臺北區 111 學年度第一學期
第二次學科能力測驗模擬考試

數學 B 考科

—作答注意事項—

考試範圍：第一～二冊、數B第三～四冊

考試時間：100 分鐘

作答方式：

- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績並損及權益。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若答案格式是 $\dfrac{18\text{-}1}{18\text{-}2}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答題卷上的第 18-1 列的 $\overset{3}{\square}$ 與第 18-2 列的 $\overset{8}{\square}$ 劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
18-1	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□
18-2	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□

例：若答案格式是 $\dfrac{19\text{-}1\ 19\text{-}2}{50}$ ，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答題卷的第 19-1 列的 $\overset{-}{\square}$ 與第 19-2 列的 $\overset{7}{\square}$ 劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
19-1	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□
19-2	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□

選擇(填)題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\dfrac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

祝考試順利

99363218-31

第壹部分、選擇（填）題（占 85 分）

一、單選題（占 35 分）

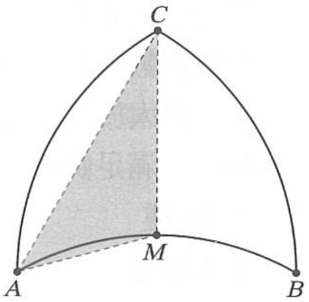
說明：第 1 題至第 7 題，每題 5 分。

1. 放射性物質的半衰期 T (單位：小時)定義為每經過時間 T 小時，該物質的質量會衰退成原來的一半。已知某放射性物質在經過 100 小時後，該物質的質量會衰退成原來的 $\frac{1}{8}$，則此物質半衰期 T 最接近下列哪一個選項？
(1) 25 小時
(2) 33 小時
(3) 60 小時
(4) 300 小時
(5) 400 小時

2. 設等差數列 $\langle a_n \rangle$ 之首項 $a_1=11$，公差 d 為正整數，且數列的前 50 項滿足不等式
$$\frac{1}{a_1}<\frac{2}{a_2}<\cdots\cdots<\frac{k}{a_k}<\cdots\cdots<\frac{49}{a_{49}}<\frac{50}{a_{50}}<\frac{1}{2},$$
試問有多少個 d 滿足此條件？
(1) 6 個
(2) 7 個
(3) 8 個
(4) 9 個
(5) 10 個

3. 有兩組供機器運作的配件 A、B，其單獨發生故障的機率分別為 0.1、0.3，故障情形互不影響；當配件 A 或配件 B 發生故障時，此機器即無法運作。此機器無法運作的機率為下列哪一個選項？
(1) 0.03
(2) 0.3
(3) 0.4
(4) 0.5
(5) 0.6

4. 右圖為由平面上三段相同半徑、圓心角為 60° 的弧線($\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{CA}$)所組成，其中點 A、B 分別為 $\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{AC}$ 的圓心，點 M 為 $\overset{\frown}{AB}$ 的中點，則在$\triangle AMC$ 中，邊長比值 $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{CM}}$ 是下列哪一個選項？



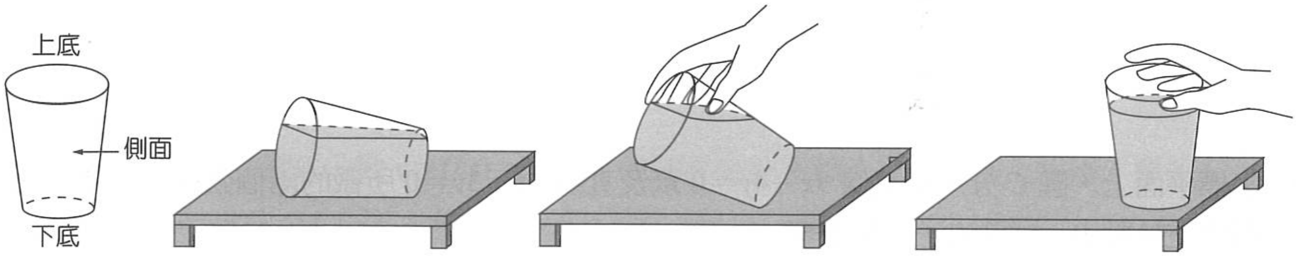
(1) $\dfrac{1}{3}$　(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　(3) $\dfrac{1}{2}$　(4) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(5) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

