

提升教學功力 · 散播學習樂趣

大考教學誌

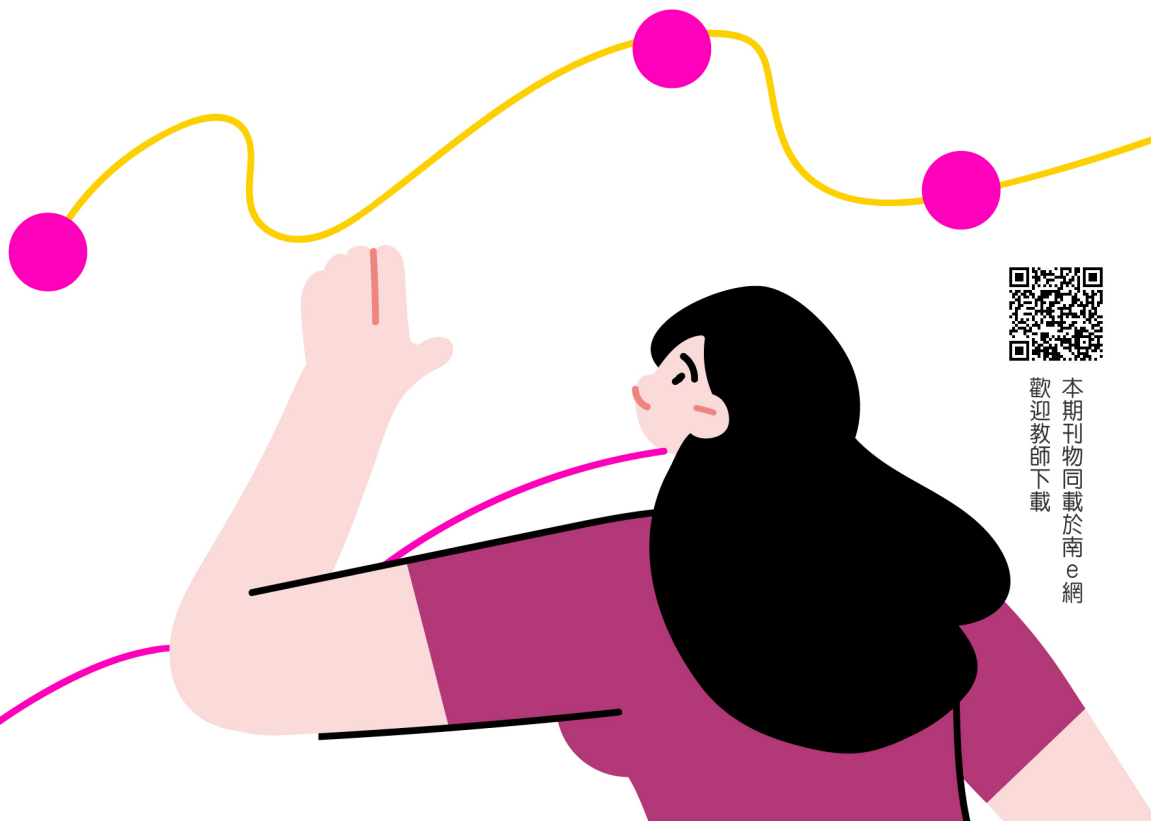
TEACH!

提趣

數學B

112年學測

趨勢分析與模擬試題



本期刊物同載於南e網
歡迎教師下載

南一書局

1 前言

有別於 111 學測數學 A 的「難」言之隱，適用「低數學需求」的數學 B 則較符合期待。難度合理、中間偏易，但沒有到非常容易，難度略高於以往的指考乙，對於文法、社會科學、藝術學群的考生而言，這樣的考題具有鑑別度。

此份「學測數學 B 模擬試題」，依照大考中心公布的「學測考試說明」命題，以六大測驗目標為核心，再根據「試辦考試數學 B」與「111 學測數學 B」，模擬出一份預期與未來學測相仿的試題，包含以往是考試主軸的概念知識題，亦有新課綱強調的「素養導向試題」。

考卷難易度方面與「111 學測數學 B」相近，由淺入深，其中有考驗基本概念的基礎題，也不乏有數個概念結合的進階題，相當符合「數學 B」考科的命題取向，同學除了能透過這份試題了解新式學測的方向之外，也能藉由試題激發思考能力，並且檢視自我的學習成效。

2 學測、試辦試題分析

(一) 試題分布情形與所占的分數

冊別	單元	110 年試辦	111 年
1	實數與指對數	20	10
	直線與圓	5	5
	多項式函數	10	10
2	數列與級數	5	5
	數據分析	5	5
	排列組合與機率	15	15
	三角比	10	10
3B	週期性數學模型	0	5
	按比例成長模型	0	5
	平面上的比例	10	15
4B	空間概念	10	5
	矩陣與資料表格	5	5
	條件機率與貝氏定理	5	5

由上頁表可知學測試題大致涵蓋各冊，且各單元都有出題，『排列組合與機率』、『平面上的比例』佔比較高，而 108 課綱數 B 新增內容，『經緯度』、『單點透視法』以及『三次函數的圖形』，皆有入題，亦是符合預期。

題型部分，以概念性知識為主軸，素養情境題約佔 40%，新增的混合題難易適中，但並無引導解題的鋪陳。此外非選擇題的書寫練習是必要的，因為從評分標準來看，須清楚表達推理或解題過程，且得到正確答案，方可得到滿分，考生平時可多加練習將過程書寫清楚，以應學測之用。

(二) 掌握概念性知識的基本題

根據大考中心測驗目標來看，概念性知識、程序性知識與解決問題的能力是學生學習數學的三個層面，其中評量知識的基本題相對來說是比較容易的，只要掌握各單元的定義、定理或觀念，甚至國中的先備知識就能應答。

〈111 年學測 B 單選 5〉

設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ，若 $A^7 - 3A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，則 $a + b + c + d$ 之值為下列哪一個選項？

- (1) -8 (2) -5 (3) 5 (4) 8 (5) 10

【答案】(5)

〈111 年學測 B 選填 14〉

坐標平面上有一個半徑為 7 的圓，其圓心為 O 點。已知圓上有 A, B 兩點，且 $\overline{AB} = 8$ ，則

內積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \underline{\quad (14-1) \quad (14-2) \quad}$ 。

