x_1-\mu_X)^2+(x_2-\mu_X)^2+\cdots\cdots+(x_n-\mu_X)^2\right]}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\left[(x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+\cdots\cdots+x_n^{\,2})-n\mu_X^{\,2}\right]}$

5. 二維數據 (X, Y)：(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，……，(x_n, y_n)，

   相關係數 $r_{X,Y}=\dfrac{(x_1-\mu_X)(y_1-\mu_Y)+(x_2-\mu_X)(y_2-\mu_Y)+\cdots\cdots+(x_n-\mu_X)(y_n-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

   迴歸直線(最適合直線)方程式 $y-\mu_Y=r_{X,Y}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$

6. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414$，$\sqrt{3}\approx 1.732$，$\sqrt{5}\approx 2.236$，$\sqrt{6}\approx 2.449$，$\pi\approx 3.142$

7. 對數值：$\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$，$\log 5\approx 0.6990$，$\log 7\approx 0.8451$

臺北區 111 學年度第一學期
第二次學科能力測驗模擬考試

數學A考科參考答案暨詳解

99363214-31

數學 A 考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(1)	(4)	(5)	(3)	(5)	(1)(2)(5)	(4)(5)
8.	9.	10.				
(1)(4)(5)	(1)(4)	(1)(2)(4)(5)				

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (1)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：能判斷直線方程式的斜率及截距

解析：由直線及 y 軸上兩點可知

斜率 $m<\dfrac{0-1}{1-0}\Rightarrow m<-1$

與 y 軸截距 $1<k<2$，可得 $mk<-1$

故選(1)。

2. (4)

出處：第三冊〈平面向量〉

目標：平面向量的基本運算

解析：$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=(2x+1,-x+2)$

$\Rightarrow|\overrightarrow{CB}|=\overline{BC}$

$\Rightarrow\sqrt{(2x+1)^2+(-x+2)^2}=5$

$\Rightarrow 5x^2=20\Rightarrow x^2=4$

$\Rightarrow x=2$ (x 為大於 0 的實數)

故選(4)。

3. (5)

出處：第二冊〈數據分析〉、第一冊〈指數、對數〉

目標：能夠計算百分位數

解析：已知第 50 百分位數為 8000 美元

故 $\dfrac{c}{8000^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{c}{20}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow c=10$

假設該國人民年收入的第 75 百分位數為 a

則 $\dfrac{10}{a^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow a^{\frac{1}{3}}=40$

$\Rightarrow a=64000$ (美元)

故選(5)。

4. (3)

出處：第三冊〈三角函數〉、第一冊〈多項式函數〉

目標：熟悉二倍角，並應用在多項式方程式中

解析：已知 $f(\sin\theta)=\sin 2\theta$

$\Rightarrow -4\sin^3\theta+3\sin\theta=2\sin\theta\cos\theta$

$\Rightarrow -4\sin^2\theta+3=2\cos\theta$

$\Rightarrow -4(1-\cos^2\theta)+3=2\cos\theta$

$\Rightarrow 4\cos^2\theta-2\cos\theta-1=0$

$\therefore\cos\theta$ 為方程式 $4x^2-2x-1=0$ 之一根

故選(3)。

5. (5)

出處：第四冊〈空間向量〉、第四冊〈空間中的平面與直線〉

目標：能夠建立空間坐標系，透過法向量的夾角為平面的夾角，求得其餘弦值

解析：建立空間坐標系，令 D 點為原點 $(0,0,0)$，

$A(2a,0,0)$、$C(0,2a,0)$、$H(0,0,2a)$ 且 $a\neq 0$

其中 $\overrightarrow{DA}$ 為 x 軸正向，$\overrightarrow{DC}$ 為 y 軸正向，$\overrightarrow{DH}$ 為 z 軸正向

可得 $Q(2a,a,a)$、$M(a,a,2a)$、$R(a,2a,a)$、$B(2a,2a,0)$、$F(2a,2a,2a)$

$\overrightarrow{QM}\times\overrightarrow{QR}$ 可得平面 MQR 的法向量為 $\overrightarrow{n_1}=(1,1,1)$

又平面 BCF 法向量為 $\overrightarrow{n_2}=(0,1,0)$

令兩個法向量夾角為 θ，則

$$|\cos\theta|=\left|\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\times|\overrightarrow{n_2}|}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}\times 1}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

故兩平面夾角的餘弦值為 $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，故選(5)。

二、多選題

6. (1)(2)(5)

出處：第四冊〈矩陣〉

目標：熟練矩陣的計算及矩陣變換

解析：(1) ○：$\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\\ -\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$