5. 請問下列哪一個選項中的矩陣乘積等於 $\begin{bmatrix} 5b & 6a \\ 5d & 6c \end{bmatrix}$？

(1) $\begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$　(2) $[5 \quad 6]\begin{bmatrix} b & d \\ a & c \end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$　(5) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

6. 假設某飲料杯封口後為圓錐臺的形狀(即上底與下底皆為圓形，下底半徑略小於上底半徑，且過兩圓心的直線同時垂直上底圓與下底圓)，如圖㈠所示。今將該飲料杯裝八分滿的水，在封口後側置於平坦的水平桌面上，如圖㈡所示。用手拿著飲料杯上底部分扶正的過程中如圖㈢所示，水面與飲料杯側面的截痕為某些圖形的一部分，其變化順序為下列哪一個選項？



圖㈠　圖㈡　圖㈢

(注意：假設飲料杯移動過程中，水面皆與桌面(水平面)平行。不考慮與兩底面的截痕，只考慮飲料杯側面的截痕)

(1)拋物線→橢圓→圓　(2)拋物線→雙曲線→圓　(3)拋物線→雙曲線→橢圓
(4)雙曲線→橢圓→圓　(5)雙曲線→拋物線→橢圓

7. 老師準備 8 顆球，分別是 1 到 8 號球各一顆，甲、乙兩位同學各拿 2 顆相異號碼球排成 2 位數整數(兩人共 4 個號碼皆不同)。若滿足甲的十位數字大於乙的十位數字，且甲的個位數字也大於乙的個位數字(例如：甲排出 68、乙排出 35，滿足條件；但甲排出 65、乙排出 38，不滿足條件)。則兩位同學能排出滿足條件的方法數共有多少種？
(1) 35 種
(2) 140 種
(3) 210 種
(4) 420 種
(5) 840 種

二、多選題（占 25 分）

說明：第 8 題至第 12 題，每題 5 分。

8. 下列選項中的絕對值方程式，哪些恰有兩個相異實數解？
(1) $|x|+2x=111$
(2) $|x|-2x=111$
(3) $|x|+x=0$
(4) $|x|+\dfrac{x}{2}=111$
(5) $|x|-\dfrac{x}{2}=111$

9. 坐標平面上，圓 C 分別與直線 $3x-4y=0$ 以及直線 $4x-3y=0$ 所截的兩個弦長皆為 4，且兩弦交於點 P。試選出正確的選項。
(1) P 點坐標為 $(0,0)$
(2)圓心在直線 $x-y=0$ 上
(3)兩直線夾角正弦值為 $\dfrac{7}{25}$
(4)圓 C 面積的最大值為 $\dfrac{200\pi}{49}$
(5)圓 C 面積的最小值為 4π

10. 甲、乙兩班討論舉辦班際籃球友誼賽的事項，調查結果兩班同學中有 80 %贊成舉辦，在確定舉辦比賽後，接著討論是否男女分組比賽，調查結果有 60 %贊成男女分組比賽(調查結果只有同意與不同意兩個選項，且所有同學皆表達意見，沒有廢票)。現在由兩班同學中隨機抽出一位。請選出正確的選項。

(1)若此同學贊成舉辦比賽，一定也贊成分組

(2)此同學贊成舉辦比賽的機率為 0.8

(3)此同學贊成舉辦比賽，且贊成分組的機率至多為 0.6

(4)此同學贊成舉辦比賽，且贊成分組的機率至少為 0.48

(5)此同學不贊成舉辦比賽，但是贊成分組比賽的機率至多為 0.2

11. 在球心為 O 的地球儀上，已知 A 點的經緯度為北緯 30 度，東經 10 度；B 點的經緯度為南緯 20 度，東經 10 度；C 點的經緯度為北緯 30 度，東經 60 度。今在地球儀表面上，質點 P 沿著經線或緯線移動，下列關於 P 點移動過程之描述，試選出正確的選項。

