112學年度學科能力測驗模擬試題(一)　數學A考科

答案

第壹部分、選擇題

一、　單選題

1　4	2　4	3　1	4　3	5　4	6　3	7　3

二、　多選題

8　1345	9　34	10　1	11　12345	12　234	13　1245

三、　選填題

14　$\frac{168}{5}\sqrt{5}$	15　$24\sqrt{3}$	16　$6\sqrt{41}$	17　624

第貳部分、混合題或非選擇題

18	$f(x)$的對稱中心坐標為$(-\frac{-6}{3},f(-\frac{-6}{3}))=(2,3)$
19	(4)

解析

第壹部分、選擇題

一、單選題

1. 原式$=\sqrt{\dfrac{3^{20}+3^{16}}{3^8+3^{12}}}=\sqrt{\dfrac{3^{16}(3^4+1)}{3^8(1+3^4)}}=3^4=81$，故選(4)

2. $\angle C=60°$，由餘弦定理，$(\overline{BD}^2)=6^2+4^2-2\cdot6\cdot4\cdot\cos A=(\dfrac{2\sqrt{3}}{3})^2+x^2-2\cdot\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\cdot x\cdot\cos C$，
解得$x=\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$(負不合)，$\dfrac{16\sqrt{3}}{3}\approx 9...$，故選(4)

3. pH 值為 5 的溶液的$[H^+]=10^{-5}$，pH 值為 4 的溶液的$[H^+]=10^{-4}$，兩者按比例$a:b$混合後

之溶液的$[\mathrm{H}^+]=10^{-4.2}$，得$\dfrac{a\times10^{-5}+b\times10^{-4}}{a+b}=10^{-4.2}$，$\dfrac{a+10b}{a+b}=10^{0.8}\approx6.3$，得$\dfrac{a}{b}\approx\dfrac{2}{3}$，故選(1)

4. 檢查$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$、$\overrightarrow{d}$三向量發現共平面（$(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})\cdot\overrightarrow{d}=0$），故只需檢查哪個向量可表為$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$的線性組合，因$\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}=(-3,6,-9)=3(-1,2,-3)$，且$(-2,2,2)\cdot(-1,2,-3)=0$，故選(3)

5. 令O為正五邊形的中心，

$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}|$

$=|(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OA})|$

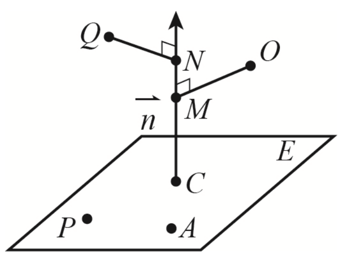
$=|(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE})-5\overrightarrow{OA}|=5\overline{OA}=5$，故選(4)

6. C資料為B資料的0.9倍，
又B資料的標準差＝資料$\{21,31,41,51,61,71\}$的標準差$<A$資料的標準差，故選(3)

7. 將$f(x)\div(x+6)$得$f(x)=(x+6)\cdot(x^2+x+1)+10$，左式以$x=17$代入，知$f(17)\div23$的餘數為$10$，故選(3)

二、多選題

8. 如圖，令O、Q在$\overrightarrow{n}$的投影分別為M、N



(1)○：$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{OP}=-|\overrightarrow{n}|\times\overline{CM}$為定值

(2)×：$(\overrightarrow{n}\times\overrightarrow{AP})\cdot\overrightarrow{OQ}$為$\overrightarrow{n}$、$\overrightarrow{AP}$、$\overrightarrow{OQ}$所張平行六面體之體積不為定值

(3)○：$(\overrightarrow{n}\times\overrightarrow{OQ})\cdot\overrightarrow{OQ}=0$

(4)○：$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0$

(5)○：$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{PQ}=|\overrightarrow{n}|\times\overline{CN}$為定值

9. (1)×：$f(x)\times g(x)$為五次多項式

(2)×：$g(x)$分別被$(x-2)$與$(99x-198)$除的餘式才相同

(3)○：$f(3)=r$，$(x^2f(x))\div(x-3)$的餘式為$3^2\times f(3)=9r$

(4)○：令$g(x)=(x^2-3)\times Q(x)+kx$，

$xg(x)=x(x^2-3)\times Q(x)+kx^2$

$=x(x^2-3)\times Q(x)+k(x^2-3)+3k$，故餘式為$3k$

(5)×：$f(x)\times g(x)$的奇次項係數和為

$[f(x)$的奇次項係數和$]\times[g(x)$的偶次項係數和$]$

$+[f(x)$的偶次項係數和$]\times[g(x)$的奇次項係數和$]$

$\neq\dfrac{f(1)\times g(-1)}{2}+\dfrac{f(-1)\times g(1)}{2}$

10. (1)○：$N=M^{-1}$，故正確

(2)×：如$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I_2$，但$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\neq I_3$

(3)×：如$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，但$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}$

(4)×：M 可能為零矩陣，故不正確

(5)×：N 可能為零矩陣，故不正確

故選(1)

11. (1)(2)○：令 4 種皮包各挑 x_1、x_2、x_3、x_4 個，則 $x_1+x_2+x_3+x_4=n$ ，與(1)同

(3)○：令 4 個小朋友各得書 x_1、x_2、x_3、x_4 本，則 $x_1+x_2+x_3+x_4=n$ ，與(1)同

(4)○：符號定義

(5)○： $C_0^2+C_1^3+C_2^4+C_3^5+\ldots+C_n^{n+2}=C_0^3+C_1^3+C_2^4+C_3^5+\ldots+C_n^{n+2}$