【答案】17

(三) 加強閱讀理解與圖表的分析

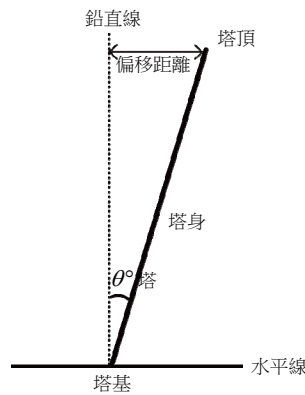
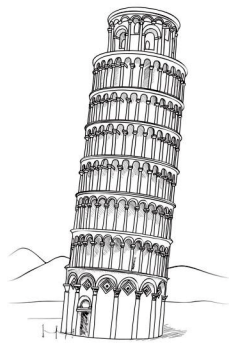
素養題強調閱讀理解能力，能判讀圖表的程序性知識也是大考中心強調的測驗目標，在過往的題目中也是熱門題型。現在新增混合題型，更高機率可以在此題型中出現。作答時，同學們要仔細閱讀，同時要掌握文章中的關鍵數據，若是選擇題不妨搭配選項，再回過頭去閱讀找答案，這種題目未必艱難，但耐心和細心是很重要的。

今舉二個試題如下：

〈111 年數學 B 混合題〉

18-20 題為題組

瘦長的塔因為年代久遠，塔身容易傾斜。在下方右圖中，以粗黑線條代表塔身，而塔身的長度稱為塔高，塔身與鉛直虛線的夾角 θ° 稱為該塔的傾斜度 ($0 \leq \theta \leq 90$)，又塔頂至鉛直虛線的距離稱為該塔的偏移距離。



根據上述資料，試回答下列問題。

18. 已知世界上傾斜度最高的摩天大樓坐落於阿布達比，其**傾斜度**達到 18° ，此**傾斜度**換算成徑（或弧度）為下列哪一個選項？（單選題）

- (1) $\frac{\pi}{36}$ (2) $\frac{\pi}{18}$ (3) $\frac{\pi}{20}$ (4) $\frac{\pi}{10}$ (5) $\frac{\pi}{8}$

19. 中國虎丘塔、護珠塔與義大利的比薩斜塔是三座著名斜塔，它們的**塔高**分別為 48、19 與 57（公尺），**偏移距離**分別為 2.3、2.3 與 4（公尺），塔的**傾斜度**分別記為 θ_1° 、 θ_2° 與 θ_3° 。試比較 θ_1 、 θ_2 與 θ_3 三數的大小關係。（非選擇題）

20. 假設有塔高相等的兩座鐵塔，它們的**傾斜度** α° 、 β° 分別滿足 $\sin\alpha^\circ = \frac{1}{5}$ 與 $\sin\beta^\circ = \frac{7}{25}$ 。已知兩

座鐵塔的**偏移距離**相差 20 公尺，試求它們的塔頂到地面之距離相差多少公尺。（非選擇題）

【答案】18. (4) 19. $\theta_1 < \theta_3 < \theta_2$ 20. $(100\sqrt{6} - 240)$ 公尺

〈109 年學測 多選 12〉

下表是 2011 年至 2018 年某國總就業人口與農業就業人口的部分相關數據，各年度的人口以人數計，有些是以千人計，有些以萬人計，例如 2011 年總就業人口為 1,070.9 萬人，65 歲以上男性農業就業人口為 69.1 千人。試根據表格資料選出正確的選項。

年別	就業人口			男性農業就業人口按年齡別分			
	總就業人口 (萬人)	農業就業 人口 (萬人)	男性農業 就業人口 (千人)	39 歲以下 (千人)	40-49 歲 (千人)	50-64 歲 (千人)	65 歲以上 (千人)
2011 年	1,070.9	54.2	386.3	67.6	85.4	164.2	69.1
2012 年	1,086.0	54.4	394.9	67.5	87.0	169.5	70.9
2013 年	1,096.7	54.4	391.5	66.6	83.9	171.3	69.7
2014 年	1,107.9	54.8	391.2	65.8	79.8	173.0	72.6
2015 年	1,119.8	55.5	403.1	71.7	76.9	181.3	73.2
2016 年	1,126.7	55.7	404.5	77.4	77.4	176.4	73.3
2017 年	1,135.2	55.7	405.1	73.9	78.1	178.3	74.8
2018 年	1,143.4	56.1	415.1	72.0	78.8	184.9	79.4

(1) 從 2013 年至 2018 年，65 歲以上的男性農業就業人口逐年遞增

- (2) 從 2013 年至 2018 年，50 歲至 64 歲之男性農業就業人口逐年遞增
 (3) 上表中，每一年的男性農業就業人口占總就業人口的比率都小於百分之五
 (4) 上表中，每一年 50 歲至 64 歲之男性農業就業人口都少於 49 歲以下之男性農業就業人口
 (5) 就 65 歲以上之男性農業就業人口而言，2018 年比 2011 年增加了不到一萬人

【答案】(1)(3)

(四) 留意數學 B 新增內容

有別於數學 A，數學 B 在某些單元簡化，例如數學 3A 的三角函數及指對數函數，在數學 3B 則分別以週期性的數學模型及按比例成長模型來呈現。在數學 4B 空間概念中引入球面上的經線與緯線，以及圓錐截痕，在數學 3B 也有平面幾何在生活情境上的應用，例如單點投影、圓角設計等，因為數學 B 的內容原本就是給低數學需求的外語、法律或藝術人文科系採用，因此相關內容則以概念性或視覺化的方式呈現。這些特有的內容不妨多加留意，尤其是尚未入題的部分。

〈111 年數學 B 單選 6〉

假設地球為一半徑 r 的球體，有一質點自甲地沿著該地所在經線往北移動，抵達北極點時移動所經過的弧線之長度為 $\frac{7}{12}\pi r$ 。試問哪一個選項最可能是甲地的位置？

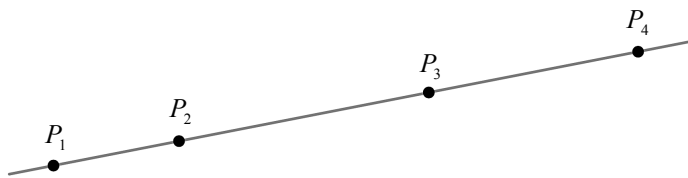
- (1) 東經 75° 、北緯 15° (2) 東經 30° 、南緯 75° (3) 東經 75° 、南緯 15°
 (4) 西經 30° 、北緯 75° (5) 西經 15° 、南緯 30°

【答案】(3)

〈111 年學測 B 單選 7〉

畫家把空間景物用單點透視法畫在平面的畫紙上時，有以下原則要遵守：

- 一、空間中的直線畫在畫紙上必須是一條直線。
- 二、空間直線上點的相關位置必須和畫紙所畫的點的相關位置一致。
- 三、空間直線上的任四個相異點的 K 值，和畫紙所畫的四個點之 K 值必須相同，其中 K 值的定義如下：直線上任給四個有順序的相異點 P_1, P_2, P_3, P_4 ，如下圖。