故 Q 點經過 B 的變換後，變換至 R 點

(2) ○：$\det B=\det C=1$

故$\triangle PQR$ 經過 B、C 變換後的面積不變

(3) ╳：$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$

故 $Q'\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

則 $\overline{OQ}=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

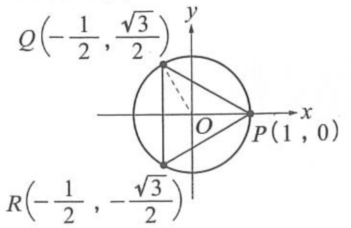
$\overline{OQ'}=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

$\Rightarrow\overline{OQ}\neq\overline{OQ'}$

(4) ╳：A 為鏡射矩陣，B 為旋轉矩陣

故經過 A 或 B 的變換後不改變圖形的形狀及大小，C 為推移矩陣，D 為伸縮矩陣，E 為一般矩陣，故經過 C、D、E 的變換後會改變圖形的形狀

(5) ○：如下圖所示



$\triangle PQR$ 面積

$=3\triangle OPQ$ 面積

$=3\left(\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin120^\circ\right)$

$=3\left(\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$\therefore\triangle PQR$ 經 E 變換後所得到的圖形面積

$=|\det E|\times\triangle PQR$ 面積

$=\left|\begin{vmatrix}4&3\\2&1\end{vmatrix}\right|\times\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，故選(1)(2)(5)。

7. (4)(5)

出處：第三冊〈指數與對數函數〉

目標：指數與對數函數的圖形

解析：(1)╳：由 $1>b>0$ 得 $\frac{1}{b}>1$

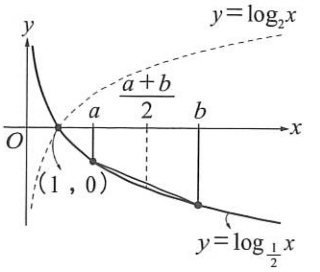
$\Rightarrow\left(\frac{1}{b}\right)^6<\left(\frac{1}{b}\right)^7\Rightarrow b^{-6}<b^{-7}$

(2)╳：由 $a>b>0$ 得 $\log_2 a>\log_2 b$

$\Rightarrow\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{a}>\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{b}$

(3)╳：$y=\log_{\frac{1}{2}}x=\dfrac{\log x}{\log\frac{1}{2}}=\dfrac{\log x}{-\log 2}=-\log_2 x$

可繪圖如下，得圖形凹口向上



故可由圖形可得知

$\frac{1}{2}\left(\log_{\frac{1}{2}}a+\log_{\frac{1}{2}}b\right)>\log_{\frac{1}{2}}\frac{a+b}{2}$

(4)〇：$y=2\log_4 x=2\times\frac{1}{2}\log_2 x=\log_2 x$

$y=\log_2 4x=\dfrac{\log 4x}{\log 2}=\dfrac{\log 4+\log x}{\log 2}$

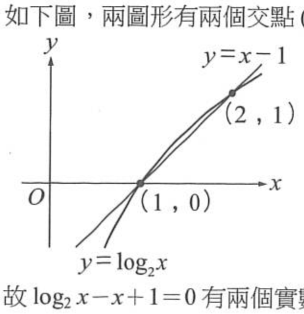
$=\dfrac{2\log 2+\log x}{\log 2}=2+\dfrac{\log x}{\log 2}=2+\log_2 x$

故 $y=2\log_4 x$ 的圖形向上平移 2 單位可得

$y=\log_2 4x$ 的圖形

(5)〇：$\begin{cases}f(x)=\log_2 x\\g(x)=x-1\end{cases}$

如下圖，兩圖形有兩個交點 $(1,0)$，$(2,1)$



故 $\log_2 x-x+1=0$ 有兩個實數解

故選(4)(5)。

8. (1)(4)(5)