$=C_1^4+C_2^4+C_3^5+\ldots+C_n^{n+2}=\cdots=C_n^{n+3}$

12. (1)×：三點共線

(2)○：4 點與原點的距離均為 $\sqrt{10}$

(3)○： $\overline{PA}=2\overline{PB}\Rightarrow\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}=2\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}$

整理可得 $(x-3)^2+(y-5)^2=20$

(4)○：$\overline{CD}$ 中點 $(-5,-8)$ 且 $\overline{CD}=10$ ，所以半徑 $=5$ 且與 y 軸相切

(5)×：令 $P(x,y,0)$ ，由 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(1-x,2-y,4)\cdot(7-x,6-y,6)=0$

化簡得 $(x-4)^2+(y-4)^2=-11$ ，無圖形

13. $\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 為鈍角，$\angle B$ 和 $\angle C$ 為銳角

$\sin A=\frac{12}{13}$ 、 $\cos B=\frac{4}{5}$ 、 $\tan A=-\frac{12}{5}$ 、 $\tan B=\frac{3}{4}$

(1)○： $\tan C=-\tan(A+B)=-\left(\frac{-\frac{12}{5}+\frac{3}{4}}{1-(-\frac{12}{5})\times\frac{3}{4}}\right)=\frac{33}{56}$

(2)○：因為 $\tan B>\tan C$ ，所以 $\angle B>\angle C$

(3)×：因為 $\angle B$ 、 $\angle C$ 及 $\overline{BC}$ 的值確定，所以 $\triangle ABC$ 形狀大小唯一

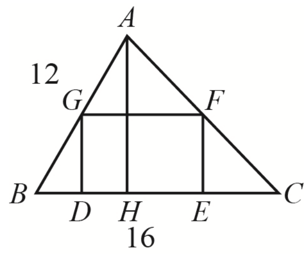
(4)○： $\cos(A-B)=-\frac{5}{13}\times\frac{4}{5}+\frac{12}{13}\times\frac{3}{5}=\frac{16}{65}$

(5)○： $\sin(B+C)=\sin A=\frac{12}{13}$

三、選填題

14. A 點對地面的垂足點必為 $\triangle BCD$ 的外心(到三頂點等距離)，又由海龍公式算出 $\triangle BCD$ 面積 $=768\sqrt{5}$ ，再由 $768\sqrt{5}=\frac{56\times64\times72}{4R}$ 得 $\triangle BCD$ 之外接圓半徑 $R=\frac{84}{\sqrt{5}}$ ，所以 A 點到地面的距離 $=\sqrt{84^2-(\frac{84}{\sqrt{5}})^2}=84\sqrt{1-\frac{1}{5}}=84\times\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{168\sqrt{5}}{5}$

15. 如圖，令長方形之 $\overline{DG}=x$ ，$\overline{FG}=y$ ，$\triangle ABC$ 之高 $\overline{AH}=6\sqrt{3}$ ，



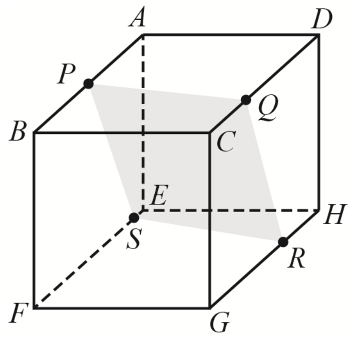
由相似比例，$\dfrac{6\sqrt{3}}{16}=\dfrac{6\sqrt{3}-x}{y}$ 得 $8x+3\sqrt{3}y=48\sqrt{3}$ ，

長方形面積 $=xy$ ，

再利用算幾不等式 $\dfrac{8x+3\sqrt{3}y}{2}\ge\sqrt{24\sqrt{3}xy}$ 得 $xy\le24\sqrt{3}$ ，

故長方形之最大面積 $=24\sqrt{3}$

16. 如圖，建立空間坐標系，$E(0,0,0)$ ，$F(6,0,0)$ ，$H(0,6,0)$ ，$A(0,0,6)$ ，則 $P(3,0,6)$ ，$Q(4,6,6)$ ，$R(2,6,0)$ ，得 PQR 所在的平面方程式為 $-6x+y+2z=-6$ ，此平面與 $\overline{EF}$ 交點 $S(1,0,0)$ ，故截面為平行四邊形 $PQRS$ ，其面積 $=|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PS}|=6\sqrt{41}$



17. $\dfrac{1}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t}}>\dfrac{1}{50}$ ，$50>\sqrt{t+1}+\sqrt{t}$ ，$\because\sqrt{624+1}+\sqrt{624}<50$ 且 $\sqrt{625+1}+\sqrt{625}>50$ ，故 t 的最大正整數值為 624

第貳部分、混合題或非選擇題

18. $f(x)$ 的對稱中心坐標為 $(-\dfrac{-6}{3},f(-\dfrac{-6}{3}))=(2,3)$

19. 將 $f(x)$ 連除以 $(x-2)$ 得 $f(x)=(x-2)^3+(k-12)(x-2)+(2k-13)$ ，
其圖形為 $h(x)=x^3+(k-12)x$ 的圖形平移，
又 $h(x)=x(x^2+(k-12))$ 圖形對稱中心 $(0,0)$ ，與 x 軸恰 1 交點的條件為 $(k-12)\ge0$ ，此時圖形為嚴格遞增，故 $k\ge12$ ，12 為 k 的最小值