其所對應的 K 值定義為 $K = \frac{\overline{P_1P_4} \times \overline{P_2P_3}}{\overline{P_1P_3} \times \overline{P_2P_4}}$ 。

今某畫家依照以上原則，將空間中一直線及該線上的四相異點 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 描繪在畫紙上，其中 $\overline{Q_1Q_2} = \overline{Q_2Q_3} = \overline{Q_3Q_4}$ 。若將畫紙上所畫的直線視為一數線，並將線上的點用坐標來表示，則在下列選項的四個坐標中，試問哪一組最可能是該四點在畫紙上的坐標？

- (1) 1, 2, 4, 8 (2) 3, 4, 6, 9 (3) 1, 5, 8, 9 (4) 1, 2, 4, 9 (5) 1, 7, 9, 10

【答案】(5)

3 學測準備方向

學測複習必須按部就班，擬訂計畫，不妨先從課本讀起，將每個主題最前面的定義、定理熟記，必要時可以準備筆記本將這些內容註記，同時做課本例題，鞏固觀念。若只有做題目，有時會忘了那個單元中最重要的核心觀念。若要檢視自己是否掌握了這些基本觀念，不妨複習完一單元後，闔上課本，試著聯想每個單元在講些什麼內容？重點又是什麼？那些漏掉或是不清楚的內容就可以寫入筆記，以下幾點提供給同學們參考：

1. 掌握各單元的基本觀念。例如：
 - (1) 絕對值的應用。
 - (2) 多項式餘式定理、因式定理。
 - (3) 單利與複利的定義。
 - (4) 等差、等比數列與級數的公式。
 - (5) 條件機率與獨立事件的定義。
 - (6) 內積定義、正射影。
 - (7) 標準差與相關係數、最佳直線的公式以及它的意涵。
 - (8) 球面的經線與緯線、圓錐截痕。
 - (9) 矩陣的運算(加減法、乘法)與反方陣。
2. 熟悉課程中各種的圖形。包含：
直線、二次函數、三次函數、指數函數、對數函數、圓、正弦函數等。請熟記圖形的特徵，例如：對稱性、單調性(遞增或遞減)、凹向性等。此外，奇偶函數的圖形特性及圖形受平移、伸縮的影響也要知道。
3. 多練習常以素養題型呈現的單元。例如：
 - (1) 數據分析。
 - (2) 排列組合與機率、條件機率與貝氏定理。
 - (3) 指數與對數函數。
 - (4) 空間概念。
 - (5) 正弦函數的週期性變化。

4 結語

111 學測的「數學 B」從考試結果來看，大致符合眾人的期待，緊扣 108 課綱及數學 B 的測驗目標，預期 112 學測也不會有太多意外。因此考生們先將基礎觀念鞏固，再適時作一些題目來驗證複習成效，文末的「新式學測數學 B 模擬試題」，就是一份很好的試煉，預祝 112 學測的考生們從中獲得經驗，也能有效的提升自我的實力。

112 學年度學科能力測驗模擬試題

數學 B 考科

教師用

作答注意事項

考試時間：100 分鐘

選擇(填)題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\frac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

◎註：此份試題本為模擬學科能力測驗之測驗形式，
作答方式仍以未來實際之測驗形式為準

第壹部分：選擇（填）題（占 85 分）

一、單選題（占 35 分）

說明：第 1 題至第 7 題，每題 5 分。

(4) 1. 不等式 $|x-5|+|x+3| \geq 10$ 的解為下列何者？

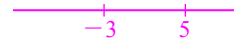
- (1) $-5 \leq x \leq 7$ (2) $-4 \leq x \leq 6$ (3) $x \leq -5$ 或 $x \geq 7$
 (4) $x \leq -4$ 或 $x \geq 6$ (5) 任意實數

(i) 當 $x \geq 5$ 時 $\Rightarrow (x-5)+(x+3) \geq 10 \Rightarrow x \geq 6$ ，得 $x \geq 6$ 。

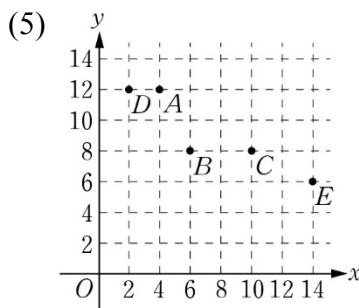
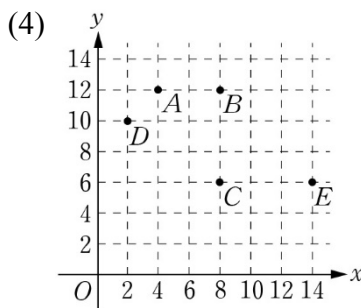
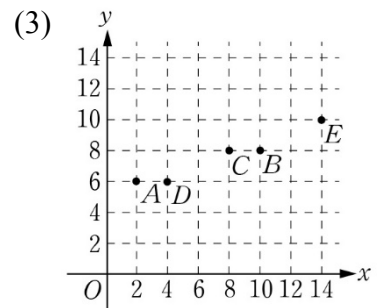
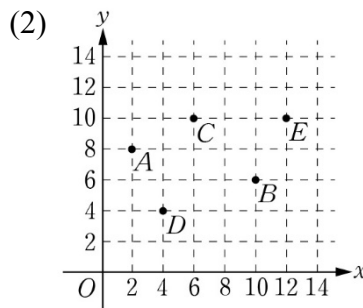
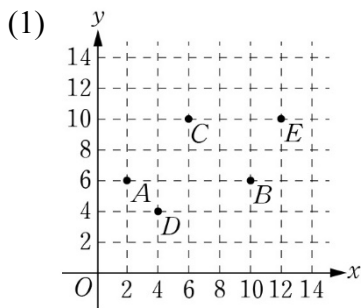
(ii) 當 $-3 \leq x < 5$ 時 $\Rightarrow -(x-5)+(x+3) \geq 10 \Rightarrow 8 \geq 10$ (不合)。

(iii) 當 $x < -3$ 時 $\Rightarrow -(x-5)-(x+3) \geq 10$
 $\Rightarrow 2x \leq -8 \Rightarrow x \leq -4$ ，得 $x \leq -4$ 。

