112學年度學科能力測驗模擬試題(二)　數學B考科

答案

第壹部分、選擇題

一、　單選題

1　3	2　4	3　2	4　4	5　2	6　4

二、　多選題

7　1245	8　45	9　1345	10　34	11　1245	12　14

三、　選填題

13　$2310\sqrt{3}$	14　28 種	15　$(\frac{1}{3},-1,2)$	16　29 小時	17　$\frac{20}{41}$	18　$\frac{2}{25}$

第貳部分、混合題或非選擇題

19	(4)
20	$C(BA)=4\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，所以$\frac{C}{4}(BA)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ 故$\frac{C}{4}=(BA)^{-1}=A^{-1}B^{-1}=\begin{bmatrix}4&-1\\-3&1\end{bmatrix}\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{-1}{6}\\\frac{-1}{2}&\frac{1}{6}\end{bmatrix}$，解得$C=\begin{bmatrix}\frac{8}{3}&\frac{-2}{3}\\-2&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$

解析

第壹部分、選擇題

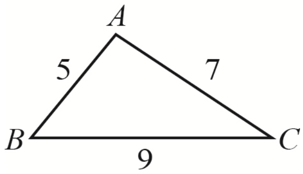
一、單選題

1. $a=\sin\pi^2=\sin\left(\pi\times180°\right)$約為$\sin\left(3.14\times180°\right)=\sin565.2°=\sin205.2°$透過廣義角化簡為 $\sin205.2°=\sin\left(180°+25.2°\right)=-\sin25.2°$其值的範圍：$0>-\sin25.2°>-\sin30°=-\frac{1}{2}$

2. $5\times10^{-3}\text{cm}=5\times10^{-5}\text{m}$ 又$120\text{nm}=120\times10^{-9}\text{m}$
$\frac{5\times10^{-5}}{120\times10^{-9}}=\frac{1}{24}\times10^{4}=\frac{100}{24}\times10^{2}=4.1\overline{6}\times10^{2}$，故選(4)

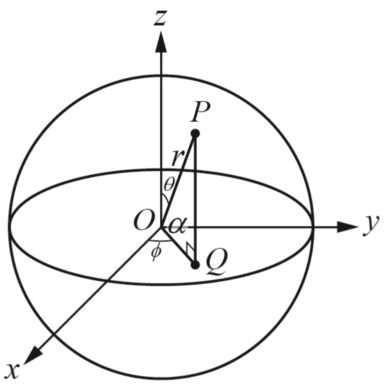
3. $\log\left(\dfrac{4}{3}\right)+\log\left(\dfrac{5}{4}\right)+\log\left(\dfrac{6}{5}\right)=\log\left(\dfrac{4}{3}\times\dfrac{5}{4}\times\dfrac{6}{5}\right)=\log 2$ 約為 0.3010

4. 三角形 ABC 中：
$\cos A=\dfrac{25+49-81}{2\times5\times7}=\dfrac{-1}{10}$ 又 $\cos B=\dfrac{25+81-49}{2\times5\times9}=\dfrac{57}{90}$ 且 $\cos C=\dfrac{49+81-25}{2\times7\times9}=\dfrac{15}{18}$
所以 $\angle A$ 為鈍角，其餘為銳角



(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=5\times7\times\dfrac{-1}{10}<0$ (2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=5\times7\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{7}{2}$
(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=5\times9\times\dfrac{-57}{90}<0$ (4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=5\times9\times\dfrac{57}{90}=\dfrac{57}{2}$
(5) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=5\times5\times1=25$
故選(4)

5. (1)(2)(3)(4)：P 點坐標可化簡為 $(30\cos(-60°)\cos23°,30\cos(-60)°\sin23°,30\sin(60°))$
$=(30\cos(60°)\cos 23°,30\cos(60)°\sin 23°,30\sin(60°))$
如圖，其中 Q 點為 P 點在 xy 平面的投影點，$\angle POQ=\alpha°$
可知 $r=30$，P 點在北緯 $60°$，$\angle POQ=\alpha°=60°$，且 P 在東經 $23°$，即 $\phi=23°$
所以 $\overline{OP}=30$，$\overline{OQ}=30\cos60°$ 且 Q 點坐標為 $(30\cos(60°)\cos23°,30\cos(60)°\sin23°,0)$