(1)若 P 從 A 點沿著東經 10 度經線向南移動至 B 點，則 $\overleftrightarrow{OP}$ 與通過南北極直線的銳夾角不變

(2)若 P 從 A 點沿著北緯 30 度緯線向東移動至 C 點，則 $\overleftrightarrow{OP}$ 與通過南北極直線的銳夾角不變

(3)若 P 從 A 點沿著東經 10 度經線向南移動至 B 點，則 P、C 兩點間的距離不變

(4)若 P 從 A 點沿著北緯 30 度緯線向東移動至 C 點，則 P、B 兩點間的距離不變

(5)若 P 從 A 點沿著東經 10 度經線向南移動至 B 點，則 A、P、B 三點不會在同一個大圓上

12. 將平面上三次多項式函數 $y=f(x)=x^3-9x$ 的圖形向左平移 3 單位再向上平移 4 單位，可得到新函數 $y=g(x)=(x+3)^3-9(x+3)+4$。若點 $P(r\,,s)$ 在函數 $y=f(x)$ 的圖形上，則下列哪些選項的點在 $y=g(x)$ 的圖形上？

(1) $(-r\,,-s)$

(2) $(r-3\,,s+4)$

(3) $(r+3\,,s-4)$

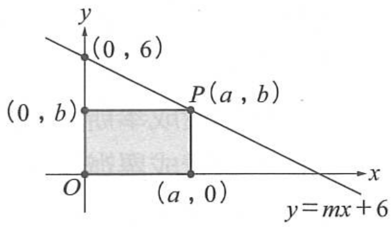
(4) $(-r-3\,,-s+4)$

(5) $(-r+3\,,-s-4)$

三、選填題（占 25 分）

說明：第 13 題至第 17 題，每題 5 分。

13. 平面上有一直線 L：$y=mx+6$，其中斜率 $m<0$，又直線 L 上的動點 $P(a,b)$ 在第一象限。若依序以點 $(0,0)$、$(a,0)$、(a,b)、$(0,b)$ 為頂點的矩形其面積的最大值為 36，則直線 L 的斜率為 $\dfrac{\text{13-1}\ \text{13-2}}{\text{13-3}}$。(化為最簡分數)



14. 將坐標平面上的函數 Γ_1：$y=\log x$ 圖形沿著 y 軸向上平移 1 單位得圖形 Γ_2。且點 $P(a,b)$ 在 Γ_1 上，水平線 $y=b$ 與圖形 Γ_2 交於點 $Q(c,b)$，鉛垂線 $x=a$ 與圖形 Γ_2 交於點 $R(a,b+1)$。若 $\overline{QR}=\dfrac{13}{5}$，則 $a=\dfrac{\text{14-1}}{\text{14-2}}$。(化為最簡分數)

15. 有三顆特製的骰子 A、B、C，其六個面點數如下：

A 骰子：3，3，3，3，3，6
B 骰子：2，2，2，5，5，5
C 骰子：1，4，4，4，4，4

假設投擲這 3 顆骰子每面出現的機率都相等。甲、乙兩人從這 3 顆骰子各選一顆進行遊戲。已知甲先選擇 A 骰子，接著乙隨機$\left(\text{機率皆為 }\dfrac{1}{2}\right)$從 B、C 中選擇一顆，兩人丟擲自己選的骰子一次並比較點數大小。在已知乙丟擲的點數大於甲的點數條件下，乙選到 C 骰子的條件機率為 $\dfrac{\text{15-1}}{\text{15-2}}$。(化為最簡分數)

16. 已知二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ 滿足 $A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 與 $A\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$，則數對 $(a,b)=$ (16-1 , 16-2 16-3)。

17. 若三次函數 $f(x)=2x^3+6x^2+cx+d$ 圖形在 $x=-1$ 附近的一次近似為 $y=-3x-5$，則 $y=(x+1)\cdot f(x)$ 圖形在 $x=-1$ 附近的一次近似為 $y=$ 17-1 17-2 $x-$ 17-3 。