由(i)(ii)(iii)得 $x \geq 6$ 或 $x \leq -4$ 。
 故選(4)。



(3) 2. 下列五個散布圖，哪個選項的相關係數絕對值最大？



在沒有電腦可用的情況下，只能憑著觀察，若不是零相關（例如：點根據 x 軸的平行線對稱或根據 y 軸的平行線對稱等），只要是五個點的分布愈接近一條斜率不為零的直線，則相關係數絕對值就愈大。

故選(3)。

藉由 Geogebra 可計算得到各散布圖五個點的相關係數為

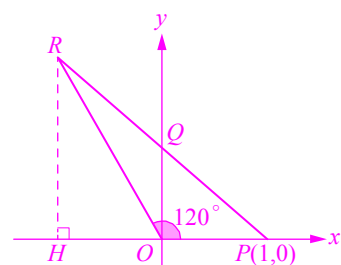
(1) 0.521；(2) 0.314；(3) 0.976；(4) -0.63 ；(5) -0.913 。

(3) 3. 在坐標平面上， O 是原點，一個等速直線運動的物體由 $P(1, 0)$ 開始出發，1 秒鐘後到達 y 軸上的 Q 點，再過 1 秒鐘到達第二象限的 R 點，已知 $\angle POR = 120^\circ$ ，求 $\sin \angle OPQ$ 的值=?

- (1) $\frac{\sqrt{19}}{7}$ (2) $\frac{\sqrt{20}}{7}$ (3) $\frac{\sqrt{21}}{7}$ (4) $\frac{\sqrt{18}}{7}$ (5) $\frac{\sqrt{17}}{7}$

如右圖，由 R 向 x 軸做垂線，
 設垂足為 H ， $PQ = QR$ ， RH 平行 QO ，故 $HO = OP = 1$ ，
 $\angle POR = 120^\circ$ ，故 $\angle HOR = 60^\circ$ ，
 $HO = 1$ ，則 $RH = \sqrt{3}$ ， $PR = \sqrt{7}$ ，
 故 $\sin \angle OPQ = \sin \angle HPR = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$ ，

故選(3)。



(4) 4. 設點 (a, b) 在圖形 $y=3x^2$ 上，則下列何者在圖形 $y=3(x+2)^2+4$ 上？

- (1) $(3a, b)$ (2) $(3a, b-4)$ (3) $(3a-2, b)$
 (4) $(a-2, b+4)$ (5) $(a+2, b+4)$

$y=3(x+2)^2+4$ 表示由 $y=3x^2$ 向左移 2 單位，再向上移 4 單位而得，
 點亦由 (a, b) 左移 2，上移 4，得 $(a-2, b+4)$ ，
 故選(4)。

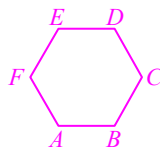
(5) 5. 以正六邊形的六個頂點中任取 4 個頂點作一個四邊形，則此四邊形是矩形的機率為多少？

- (1) $\frac{1}{12}$ (2) $\frac{1}{10}$ (3) $\frac{1}{8}$ (4) $\frac{1}{6}$ (5) $\frac{1}{5}$

矩形只有 $ABDE, BCEF, CDF A$ 共 3 個，

所求機率 = $\frac{3}{C_4^6} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ ，

故選(5)。



(3) 6. 放射性碘 I_{131} ，是由實驗室製造，在醫療方面使用；有甲狀腺問題的病患在手術後一段時間，要檢查是否還有新生成不好的甲狀腺細胞，通常會使用 I_{131} 來檢驗：放射性碘經由人體吸收，會累積在甲狀腺的組織中，如果身體內還殘留甲狀腺細胞， I_{131} 將附在上面，可藉由掃描偵測出來，以判斷是否需要做進一步治療。但經過一段時間，體內的 I_{131} 會自然的減少或消失。放射性碘的半衰期是 8 天（8 天後放射性元素的數量會由 N_0 變成 $\frac{N_0}{2}$ ），

請問至少要過多少天後，放射性元素的數量會由 N_0 變成 $\frac{N_0}{6}$ ？

($\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ，四捨五入取整數)

- (1) 19 (2) 20 (3) 21 (4) 22 (5) 23

假設原來放射性碘的數量是 N_0 ， a 是每天的蛻變率，經過 8 天後數量變成 $N_0 \cdot a^8$ 。

由 $N_0 \cdot a^8 = \frac{1}{2} N_0$ ， x 天後數量變成 $\frac{1}{6} N_0$ ， $N_0 \cdot a^x = \frac{1}{6} N_0$ ，得到聯立方程式 $\begin{cases} a^8 = \frac{1}{2} \\ a^x = \frac{1}{6} \end{cases}$ ，

上下兩式兩邊取對數 $\begin{cases} 8 \log a \approx -0.3010 \\ x \log a \approx -0.3010 - 0.4771 \end{cases}$ ，

上下兩式左右各自相除得 $\frac{8}{x} \approx \frac{0.3010}{0.7781}$ ，得到 $x \approx 20.68$ ，最小正整數的 x 是 21，

故至少要過 21 天後，放射性元素的數量會由 N_0 變成 $\frac{N_0}{6}$ 。故選(3)。

(5) 7. 甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛共 8 人排成一列，甲不與乙、丙相鄰的排法有多少種？

- (1) 8900 (2) 9600 (3) 9800 (4) 9900 (5) 21600

(i) 甲□…□ 甲的緊鄰右邊不排乙、丙 $\Rightarrow C_1^5 \times 6! = 3600$ 。

(ii) □…□甲 甲的緊鄰左邊不排乙、丙 $\Rightarrow C_1^5 \times 6! = 3600$ 。

(iii) …□甲□… 甲的緊鄰左、右不排乙、丙 $\Rightarrow P_2^5 \times 5! \times 6 = 14400$ 。

排法有 $3600 + 3600 + 14400 = 21600$ (種)。

故選(5)。

二、多選題 (占 25 分)

說明：第 8 題至第 12 題，每題 5 分。

(1)(2) 8. 坐標平面上，同一直線上的四點 A, B, C, D 滿足 $\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ ，

(3)(4) $\overrightarrow{OD} = \frac{5}{3}\overrightarrow{OB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$ ，下列哪些選項正確？

(5)

(1) C 在 A, B 之間 (2) B 在 C, D 之間 (3) B, C 在 A, D 之間

(4) B 為 \overline{CD} 之中點 (5) $\overline{BD} = 2\overline{AC}$

利用內分點公式：

$$\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}, \text{ 得右圖: } \begin{array}{|c|c|c|} \hline & A & C & B \\ \hline \end{array}$$

$$\overrightarrow{OD} = \frac{5}{3}\overrightarrow{OB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{OB} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OD}, \text{ 得右圖: } \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & A & B & D \\ \hline \end{array}$$