出處：第二冊〈三角比〉、第三冊〈三角函數〉

目標：tan 函數的值域、三角比轉換與餘弦定理

解析：(1)〇：由 $\tan\angle CDE=\frac{5\sqrt{3}}{11}$ 得 $\cos\angle CDE=\frac{11}{14}$

(2)╳：$\tan\angle CDE=\frac{5\sqrt{3}}{11}>\frac{\sqrt{3}}{3}$

所以 $\angle CDE>30^\circ$

(3)╳：$\overline{BC}=5$，$\overline{AB}=10$，$\overline{AC}=5\sqrt{5}$

$\tan\angle BAC=\frac{1}{2}\neq\frac{\sqrt{3}}{3}$

所以 $\angle BAC\neq30^\circ$

(4)〇：由餘弦定理可得

$\overline{CE}^2=7^2+8^2-2\cdot7\cdot8\cdot\cos\angle CDE=25$

所以 $\overline{CE}=5$

(5)〇：承(3)、(4)，$\overline{AE}=\overline{AC}-\overline{CE}=5(\sqrt{5}-1)$

故選(1)(4)(5)。

9. (1)(4)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：能夠計算期望值及機率

解析：(1)〇：$P(A$ 袋取出 2 白球$)=\dfrac{C_2^3}{C_2^{12}}$

$P(B$ 袋取出 2 白球$)=\dfrac{C_2^2}{C_2^{12}}$

$P(C$ 袋取出 2 白球$)=\dfrac{C_2^3}{C_2^{12}}$

因為分母相同，故比較分子即可

因此 $P(B$ 袋取出 2 白球$)$最小

(2)╳：$P(A$ 袋取出異色 2 球$)$

$=\dfrac{C_1^4C_1^5+C_1^5C_1^3+C_1^4C_1^3}{C_2^{12}}=\dfrac{47}{C_2^{12}}$

$P(B$ 袋取出異色 2 球$)$

$=\dfrac{C_1^5C_1^5+C_1^5C_1^2+C_1^5C_1^2}{C_2^{12}}=\dfrac{45}{C_2^{12}}$

$P(C$ 袋取出異色 2 球$)$

$=\dfrac{C_1^6C_1^3+C_1^3C_1^3+C_1^6C_1^3}{C_2^{12}}=\dfrac{45}{C_2^{12}}$

因為分母相同，故比較分子即可

因此 $P(A$ 袋取出異色 2 球$)$最大

(3)╳：$P(A$ 袋至少獲得 150 元$)$

$=1-\dfrac{C_2^4+C_2^5}{C_2^{12}}=1-\dfrac{16}{66}=\dfrac{50}{66}<\dfrac{55}{66}=\dfrac{5}{6}$

(4)〇：A 袋中，獎金期望值

$=100\times\dfrac{C_2^4+C_2^5}{C_2^{12}}+150\times\dfrac{C_2^3}{C_2^{12}}$

$+200\times\dfrac{C_1^4C_1^3+C_1^5C_1^3}{C_2^{12}}+250\times\dfrac{C_1^4C_1^5}{C_2^{12}}$

$=\dfrac{1600+450+5400+5000}{C_2^{12}}$

$=\dfrac{12450}{66}<200$

(5) ╳：C 袋中，獎金期望值

$$=100\times\frac{C^{6}_{2}+C^{3}_{2}}{C^{12}_{2}}+150\times\frac{C^{3}_{2}}{C^{12}_{2}}$$

$$+200\times\frac{C^{6}_{1}C^{3}_{1}+C^{3}_{1}C^{3}_{1}}{C^{12}_{2}}+250\times\frac{C^{6}_{1}C^{3}_{1}}{C^{12}_{2}}=\frac{12150}{66}$$

由(4)可知，從 C 袋中獲得的獎金期望值不是最高的

故選(1)(4)。

10. (1)(2)(4)(5)

出處：第三冊〈三角函數〉

目標：正餘弦函數的疊合、三角函數的圖形

解析：$f(x)=\sqrt{3}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin 2x$

$$=\sqrt{3}\left(\cos 2x\cos\frac{\pi}{3}-\sin 2x\sin\frac{\pi}{3}\right)+\sin 2x$$

$$=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)+\sin 2x$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x=\cos 2x\cos\frac{\pi}{6}-\sin 2x\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$$

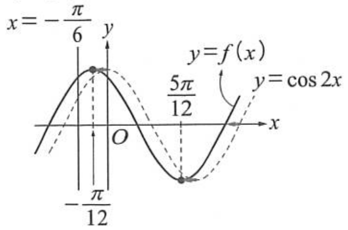
(1) ○：最小值為 -1

(2) ○：週期為 $\frac{2\pi}{2}=\pi$

(3) ╳：如下圖所示，$y=f(x)$ 的圖形不對稱於 $x=-\frac{\pi}{6}$

(4) ○：如下圖所示，可知在 $0\le x<\frac{5\pi}{12}$ 範圍內，$y=f(x)$ 的圖形為遞減

(5) ○：將 $y=\cos 2x$ 的圖形向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 單位，可得 $y=f(x)$ 的圖形，如下圖所示