(5)：由 R 點坐標 $(30\cos(-60°)\cos(-37°),30\cos(-60)°\sin(-37°),30\sin(60°))$，可知
$\angle QOR=60°=\dfrac{\pi}{3}$，所以 Q 點與 R 點所構成的弧長為 $30\times\dfrac{\pi}{3}=10\pi$

6.

<table>
<tr><td rowspan="2">抽到甲
機率 0.3</td><td>已選到甲，則抽到白機率 $\dfrac{2}{3}$</td></tr>
<tr><td>已選到甲，則抽到黑機率 $\dfrac{1}{3}$</td></tr>
<tr><td>抽到乙
機率 0.7</td><td>已選到乙，則抽到白機率 $\dfrac{1}{4}$</td></tr>
</table>

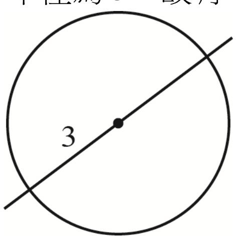
抽到白球的機率＝從甲中得到白＋從乙中得到白＝$0.3\times\frac{2}{3}+0.7\times\frac{1}{4}$

所以在這前提下，其出自乙袋的機率為$\dfrac{0.7\times\frac{1}{4}}{0.3\times\frac{2}{3}+0.7\times\frac{1}{4}}=\dfrac{\frac{7}{40}}{\frac{6}{30}+\frac{7}{40}}=\dfrac{7}{15}\approx 0.46$，

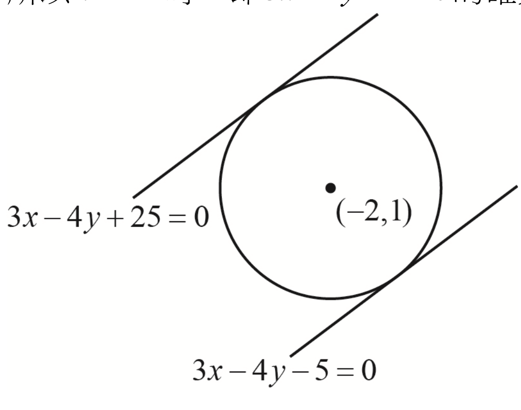
故選(4)

二、多選題

7. (1)○：$a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{-1}{2}}=3$將其平方得到$a^1+a^{-1}+2=9\Rightarrow a^1+a^{-1}=7$
   (2)○：$a^1+a^{-1}=7$將其平方得到$a^2+a^{-2}+2=49\Rightarrow a^2+a^{-2}=47$
   (3)×：令$a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{-1}{2}}=k$將其平方得到$a^1+a^{-1}-2=k^2\Rightarrow 7-2=k^2$
   解得$k=\pm\sqrt{5}$，取$k=-\sqrt{5}$(因為$0<a<1$)
   (4)○：$a^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{-3}{2}}=(a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{-1}{2}})(a^1+1+a^{-1})=(-\sqrt{5})(7+1)=-8\sqrt{5}$
   (5)○：令$a^{\frac{3}{4}}-a^{-\frac{3}{4}}=p$將其平方得到$a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}-2=p^2$
   又$a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})(a^1-1+a^{-1})=3\times(7-1)=18$
   所以$18-2=p^2\Rightarrow p=\pm4$，取$p=-4$(因為$0<a<1$)
8. (1)×：$x^2+y^2+4x-2y-4=0$配方得$(x+2)^2+(y-1)^2=9$，圓心$(-2,1)$、半徑$=3$
   (2)×：最大割線段長為直徑，即該直線通過圓心：$3(-2)-4(1)+k=0\Rightarrow k=10$
   (3)×：半徑為 3，故有 4 個點