綜合上述得右圖: $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & A & C & B & D \\ \hline \end{array}$

故選(1)(2)(3)(4)(5)。

(1)(2) 9. 南一高中籃球隊員遴選的資格是：投籃命中率必須六成以上，並且「身高 178 公分以上或百米 13 秒以內」，兩個條件中至少要有一個符合。智傑身高 179 公分，參加遴選卻沒上，他很納悶，跑到體育組詢問原因，請問實際的情況，有可能是下列哪些選項？

(1) 投籃命中率未達六成且百米沒有 13 秒以內

(2) 投籃命中率未達六成且百米 13 秒以內

(3) 投籃命中率六成以上且百米沒有 13 秒以內

(4) 投籃命中率六成以上且百米 13 秒以內

(5) 投籃命中率六成以上但身高未達標準

智傑身高 179 公分，只要投籃命中率六成以上一定選上，現在遴選沒上不是身高的問題，一定是投籃命中率未達六成，故選(1)(2)。

(1)(3)10. 有 30 對數據 (x_i, y_i) , $i=1, 2, \dots, 30$ ，其算術平均數 $\mu_x=6$, $\mu_y=8$ ， x 與 y 的相關係數 $r=0.75$ ，且 y 對 x 的迴歸直線過點 $(3, 3)$ ，則下列敘述哪些正確？

(5)

(1) y 對 x 的迴歸直線必過點 $(6, 8)$

(2) y 對 x 的迴歸直線為 $y = \frac{2}{5}x - 7$

(3) x 的標準差小於 y 的標準差

(4) 若將數據經線性調整為 $(2x_i + 3, -5y_i + 4)$, $i=1, 2, \dots, 30$ ，則新數據的相關係數為 0.75

(5) 若將數據標準化所得之標準化數據為 (x'_i, y'_i) , $i=1, 2, \dots, 30$ ，則 y' 對 x' 迴歸直線的斜率 $m'=0.75$

(1) ○：迴歸線必過 $(\mu_x, \mu_y) = (6, 8)$ 。

(2) ×： $m = \frac{8-3}{6-3} = \frac{5}{3}$ ，∴ 迴歸線為 $y-3 = \frac{5}{3}(x-3) \Rightarrow y = \frac{5}{3}x - 2$ 。

(3) ○： $m = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \Rightarrow \frac{5}{3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \Rightarrow \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{20}{9}$ ，∴ $\sigma_y > \sigma_x$ 。

(4) ×：∵ 2 與 -5 異號，∴ $r' = -r = -0.75$ 。

(5) ○：標準化數據 $m' = r = 0.75$ 。

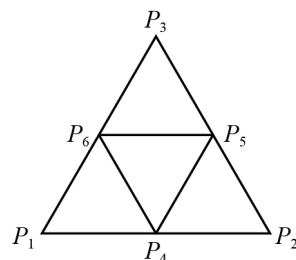
故選(1)(3)(5)。

(1)(4)11. 有一個半徑 20 公分的地球儀 (視為球體) 置於桌上，已知兩條相鄰整數度緯線間的經線長度稱為「緯距」，緯距隨緯度改變大致相等；兩條相鄰整數度經線間的緯線長度稱為「經距」，經距隨緯度改變而變化，在赤道時最長，請選出正確選項。

- (1) 該地球儀上的緯距約 $\frac{\pi}{9}$
 (2) 北緯 20 度的經距和南緯 70 度的經距約相等
 (3) 東經 120 度和東經 150 度在北緯 60 度的經距為 $\frac{5\sqrt{3}}{3}\pi$
 (4) 東經 120 度的經線長為 40π
 (5) 現在拿一個強力的手電筒於地球儀的斜上方，對著球心照射，則在桌面上的投影圖形為圓形

- (1) ○：緯距約為 $\frac{2\pi \cdot 20}{360} = \frac{\pi}{9}$ 。
 (2) ×：北緯 20 度的經距和南緯 20 度的經距約相等。
 (3) ×：先求出北緯 60 度的小圓半徑為 10，經距為 $s=r\theta=10 \times \frac{\pi}{6} = \frac{5}{3}\pi$ 。
 (4) ○：經線長=大圓的圓周長= $2\pi \cdot 20=40\pi$ 。
 (5) ×：由斜上方對著球心照射，則在桌面上的投影圖形應為橢圓形。
 故選(1)(4)。

(1)(2)12. 袋中有編號 1~6 個大小相同的球，每次從袋中任意取出 3 球，每球被選中的機率都相等。若選中的號碼 k 對應到右圖四個小正三角形中的點 P_k ，其邊長皆為 1。假設選出的三個點連線段所圍出區域面積是 S ，請選出正確選項。



- (1) 所有的選法共有 20 種
 (2) S 有 4 種可能的數值
 (3) S 恰為 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 的機率為 $\frac{1}{2}$
 (4) 若 S 為 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ，則三點恰圍成正三角形的機率為 $\frac{1}{2}$
 (5) 取球一次，其面積 S 的期望值為 $\frac{13}{40}\sqrt{3}$

- (1) ○：所有的選法 $C_3^6=20$ 。
 (2) ○： S 的取值有 4 種。

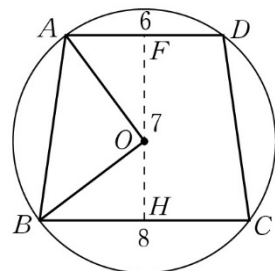
S 值	0	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
類型	共線的三點 (1,3,6)、(1,2,4)、 (2,3,5)	正三角形 (1,4,6)、(2,4,5)、(3,5,6)、(4,5,6) 非正三角形 (1,4,5)、(2,4,6)、(1,5,6)、(2,5,6)、 (3,4,6)、(3,4,5)	(1,3,4)、(2,3,4)、(1,2,3) (1,2,5)、(1,3,5)、 (1,2,6)、(2,3,6)	
方法數	3	10	6	1

- (3) ○： S 恰為 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 的機率為 $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ 。
 (4) ×：若 S 為 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ，則三點恰圍成正三角形的機率為 $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ 。
 (5) ○： $E(S) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{6}{20} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{20} \cdot \sqrt{3} = \frac{13}{40}\sqrt{3}$ 。故選(1)(2)(3)(5)。

三、選填題（占 25 分）

說明：第 13 題至第 17 題，每題 5 分。

13. 我們知道每一個等腰梯形都恰有一個外接圓，已知有一個等腰梯形 $ABCD$ ，上底 $\overline{AD} = 6$ ，下底 $\overline{BC} = 8$ ，高 $\overline{FH} = 7$ ，則外接圓的面積 = $\frac{\textcircled{13-1} \textcircled{13-2}}{\textcircled{13-3} \textcircled{13-4} \textcircled{13-5}} \pi$ 。