第貳部分、混合題或非選擇題（占 15 分）

說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

18-20 題為題組

平面上的相異三點 A、B、C 分別位於直線 $2x+y=0$、$2x-y=0$、$x+y=0$ 上，且原點 $O(0\,,0)$ 為$\triangle ABC$ 的垂心。已知點 A 的坐標為 $(t\,,-2t)$，其中 $t\neq 0$。試回答下列各題：

18. 點 B 坐標為下列哪一個選項？(單選題，4 分)

(1) $(t\,,2t)$

(2) $(-t\,,-2t)$

(3) $(-2t\,,-4t)$

(4) $(3t\,,6t)$

(5) $(-3t\,,-6t)$

19. 在$\triangle ABC$ 中，試問 $\cos A$ 的值最接近下列哪一個選項？(單選題，5 分)

(1) $-\frac{1}{2}$

(2) $-\frac{1}{3}$

(3) 0

(4) $\frac{1}{3}$

(5) $\frac{1}{2}$

20. 若向量線性組合 $\overrightarrow{OA}=\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}$，則數對 $(\beta\,,\gamma)$ 為何？(非選擇題，6 分)

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{n(2a+(n-1)d)}{2}$

   首項為 a，公比為 $r\,(r\neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. $\triangle ABC$ 的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ (R 為$\triangle ABC$ 外接圓半徑)

   $\triangle ABC$ 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

3. 一維數據 X：x_1，x_2，……，x_n，

   算術平均數 $\mu_X=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)$

   標準差 $\sigma_X=\sqrt{\dfrac{1}{n}[(x_1-\mu_X)^2+(x_2-\mu_X)^2+\cdots\cdots+(x_n-\mu_X)^2]}=\sqrt{\dfrac{1}{n}[(x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+\cdots\cdots+x_n^{\,2})-n\mu_X^{\,2}]}$

4. 二維數據 (X,Y)：(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，……，(x_n,y_n)，

   相關係數 $r_{X,Y}=\dfrac{(x_1-\mu_X)(y_1-\mu_Y)+(x_2-\mu_X)(y_2-\mu_Y)+\cdots\cdots+(x_n-\mu_X)(y_n-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

   迴歸直線(最適合直線)方程式 $y-\mu_Y=r_{X,Y}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$

5. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414$，$\sqrt{3}\approx 1.732$，$\sqrt{5}\approx 2.236$，$\sqrt{6}\approx 2.449$，$\sqrt{7}\approx 2.646$，$\sqrt{10}\approx 3.162$，
   $\pi\approx 3.142$

6. 對數值：$\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$，$\log 5\approx 0.6990$，$\log 7\approx 0.8451$

臺北區 111 學年度第一學期
第二次學科能力測驗模擬考試

數學B考科參考答案暨詳解

99363219-31

數學 B 考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(2)	(4)	(3)	(5)	(4)	(1)	(4)
8.	9.	10.	11.	12.		
(4)(5)	(1)(3)(5)	(2)(3)(5)	(2)	(2)(4)		

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (2)

出處：第一冊〈指數、對數〉、第三冊〈按比例成長模型〉

目標：對數運算

解析：根據半衰期定義 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{100}{T}}=\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow \frac{100}{T}=3$

或取對數後 $\frac{100}{T}\log\frac{1}{2}=\log\frac{1}{8}$

$\Rightarrow \frac{T}{100}=\frac{\log\frac{1}{2}}{\log\frac{1}{8}}=\frac{\log 2}{\log 8}=\frac{1}{3}$

故 $T=\frac{100}{3}\approx 33$ 小時

故選(2)。

2. (4)

出處：第一冊〈多項式函數〉、第二冊〈數列與級數〉

目標：等差數列第 n 項解公差 d 的一次不等式

解析：數列需同時滿足條件

① $\frac{50}{a_{50}}<\frac{1}{2}\Rightarrow a_{50}=11+49d>100$

$\Rightarrow d>\frac{89}{49}\approx 1.82$

② $\frac{k}{a_k}<\frac{k+1}{a_{k+1}}$ (其中 $k=1$，2，……，49)