   (4)○：透過圓心$(-2,1)$到直線$3x-4y+k=0$距離等於半徑
   $\dfrac{|-6-4+k|}{\sqrt{25}}=3$，解得$k=-5$或$25$(如下圖)
   所以$k=-2$時，即$3x-4y-2=0$的確與圓交於兩點



(5)○：$-5 \le k \le 25$ 直線與圓相交(包含相切)

9. (1)○(2)×：若對稱中心在 $A(0,2)$ 則可假設 $f(x)=ax^3+0\times x^2+cx^1+2$

代入 $B(1,0)$ 、 $C(-2,0)$ 兩點解聯立可得： $f(x)=x^3-3x+2$

所以： $b=0$ 且 $c=-3$

(3)○(4)○：利用以 $x=1$ 為中心連續綜合除法得到泰勒展開式：$f(x)=(x-1)^3+3(x-1)^2+0$

可得知在 $x=1$ 附近的一次近似為 $y=0$

(5)○：利用以 $x=-1$ 為中心連續綜合除法得到泰勒展開式： $f(x)=(x+1)^3-3(x+1)^2+4$ 可得知在 $x=1$ 附近的一次近似為 $y=4$

又 $y=4$ 為水平線，所以可得 $x=1$ 的極大值 $=4$

10. (1)×：1 人可能移動到 5 個樓層（2～6 樓），所以有 5 種

(2)×：2 人有可能有兩種狀況：

（一）2 人同樓層： C_1^5　（二）2 人不同樓層： C_2^5

共有： $C_1^5+C_2^5=5+10=15$ 種

(3)○：3 人有可能有三種狀況：

（一）3 人同 1 個樓層： C_1^5

（二）3 人不同分布在 2 個樓層： C_2^5

（三）3 人不同分布在 3 個樓層： C_3^5

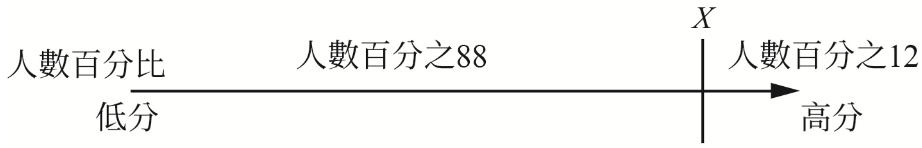
共有： $C_1^5+C_2^5+C_3^5=5+10+10=25$ 種

(4)○：由上面同理可得：4 人共有： $C_1^5+C_2^5+C_3^5+C_4^5=5+10+10+5=30$ 種

(5)×：由上面同理可得：5 人共有： $C_1^5+C_2^5+C_3^5+C_4^5+C_5^5=5+10+10+5+1=31$ 種

11. (1)○：眾數為出現次數最多的資料，所以是 6 級分。

(2)○：頂標（第 88 百分位數）為 X 級分，意指：



小於等於 X 級分的資料至少占總考生人數的百分之 88

且大於等於 X 級分的資料至少占總考生人數的百分之 12，所以 X 為 13 級分

(3)×：均標（第 50 百分位數）為 8 級分

(4)○：平均級分約為 8.8 級分所以大於中位數 8 級分

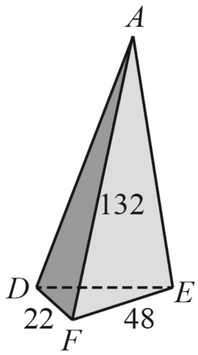
(5)○：第 75 百分位數即為 12 級分，所以自然沒有通過檢定標準

12. (1)○(2)×： $\frac{1}{3}$ 倍(3)×(4)○

(5)×：應更正為先鉛直伸縮為原來的 2 倍，再向上平移 4 單位。

三、選填題

13.