令 $\overline{OF} = x$ ， $\overline{OH} = 7 - x$ ，
 由 $\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 \Rightarrow 3^2 + x^2 = 4^2 + (7 - x)^2$ ，解得 $x = 4$ ，
 代入 $\overline{OA}^2 = 25$ ，即外接圓的面積 = 25π 。

14. 如下圖所示，每相鄰兩個圖，都是右邊比左邊增加一個或兩個正六邊形，每個正六邊形需要六根牙籤來排成，而相鄰的邊只需要一根牙籤，例如排成圖(二)需要 15 根牙籤，則排成圖(九十九)，需要 $\frac{\textcircled{14-1} \textcircled{14-2} \textcircled{14-3}}{\textcircled{14-4} \textcircled{14-5} \textcircled{14-6}} \text{ 根牙籤}$ 。



圖(一)



圖(二)



圖(三)



圖(四)



圖(五)

圖(一)： $a_1 = 6$ 。

圖(二)： $a_2 = 6 + 9$ 。

圖(三)： $a_3 = 6 + 9 + 4 = 6 + (9 + 4) \times \frac{3-1}{2}$ 。

圖(四)： $a_4 = 6 + 9 + 4 + 9$ 。

圖(五)： $a_5 = 6 + 9 + 4 + 9 + 4 = 6 + (9 + 4) \times \frac{5-1}{2}$ 。

由上述可知，在奇數圖的部分，可以歸納為 $a_n = 6 + (9 + 4) \times \frac{n-1}{2}$ ，

故圖(九十九)： $a_{99} = 6 + (9 + 4) \times \frac{99-1}{2} = 643$ 。

15. 投擲一枚均勻的骰子四次，已知至少一次出現過 5 點，那麼第三次出現 2 點的機率為

$$\frac{\textcircled{15-1} \textcircled{15-2}}{\textcircled{15-3} \textcircled{15-4} \textcircled{15-5}} \text{。}$$

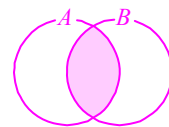
設四次中至少一次出現過 5 點的事件為 A ，四次中第三次出現 2 點的事件為 B 。

所求機率為 $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B) - P(A' \cap B)}{1 - P(A')}$ ，

$\therefore P(A') = \left(\frac{5}{6}\right)^4$ ， $P(B) = 1 \times 1 \times \frac{1}{6} \times 1 = \frac{1}{6}$ ，

$P(A' \cap B) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5^3}{6^4}$ ，

$\therefore P(B|A) = \frac{\frac{1}{6} - \frac{5^3}{6^4}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4} = \frac{91}{671}$ 。



16. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 2 \end{bmatrix}$ ，已知 $A^3 = \begin{bmatrix} a & b \\ -7 & c \end{bmatrix}$ ，則 $k+a+b+c = \underline{\quad(16)\quad}$ 。

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3k & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7k & 8 \end{bmatrix},$$

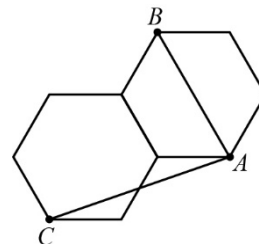
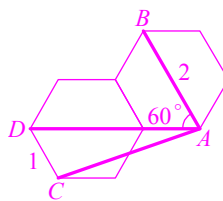
$$\therefore 7k = -7 \Rightarrow k = -1, a = 1, b = 0, c = 8$$

$$\text{故 } k+a+b+c = 8。$$

17. 右圖是將兩個邊長為 1 的正六邊形，共用一邊連接而成的平面圖形，

若 A, B, C 為其中三個頂點，則內積 $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ 的值为 (17) 。

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= \vec{AB} \cdot (\vec{AD} + \vec{DC}) \\ &= \vec{AB} \cdot \vec{AD} + \vec{AB} \cdot \vec{DC} \\ &= 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ + 2 \cdot 1 \cdot \cos 180^\circ \\ &= 6 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot (-1) = 3 - 2 = 1。 \end{aligned}$$

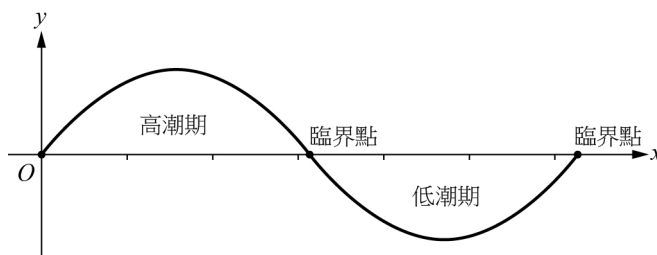


第貳部分：混合題或非選擇題（占 15 分）

說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

18-20 題為題組

奧地利的阿爾弗雷特·泰爾奇爾 (Alfred Teltcher) 教授，在研究學生的考試成績時，發現人的智力波動週期是 33 天。按正弦函數週期變化的規律，並用正弦曲線繪製出每個人的生物節律週期圖形，稱為生理節律曲線。



其中正半週期是高潮期，這時人的頭腦清晰，讀書效率高；負半週期為低潮期，這時的人健忘，成績低落。正弦曲線與橫軸交點這一天稱為「臨界點」。臨界點前後各 1 天稱為臨界期，人在節律轉折點（即臨界點）的日子容易精神恍惚，行為波動大，較常出現失誤。

計算人體生物節律的方法是可將出生時間到想了解的生理節律狀態的某月某日的總天數計算出來，然後將總天數除以 33，所得商數中的整數分別表示已經度過的週期數，而從商數中的餘數天數就可以斷定要了解的那天的生物節律曲線中的位置，進而了解的那天所處的狀態（高潮期、低潮期或臨界期）。

$$\text{計算通式為：} X = 365 \cdot A \pm B + C。$$

式中， X 為從出生日到計算日生活的總天數， A 為預測年份與出生年份之差， B 為本年生日到計算日的總天數，如未到生日則用「-」，已過生日則用「+」， C 為從出生以來到計算日的總閏年數（每四年一潤），即 $C=A \div 4$ 所得的整數。

例如，某人 2005 年 6 月 1 日出生，想了解他 2015 年 7 月 15 日所處的狀態。

首先求出生活總天數 X ：

$$X=365 \cdot (2015-2005)+(30+15)+[(2015-2005) \div 4]=3650+45+2=3697(\text{天}),$$