將 $a_k=11+(k-1)d$，$a_{k+1}=11+kd$ 代入上式可得

$11-d>0$

由①、②可得 $d=2$，3，……，10，共 9 個整數解

故選(4)。

3. (3)

出處：第四冊〈機率〉

目標：獨立事件機率計算

解析：當兩配件皆正常時，機器才可以正常運作

其機率為 $(1-0.1)\times(1-0.3)=0.63$

所以機器無法運作的機率為 $1-0.63=0.37$

選項中最接近的數值為 0.4

故選(3)。

4. (5)

出處：第二冊〈三角比〉、第三冊〈正弦函數與週期性現象〉

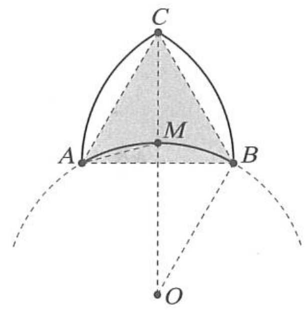
目標：弧長對應圓周角計算、正弦定理

解析：因為 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$

所以 $\angle BAC=\angle ACB=60^\circ$

將 $\overset{\frown}{AB}$ 的圓畫出，假設圓心為 O

如下圖所示



$\angle ACM=\frac{1}{2}\angle ACB$

$=30^\circ$

圓周角 $\angle MAB=\frac{1}{2}\angle MOB=\frac{1}{2}\times 30^\circ=15^\circ$

所以 $\angle MAC=\angle BAC-\angle MAB$

$=45^\circ$

由正弦定理可推得 $\frac{\overline{AM}}{\overline{CM}}=\frac{\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

故選(5)。

5. (4)

出處：第四冊〈矩陣與資料表〉

目標：矩陣乘法運算

解析：(1)╳：$\begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5b+6a \\ 5d+6c \end{bmatrix}$

(2)╳：$[5\quad 6]\begin{bmatrix} b & d \\ a & c \end{bmatrix}=[5b+6a\quad 5d+6c]$

(3)╳：$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5a+6c & 5b+6d \\ 5a+6c & 5b+6d \end{bmatrix}$

(4)○：$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5b & 6a \\ 5d & 6c \end{bmatrix}$

(5)╳：$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6b & 5a \\ 6d & 5c \end{bmatrix}$

故選(4)。

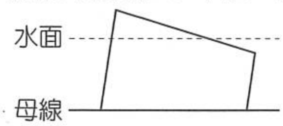
6. (1)

出處：第四冊〈圓錐曲線的認識與應用〉

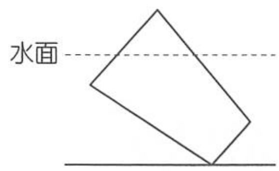
目標：圓錐曲線截痕判斷

解析：過程中分 3 個階段：

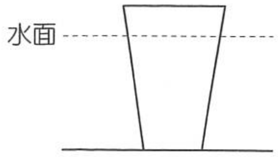
①側置於平坦的水平桌面上時(杯子側面平放在桌面)，水面會與側面平行，即水面與某條母線平行，所以水面的截痕為拋物線的一部分，如下圖所示



②杯子上底往上抬高時，水往下底匯聚，平面只與圓錐面一側相交，所以水面的截痕為橢圓的一部分，如下圖所示



③杯子下底與桌面重合時，水面會與錐體中心軸垂直，所以水面的截痕為圓，如下圖所示



故選(1)。

7. (4)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：取球的排列組合問題

解析：因為兩人所選的 4 顆球號皆不同，可以將取球過程轉換為：
先從 8 顆球選 2 顆球，
號碼大的為甲的十位數字，
號碼小的為乙的十位數字；
再從剩餘的 6 顆球選 2 顆球，
號碼大的為甲的個位數字，
號碼小的為乙的個位數字；
所以方法數共有 $C^8_2C^6_2=28\times15=420$ 種
故選(4)。

二、多選題

8. (4)(5)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：分段討論變數 x 的範圍將絕對值方程式化為一元一次方程式求解