故選(1)(2)(4)(5)。

三、選填題

11. $\frac{5}{7}$

出處：第一冊〈數與式〉

目標：熟悉算幾不等式之運用

解析：$\frac{9}{a}+\frac{4}{b}\ge 2\sqrt{\frac{9}{a}\times\frac{4}{b}}=2\sqrt{\frac{36}{ab}}=2\sqrt{\frac{36}{49}}=2\times\frac{6}{7}=\frac{12}{7}$

$\Rightarrow\frac{9}{a}+\frac{4}{b}-1\ge\frac{12}{7}-1=\frac{5}{7}$

等號成立於 $\frac{9}{a}=\frac{4}{b}\Rightarrow a=\frac{9b}{4}$

代入 $ab=49$，解得 $b=\pm\frac{14}{3}$（負不合）

即當 $a=\frac{21}{2}$，$b=\frac{14}{3}$ 時，等號成立

可得所求之最小值為 $\frac{5}{7}$。

12. $\frac{63}{8}$

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：能夠利用題目所提供條件求出級數和

解析：$a_1\times a_2\times a_3\times a_4\times a_5\times a_6\times a_7\times a_8\times a_9=1$

$\Rightarrow a_1^{\,9}r^{36}=(a_1r^4)^9=1$

$a_5=a_1r^4=1$ 且 $a_{13}=\frac{1}{16}$

$\Rightarrow r^2=\frac{1}{2}$，$a_1=4$

故 $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11}$

$=a_1(1+r^2+r^4+r^6+r^8+r^{10})$

$=\frac{a_1\times(1-r^{12})}{1-r^2}=\frac{63}{8}$。

13. 2

出處：第三冊〈平面向量〉

目標：能求極值與行列式

解析：已知 $\overline{PA}\perp\overline{PB}\Rightarrow\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$

$\Rightarrow(a-2,-2)\cdot(-1,b-3)=0\Rightarrow a+2b=8$

當 $\begin{vmatrix} a & 2b \\ -2b & a \end{vmatrix}=a^2+4b^2$ 有最小值時

〔解法一〕

由柯西不等式可知 $(a^2+(2b)^2)(1^2+1^2)\ge(a+2b)^2$

即最小值成立時，$\frac{a}{1}=\frac{2b}{1}\Rightarrow a=4$，$b=2$

故△PAB 的面積 $=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a-2 & -1 \\ -2 & b-3 \end{vmatrix}\right|=2$。

〔解法二〕

$a=8-2b$ 代入

$a^2+4b^2=(8-2b)^2+4b^2=8(b-2)^2+32$

即當 $b=2$ 時，有最小值 32，此時 $a=4$

故△PAB 的面積 $=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a-2 & -1 \\ -2 & b-3 \end{vmatrix}\right|=2$。

14. 37

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：能使用樹狀圖等計數原理

解析：畫樹狀圖如下

第1劑　第2劑　第3劑

- A
  - A — 3種
  - M — 2種
  - B — 2種
  - G — 2種
- M
  - A — 2種
  - M — 4種
  - B — 2種
  - G — 2種
- B
  - A — 2種
  - M — 2種
  - B — 4種
  - G — 2種
- G
  - M — 2種
  - B — 2種
  - G — 4種

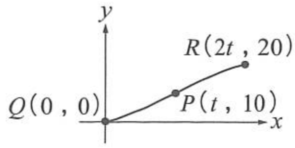
加總可知共有 37 種不同的接種結果。

15. 48

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：能夠瞭解並計算三次函數對稱中心及局部特徵之間關係

解析：設滑水道兩端點分別為 $Q(0,0)$，$R(2t,20)$，中點為 $P(t,10)$



$f(x)=a(x-t)^3+b(x-t)+10$

依題意可得 $b=\dfrac{1}{2}$ 且

$f(x)=ax^3-3atx^2+\left(3at^2+\dfrac{1}{2}\right)x-at^3-\dfrac{1}{2}t+10$

因為過 $Q(0,0)$ 且在 Q 點附近的圖形近似斜率為 $\dfrac{1}{4}$ 的直線，代入函數 $f(x)$ 可得

$$\begin{cases} f(0)=-at^3-\dfrac{1}{2}t+10=0 \\ 3at^2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