已知 $\overline{AF}=132$ 且三角形 DEF 周長亦為 132，又 $\overline{BD}=22=\overline{DF}$ ，且 $\angle DFE=120°$

所以可假設 $\overline{FE}=x$ 與 $\overline{ED}=132-22-x=110-x$

在三角形 DFE 中使用餘弦定理： $\cos 120°=\dfrac{x^2+22^2-(110-x)^2}{2\times x\times 22}$

可得 $\dfrac{-1}{2}=\dfrac{x^2+484-(12100+x^2-220x)}{2\times x\times 22}$

乘開後解出 $x=48$ ，故可得 $\overline{DF}=22$ ， $\overline{FE}=48$ 且已知 $\overline{AF}=132$

所以四邊形 $ADFE$ 面積＝三角形 ADF 面積＋三角形 AEF 面積

$=\dfrac{1}{2}\times 22\times 132\times\sin 60°+\dfrac{1}{2}\times 48\times 132\times\sin 60°=2310\sqrt{3}$

14. 若經過 1 個點，例如 $F-A-E$ ： $1\times 4\times 1=4$
若經過 2 個點，例如 $F-A-B-E$ ： $1\times 4\times 2\times 1=8$
若經過 3 個點，例如 $F-A-B-C-E$ ： $1\times 4\times 2\times 1\times 1=8$
若經過 4 個點，例如 $F-A-B-C-D-E$ ： $1\times 4\times 2\times 1\times 1\times 1=8$
所以總共 $4+8+8+8=28$ 種

15. $y=-2$ 為其漸近線，所以可知 $y=a^{x+b}-2$ ，即 $c=2$
接下來代入 A 、 B 兩點解聯立：
$$\begin{cases}1=a^{0+b}-2\\-1=a^{1+b}-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3=a^{0+b}\cdots\cdots①\\1=a^{1+b}\cdots\cdots②\end{cases}\Rightarrow\frac{①}{②}\Rightarrow 3=a^{-1}\Rightarrow a=\frac{1}{3}$$
代入①得到 $b=-1$

16. $2000\times(1+100^{0.03t})>100000\Rightarrow(1+100^{0.03t})>50\Rightarrow 100^{0.03t}>49$
兩邊取對數 $\log 100^{0.03t}>\log 49\Rightarrow 0.03t\times\log 100>2\times\log 7\Rightarrow 0.03t>0.8451$
解得 $t>28.17$ ，所以取 29 小時

17. 觀察前三項： $a_1=\dfrac{1}{3}$ ， $a_2=\dfrac{1-\frac{1}{3}}{3-4\times\frac{1}{3}}=\dfrac{2}{5}$ ， $a_3=\dfrac{1-\frac{2}{5}}{3-4\times\frac{2}{5}}=\dfrac{3}{7}$
可以歸納出一般項為 $a_n=\dfrac{n}{2n+1}$ 。所以 $a_{20}=\dfrac{20}{41}$

18. A 事件為：不管抽到什麼球，兩人皆說黃球
B 事件為：抽到綠球
所求為

$$P(B\mid A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{\text{抽到綠且兩人說黃}}{\text{抽到黃且兩人說黃}+\text{抽到綠且兩人說黃}+\text{抽到藍且兩人說黃}}$$

$$=\frac{\frac{2}{10}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}}{\frac{3}{10}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{2}{10}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{5}{10}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}}=\frac{4}{36+4+10}=\frac{2}{25}$$

第貳部分、混合題或非選擇題

19. $B=I+A+A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&1\\3&4\end{bmatrix}+\frac{1}{\begin{vmatrix}1&1\\3&4\end{vmatrix}}\begin{bmatrix}4&-1\\-3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&0\\0&6\end{bmatrix}$

所以 $BA=\begin{bmatrix}6&0\\0&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&6\\18&24\end{bmatrix}=6\times\begin{bmatrix}1&1\\3&4\end{bmatrix}$，故 $r=6$

20. $C(BA)=4\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，所以 $\frac{C}{4}(BA)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

故 $\frac{C}{4}=(BA)^{-1}=A^{-1}B^{-1}=\begin{bmatrix}4&-1\\-3&1\end{bmatrix}\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{-1}{6}\\\frac{-1}{2}&\frac{1}{6}\end{bmatrix}$，解得 $C=\begin{bmatrix}\frac{8}{3}&\frac{-2}{3}\\-2&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$