智力週期： $3697 \div 33=112 \cdots 1$ 。

表示該日為智力週期第 112 個週期的第 1 天，處於從低潮期進入高潮期的臨界期。

18. 若上述的智力生物節律曲線可用 $y=asin(bx)$ 表示，則正數 b 值為下列何者？（單選題，5 分）

- (1) $\frac{1}{33}$ (2) $\frac{\pi}{33}$ (3) $\frac{2\pi}{33}$ (4) 33 (5) 33π

由題意可知，智力的週期為 33，則 $\frac{2\pi}{b} = 33 \Rightarrow b = \frac{2\pi}{33}$ ，故選(3)。

19. 維也納大學的心理學教授 Hermann Swoboda 認為也存在一個 23 天的身體週期，若某人在 1 月 1 日剛好同時是身體週期和智力週期即將進入高潮期的**臨界點**，則下一次又是遇到相同狀況是幾天後？（非選擇題，4 分）

智力週期每 33 天出現一次，身體週期每 23 天出現一次，故兩者的最小公倍數即為下一次都是即將進入高潮期的臨界點，求 $[33, 23] = 759(\text{天})$ 。

20. 若出生在 2005 年 5 月 4 日的高二學生新衣，在 2023 年 1 月 21 日的學測當天，其狀態是屬於高潮期、低潮期或臨界期的哪一種？（非選擇題，6 分）

總天數 $= 365 \cdot (2023-2005) - (10+28+31+30+4) + [(2023-2005) \div 4] = 6570 - 103 + 4 = 6471$ ， $6471 \div 33 = 196 \cdots 3$ ，表示從出生日期經過 196 個週期，又過了 3 天，表示當天在高潮期。

答案與解析

答案

第壹部分：選擇(填)題

1.	4	2.	3	3.	3	4.	4	5.	5	6.	3	7.	5	8.	12345	9.	12	10.	135
11.	14	12.	1235	13.	25	14.	643	15.	$\frac{91}{671}$	16.	8	17.	1						

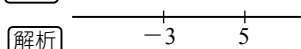
第貳部分：混合題或非選擇題

18.	3	19.	759	20.	高潮期
-----	---	-----	-----	-----	-----

解析

第壹部分：選擇(填)題

1. **答案** 4



(i) 當 $x \geq 5$ 時

$$\Rightarrow (x-5) + (x+3) \geq 10$$

$$\Rightarrow x \geq 6, \text{ 得 } x \geq 6。$$

(ii) 當 $-3 \leq x < 5$ 時

$$\Rightarrow -(x-5) + (x+3) \geq 10$$

$$\Rightarrow 8 \geq 10 \text{ (不合)}。$$

(iii) 當 $x < -3$ 時 $\Rightarrow -(x-5) - (x+3) \geq 10$

$$\Rightarrow 2x \leq -8 \Rightarrow x \leq -4, \text{ 得 } x \leq -4。$$

由(i)(ii)(iii)得 $x \geq 6$ 或 $x \leq -4$ 。

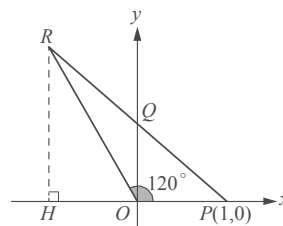
故選(4)。

2. **答案** 3

解析 在沒有電腦可用的情況下，只能憑著觀察，若不是零相關（例如：點根據 x 軸的平行線對稱或根據 y 軸的平行線對稱等），只要是五個點的分布愈接近一條斜率不為零的直線，則相關係數絕對值就愈大。故選(3)。藉由 Geogebra 可計算得到各散布圖五個點的相關係數為(1) 0.521；(2) 0.314；(3) 0.976；(4) -0.63；(5) -0.913。

3. **答案** 3

解析 如下圖，由 R 向 x 軸做垂線，設垂足為 H ， $\overline{PQ} = \overline{QR}$ ， \overline{RH} 平行 \overline{QO} ，故 $\overline{HO} = \overline{OP} = 1$ ， $\angle POR = 120^\circ$ ，故 $\angle HOR = 60^\circ$ ， $\overline{HO} = 1$ ，則 $\overline{RH} = \sqrt{3}$ ， $\overline{PR} = \sqrt{7}$ ，故 $\sin \angle OPQ = \sin \angle HPR = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$ ，故選(3)。



4. **答案** 4

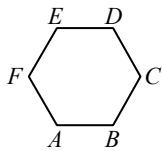
解析 $y = 3(x+2)^2 + 4$ 表示由 $y = 3x^2$ 向左移 2 單位，再向上移 4 單位而得，點亦由 (a, b) 左移 2，上移 4，得 $(a-2, b+4)$ ，故選(4)。

5. **答案** 5

解析 矩形只有 $ABDE, BCEF, CDEA$ 共 3 個，

$$\text{所求機率} = \frac{3}{C_4^6} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5},$$

故選(5)。



6. **答案** 3

解析 假設原來放射性碘的數量是 N_0 ， a 是每天的蛻變率，經過 8 天後數量變成 $N_0 \cdot a^8$ 。

$$\text{由 } N_0 \cdot a^8 = \frac{1}{2} N_0, x \text{ 天後數量變成 } \frac{1}{6} N_0,$$

$$N_0 \cdot a^x = \frac{1}{6} N_0, \text{ 得到聯立方程式 } \begin{cases} a^8 = \frac{1}{2} \\ a^x = \frac{1}{6} \end{cases},$$

上下兩式兩邊取對數

$$\begin{cases} 8 \log a \approx -0.3010 \\ x \log a \approx -0.3010 - 0.4771 \end{cases},$$

上下兩式左右各自相除得 $\frac{8}{x} \approx \frac{0.3010}{0.7781}$ ，得

到 $x \approx 20.68$ ，最小正整數的 x 是 21，

故至少要過 21 天後，放射性元素的數量會

由 N_0 變成 $\frac{N_0}{6}$ 。故選(3)。

7. **答案** 5

解析 (i) 甲□…□ 甲的緊鄰右邊不排乙、丙
 $\Rightarrow C_1^5 \times 6! = 3600$ 。

(ii) □…□甲 甲的緊鄰左邊不排乙、丙
 $\Rightarrow C_1^5 \times 6! = 3600$ 。

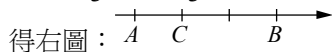
(iii) …□甲□… 甲的緊鄰左、右不排乙、丙
 $\Rightarrow P_2^5 \times 5! \times 6 = 14400$ 。