解得 $t=24$

故滑水道水平分量長為 48 公尺

依題意滑水道設置在矩形 $ABCD$ 內

故邊長 $\overline{CD}$ 至少為 48 公尺。

16. -2

出處：第四冊〈空間向量〉

目標：利用向量垂直內積為 0 的性質

解析：〔解法一〕

$$因為\begin{cases} \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0 \\ \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=0 \\ \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}=0 \end{cases}$$

$$所以\begin{cases} -1+4+(x^2+2x-3)=0 \\ -4+2+(-x^2-3x)=0 \\ 4+2+(-x^2+x)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x^2+2x=0 \\ x^2+3x+2=0 \\ x^2-x-6=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x=-2$。

〔解法二〕

利用 $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\,//\,\overrightarrow{c}$

$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=(8,-2x-2,4)$

$\Rightarrow \dfrac{8}{4}=\dfrac{-2x-2}{1}=\dfrac{4}{-x}$

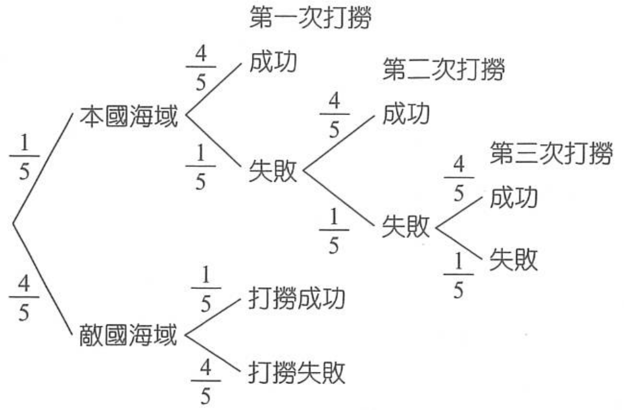
$\Rightarrow x=-2$。

17. $\dfrac{31}{56}$

出處：第四冊〈機率〉

目標：了解貝氏定理及其使用方式

解析：依題意作樹狀圖如下



P(在本國海域 | 打撈成功)

$=\dfrac{在本國第一次成功+在本國第二次才成功+在本國第三次才成功}{在本國第一次成功+在本國第二次才成功+在本國第三次才成功+在敵國成功}$

$=\dfrac{\left(\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}\right)}{\left(\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}\right)}$

$=\dfrac{31}{56}$。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. (3)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：能夠利用排列組合，計算數量

解析：因為多項式 $g(x)$ 的係數皆為整數 $\Rightarrow \dfrac{c}{2}$ 必為整數

$\Rightarrow c$ 只能為 2，4，6

所以由 $c\rightarrow a\rightarrow b$ 可能有 $C^3_1\times C^5_1\times C^4_1$ 種選擇

故選(3)。

19. 5 或 6

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：能夠判斷多項式圖形與判別式之間的關係

解析：判別式為 $81-4a^2<0$

$\Rightarrow a^2>\dfrac{81}{4}$

$\Rightarrow a>\dfrac{9}{2}$ 或 $a<-\dfrac{9}{2}\Rightarrow a=5$ 或 6。

◎評分原則

判別式為 $81-4a^2<0$
$\Rightarrow a^2>\dfrac{81}{4}$ (2 分)
$\Rightarrow a>\dfrac{9}{2}$ 或 $a<-\dfrac{9}{2}$ (2 分)
$\Rightarrow a=5$ 或 6。 (1 分)

20. $\dfrac{1}{4}$

出處：第二冊〈排列組合與機率〉、第一冊〈多項式函數〉

目標：能計算機率及熟悉三次多項式的圖形特徵

解析：設 $P(A)$ 為點 (α,β) 為整數點的機率

$\alpha=-\dfrac{b+1}{3}$ 為整數 $\therefore b=2$ 或 $b=5$

①若 $b=2$，則 $\alpha=-1$，

$\beta=f(\alpha)=-1+3-\dfrac{c}{2}+1$ 為整數

$\therefore c=2，4，6$

②若 $b=5$，則 $\alpha=-2$，

$\beta=f(\alpha)=-8+24-c+1$ 為整數

$\therefore c=1$，2，3，4，5，6

故 $P(A)=\dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}$。

◎**評分原則**

設 $P(A)$ 為點 (α,β) 為整數點的機率

$\alpha=-\dfrac{b+1}{3}$ 為整數　$\therefore b=2$ 或 $b=5$　(2 分)

①若 $b=2$，則 $\alpha=-1$，

$\beta=f(\alpha)=-1+3-\dfrac{c}{2}+1$ 為整數

$\therefore c=2$，4，6　(2 分)

②若 $b=5$，則 $\alpha=-2$，

$\beta=f(\alpha)=-8+24-c+1$ 為整數

$\therefore c=1$，2，3，4，5，6　(2 分)

故 $P(A)=\dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}$。　(1 分)