解析：分段討論 $|x|+kx=111$

$$\Rightarrow\begin{cases}(k+1)x=111，x\ge 0\\(k-1)x=111，x<0\end{cases}$$

所以 $x=\dfrac{111}{k+1}$ (其中 $k>-1$) 或 $x=\dfrac{111}{k-1}$ (其中 $k<1$)

故當 $-1<k<1$ 時，方程式有兩相異實數解

(1) ╳：只有唯一解 $x=37$

(2) ╳：只有唯一解 $x=-37$

(3) ╳：方程式的解為 $x\le 0$，有無限多解

(4) ○：$x=74$ 或 -222

(5) ○：$x=-74$ 或 222

故選(4)(5)。

9. (1)(3)(5)

出處：第一冊〈直線與圓〉、第三冊〈平面向量與應用〉

目標：點到直線距離

解析：(1) ○：兩弦交點等於兩直線交點 P，即為 $(0,0)$

(2) ╳：因為圓心到兩直線距離相等，所以圓心在兩直線之交角的角平分線 $x\pm y=0$ 上

(3) ○：兩直線法向量 $(3,-4)$、$(4,-3)$ 的夾角 (θ) 正弦值為 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{(3,-4)\cdot(4,-3)}{5\times5}\right)^2}$$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{24}{25}\right)^2}=\frac{7}{25}$$

(4) ╳：因為圓心在兩直線的角平分線 $x\pm y=0$ 上，所以圓心坐標可能為 $O_1(a,a)$ 或 $O_2(a,-a)$

①當圓心為 $O_1(a,a)$ 時，圓心到直線 $4x-3y=0$ 的距離(弦心距)為 $\left|\dfrac{a}{5}\right|$，

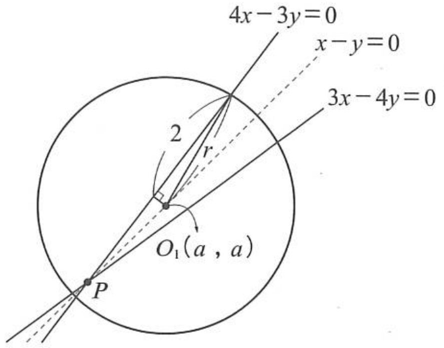
因為半弦長為 2，所以圓半徑 $r=\sqrt{4+\dfrac{a^2}{25}}$，

且因兩弦交點在圓內或圓上，

所以 $\overline{O_1P}=\sqrt{2a^2}\le r=\sqrt{4+\dfrac{a^2}{25}}$

$\Rightarrow a^2\le\dfrac{100}{49}$

$\Rightarrow r^2=4+\dfrac{a^2}{25}\le\dfrac{200}{49}$



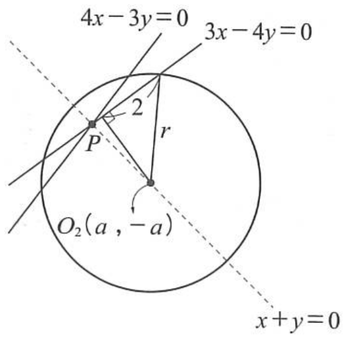
②當圓心為 $O_2(a,-a)$ 時，圓心到直線 $4x-3y=0$ 的距離(弦心距)為 $\left|\dfrac{7a}{5}\right|$，

因為半弦長為 2，所以圓半徑 $r=\sqrt{4+\dfrac{49a^2}{25}}$，

且因兩弦交點在圓內或圓上，

所以 $\overline{O_2P}=\sqrt{2a^2}\le r=\sqrt{4+\dfrac{49a^2}{25}}$

$\Rightarrow a^2\le 100\Rightarrow r^2=4+\dfrac{49a^2}{25}\le 200$



由①、②得，當圓心為 $(10,-10)$ 或 $(-10,10)$ 時，圓面積有最大值為 200π

(5) ○：當弦為直徑時，即圓心為 $P(0,0)$，半徑有最小值 2，圓面積最小值為 4π

故選(1)(3)(5)。

10. (2)(3)(5)