排法有 $3600 + 3600 + 14400 = 21600$ (種)。
 故選(5)。

8. **答案** 12345

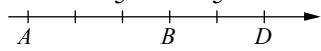
解析 利用內分點公式：

$$\vec{OC} = \frac{2}{3} \vec{OA} + \frac{1}{3} \vec{OB},$$

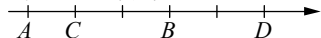


$$\vec{OD} = \frac{5}{3} \vec{OB} - \frac{2}{3} \vec{OA}$$

$$\Rightarrow \vec{OB} = \frac{2}{5} \vec{OA} + \frac{3}{5} \vec{OD}, \text{ 得下圖:}$$



綜合上述得下圖：



故選(1)(2)(3)(4)(5)。

9. **答案** 12

解析 智傑身高 179 公分，只要投籃命中率六成以上一定選上，現在遴選沒上不是身高的問題，一定是投籃命中率未達六成，故選(1)(2)。

10. **答案** 135

解析 (1) ○：迴歸線必過 $(\mu_x, \mu_y) = (6, 8)$ 。

$$(2) \times : m = \frac{8-3}{6-3} = \frac{5}{3},$$

$$\therefore \text{迴歸線為 } y-3 = \frac{5}{3}(x-3)$$

$$\Rightarrow y = \frac{5}{3}x - 2.$$

$$(3) \circ : m = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \Rightarrow \frac{5}{3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{20}{9} \therefore \sigma_y > \sigma_x.$$

(4) ×：∵ 2 與 -5 異號，

$$\therefore r' = -r = -0.75.$$

(5) ○：標準化數據 $m' = r = 0.75$ 。

故選(1)(3)(5)。

11. **答案** 14

解析 (1) ○：緯距約為 $\frac{2\pi \cdot 20}{360} = \frac{\pi}{9}$ 。

(2) ×：北緯 20 度的經距和南緯 20 度的經距約相等。

(3) ×：先求出北緯 60 度的小圓半徑為 10，
 經距為 $s = r\theta = 10 \times \frac{\pi}{6} = \frac{5}{3}\pi$ 。

(4) ○：經線長 = 大圓的圓周長
 $= 2\pi \cdot 20 = 40\pi$ 。

(5) ×：由斜上方對著球心照射，則在桌面上的投影圖形應為橢圓形。

故選(1)(4)。

12. **答案** 1235

解析 (1) ○：所有的選法 $C_3^6 = 20$ 。

(2) ○：S 的取值有 4 種。

S 值	0	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
類型	共線的三點 (1,3,6)、 (1,2,4)、 (2,3,5)	正三角形 (1,4,6)、(2,4,5)、 (3,5,6)、(4,5,6)	非正三角形 (1,4,5)、(2,4,6)、 (1,5,6)、(2,5,6)、 (3,4,6)、(3,4,5)	(1,3,4)、(1,2,3)、 (2,3,4)、 (1,2,5)、 (1,3,5)、 (1,2,6)、 (2,3,6)
方法數	3	10	6	1

(3) ○：S 恰為 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 的機率為 $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ 。

(4) ×：若 S 為 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ，則三點恰圍成正三角形的機

$$\text{率為 } \frac{4}{10} = \frac{2}{5}。$$

$$(5) \circ : E(S) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{6}{20} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{20} \cdot \sqrt{3} = \frac{13}{40} \sqrt{3}。$$

故選(1)(2)(3)(5)。

13. **答案** 25

解析 令 $\overline{OF} = x$, $\overline{OH} = 7 - x$,
由 $\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 \Rightarrow 3^2 + x^2 = 4^2 + (7 - x)^2$, 解
得 $x = 4$, 代入 $\overline{OA}^2 = 25$,
即外接圓的面積 $= 25\pi$ 。

14. **答案** 643

解析 圖(一): $a_1 = 6$ 。
圖(二): $a_2 = 6 + 9$ 。
圖(三): $a_3 = 6 + 9 + 4 = 6 + (9 + 4) \times \frac{3-1}{2}$ 。
圖(四): $a_4 = 6 + 9 + 4 + 9$ 。
圖(五): $a_5 = 6 + 9 + 4 + 9 + 4$
 $= 6 + (9 + 4) \times \frac{5-1}{2}$ 。
由上述可知, 在奇數圖的部分, 可以歸納為
 $a_n = 6 + (9 + 4) \times \frac{n-1}{2}$,
故圖(九十九):
 $a_{99} = 6 + (9 + 4) \times \frac{99-1}{2} = 643$ 。

15. **答案** $\frac{91}{671}$

解析 設四次中至少一次出現過 5 點的事件為 A ,
四次中第三次出現 2 點的事件為 B 。

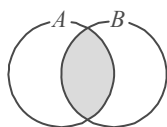
$$\begin{aligned} \text{所求機率為 } P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{P(B) - P(A' \cap B)}{1 - P(A')} \end{aligned}$$

$$\because P(A') = \left(\frac{5}{6}\right)^4,$$

$$P(B) = 1 \times 1 \times \frac{1}{6} \times 1 = \frac{1}{6},$$

$$P(A' \cap B) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5^3}{6^4},$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{\frac{1}{6} - \frac{5^3}{6^4}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4} = \frac{91}{671}。$$



16. **答案** 8

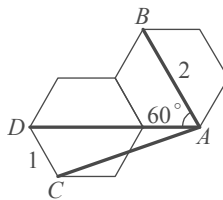
解析
$$\begin{aligned} A^3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3k & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7k & 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore 7k = -7 \Rightarrow k = -1, a = 1, b = 0, c = 8$$

故 $k + a + b + c = 8$ 。

17. **答案** 1

解析
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} \\ &= 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ + 2 \cdot 1 \cdot \cos 180^\circ \\ &= 6 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot (-1) = 3 - 2 = 1。 \end{aligned}$$



第貳部分：混合題或非選擇題

18. **答案** 3

解析 由題意可知, 智力的週期為 33, 則
$$\frac{2\pi}{b} = 33 \Rightarrow b = \frac{2\pi}{33}, \text{ 故選(3)。}$$

19. **答案** 759

解析 智力週期每 33 天出現一次, 身體週期每 23 天出現一次, 故兩者的最小公倍數即為下一次都是即將進入高潮期的臨界點,
求 $[33, 23] = 759(\text{天})$ 。

20. **答案** 高潮期

解析 總天數 $= 365 \cdot$
 $(2023 - 2005) - (10 + 28 + 31 + 30 + 4) +$
 $[(2023 - 2005) \div 4]$
 $= 6570 - 103 + 4 = 6471,$
 $6471 \div 33 = 196 \cdots 3,$
表示從出生日期經過 196 個週期, 又過了 3 天, 表示當天在高潮期。