出處：第四冊〈機率〉

目標：利用取捨原理估計機率範圍

解析：令贊成舉辦比賽為事件 A，贊成分組為事件 B

(1) ╳：因為 $P(A)>P(B)$，所以一定有同學贊成舉辦比賽但不贊成分組

(2) ○：根據題意 $P(A)=0.8$

(3) ○：因為 $1 \geq P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

所以 $P(A \cap B)$ 介於 $P(A)+P(B)-1$ 與 $P(B)$ 之間，

即 $0.4 \leq P(A \cap B) \leq 0.6$

(4) ╳：同(3)，至少為 0.4

(5) ○：承(3)，$P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$ 介於 0 與 0.2 之間

故選(2)(3)(5)。

11. (2)

出處：第四冊〈空間概念與空間坐標系〉

目標：空間兩點經緯度相關性質判斷

解析：(1) ╳：銳夾角先增加再減少

(2) ○：銳夾角保持 60 度

(3) ╳：距離會變化

(4) ╳：距離會變化

(5) ╳：三點在包含東經 10 度的大圓上

故選(2)。

12. (2)(4)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：三次函數圖形對稱中心性質、坐標平移

解析：$y=f(x)$ 圖形的對稱中心為 $(0, 0)$，

因此點 $P'(-r, -s)$ 在函數 $y=f(x)$ 圖形上，

平移後可得點 $(r-3, s+4)$、$(-r-3, -s+4)$ 在 $y=g(x)$ 的圖形上

故選(2)(4)。

三、選填題

13. $\dfrac{-1}{4}$

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：直線點 x、y 坐標乘積配方求極值

解析：可假設 $P(x, mx+6)$，則矩形面積為

$$x(mx+6) = mx^2 + 6x = m\left(x + \frac{3}{m}\right)^2 - \frac{9}{m}$$

因為 $m<0$，所以當 $x = -\dfrac{3}{m}$ 時，

面積有最大值 $-\dfrac{9}{m} = 36$，求得 $m = \dfrac{-1}{4}$

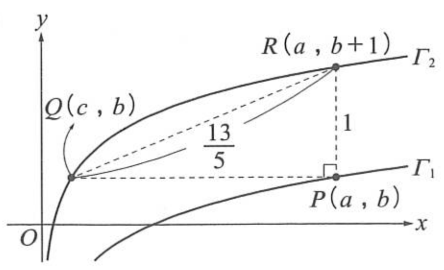
此時 P 坐標為 $(12, 3)$，位於第一象限。

14. $\dfrac{8}{3}$

出處：第三冊〈按比例成長模型〉

目標：利用對數運算，計算點坐標值

解析：



點 $Q(c, b)$ 在函數 Γ_2：$y = 1 + \log x$ 上

$\Rightarrow 1 + \log c = b = \log a$，所以 $c = \dfrac{a}{10}$

因為△PQR 是直角三角形，且 $\overline{PR} = 1$

所以 $\overline{PQ} = \sqrt{\left(\dfrac{13}{5}\right)^2 - 1}$

$= \dfrac{12}{5}$

又 $\overline{PQ} = \dfrac{12}{5} = a - c = \dfrac{9a}{10}$

$\Rightarrow a = \dfrac{8}{3}$。

15. $\dfrac{5}{8}$

出處：第四冊〈機率〉

目標：條件機率計算

解析：先計算 3 顆骰子之間勝負的機率

① B 勝 A 的機率為 $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{12}$

② C 勝 A 的機率為 $\dfrac{5}{6} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{25}{36}$

乙選到 C 且勝甲(A) 的機率為

$\dfrac{1}{2} \times \dfrac{25}{36} = \dfrac{25}{72}$

乙選到 B 且勝甲(A) 的機率為

$\dfrac{1}{2} \times \dfrac{5}{12} = \dfrac{5}{24} = \dfrac{15}{72}$

所以 P(乙選到 C | 乙勝)$= \dfrac{\frac{25}{72}}{\frac{15}{72} + \frac{25}{72}} = \dfrac{5}{8}$。

16. $(2, -1)$

出處：第四冊〈矩陣與資料表〉

目標：矩陣乘法、反方陣運算應用

解析：根據題意可得

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a+b \\ a-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix},$$

因此 $\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=3 \end{cases} \Rightarrow$ 數對 $(a, b) = (2, -1)$

〈另解〉

利用反方陣計算

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

故數對 $(a, b) = (2, -1)$

17. $-2x-2$

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：多項式函數的一次近似

解析：$y=f(x)$ 對稱中心 x 坐標為 $-\dfrac{b}{3a} = -1$，

所以 $f(x) = 2(x+1)^3 - 3x - 5$

$= 2(x+1)^3 - 3(x+1) - 2$

$\Rightarrow (x+1) \cdot f(x) = 2(x+1)^4 - 3(x+1)^2 - 2(x+1)$

$y = (x+1) \cdot f(x)$ 圖形在 $x = -1$ 附近的一次近似為 $y = -2x - 2$。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. (5)

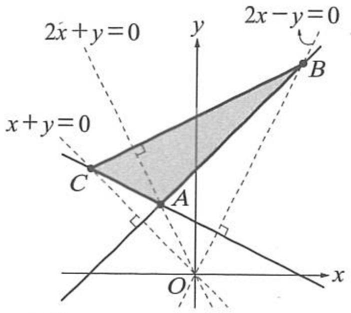
出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：直線的垂直關係、兩直線交點

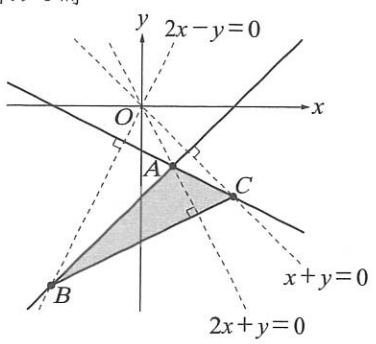
解析：因為直線 AB 垂直直線 OC：$x+y=0$，

所以直線 AB 方程式為 $x-y=3t$

①當 $t<0$ 時：



②當 $t>0$ 時：



點 B 為兩直線 OB、AB 的交點：$\begin{cases}2x-y=0\\x-y=3t\end{cases}$

$\Rightarrow B(x,y)=(-3t,-6t)$，故選(5)。

19. (2)

出處：第一冊〈直線與圓〉、第三冊〈平面向量與應用〉

目標：向量內積判斷角度

解析：因為直線 AC 垂直直線 OB：$2x-y=0$

所以直線 AC 方程式為 $x+2y=-3t$

點 C 為兩直線 OC、AC 的交點：$\begin{cases}x+y=0\\x+2y=-3t\end{cases}$

$\Rightarrow C(x,y)=(3t,-3t)$

因此 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=t(-4,-4)$，

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}==t(2,-1)$

$\Rightarrow \cos A=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{-4t^2}{(4\sqrt{2}t)(\sqrt{5}t)}=\dfrac{-1}{\sqrt{10}}\approx-\dfrac{1}{3}$

故選(2)。

20. $\left(\dfrac{1}{4},1\right)$

出處：第三冊〈平面向量與應用〉

目標：向量線性組合

解析：先分別求出向量

$\overrightarrow{OA}=t(1,-2)$，$\overrightarrow{AB}=t(-4,-4)$，

$\overrightarrow{AC}=t(2,-1)$

所以 $\overrightarrow{OA}=\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}=t(-4\beta+2\gamma,-4\beta-\gamma)$

即 $\begin{cases}-4\beta+2\gamma=1\\-4\beta-\gamma=-2\end{cases}\Rightarrow$ 數對 $(\beta,\gamma)=\left(\dfrac{1}{4},1\right)$。

◎評分原則

先分別求出向量

$\overrightarrow{OA}=t(1,-2)$，$\overrightarrow{AB}=t(-4,-4)$，　(1 分)

$\overrightarrow{AC}=t(2,-1)$　(1 分)

所以 $\overrightarrow{OA}=\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}=t(-4\beta+2\gamma,-4\beta-\gamma)$　(1 分)

即 $\begin{cases}-4\beta+2\gamma=1\\-4\beta-\gamma=-2\end{cases}\Rightarrow$ 數對 $(\beta,\gamma)=\left(\dfrac{1}{4},1\right)$。　(3 分)