數與式

1、數系：

- 複數 ($\mathbb{C}$) ($a+bi$)
  - 實數 ($\mathbb{R}$)（數線上的數）
    - 有理數 ($\mathbb{Q}$)（分數）
      - 整數 ($\mathbb{Z}$)
        - 正整數 ($\mathbb{N}$)
        - 0
        - 負整數
      - 有限小數
      - 循環小數
    - 無理數（無限不循環小數）
  - 虛數（有 i 的數）

(1) 整數的離散性：若 $a,b\in\mathbb{Z}$ 且 $a\neq b$，則 $|a-b|\geq 1$

<cf> 有理數、無理數、實數的稠密性：若 $a,b\in\mathbb{Q}$ 且 $a\neq b$，則必存在 $c\in(a,b)$ 且 $c\in\mathbb{Q}$

(2) 循環小數化分數：$0.\overline{ab}=\dfrac{ab}{99}$，$0.a\overline{bc}=\dfrac{abc-a}{990}$，$a.b\overline{c}=\dfrac{abc-ab}{90}$

(3) 分數可化有限小數的條件：最簡分數的分母質因數僅 2 or 5 $\left(\dfrac{a}{10^n}\right)$

(4) 雙根號的化簡：$\sqrt{(a+b)\pm2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ $(a>b)$

(5) 複數 $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R}，i=\sqrt{-1})$

① i 的性質：$i=\sqrt{-1}$，$i^2=-1$，$i^3=-i$，$i^4=1$，$i^5=i$，....

* 四次一循環：$i^{4k+1}=i$，$i^{4k+2}=-1$，$i^{4k+3}=-i$，$i^{4k}=1$

* 連續四項和為0：$i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}=i^n(1+i+i^2+i^3)=0$

② 複數運算：

$(a+bi)+(c+di)=\underline{(a+c)+(b+d)i}$

$(a+bi)-(c+di)=\underline{(a-c)+(b-d)i}$

$(a+bi)(c+di)=\underline{ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i}$

$$\frac{a+bi}{c+di}=\underline{\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bci-adi-bdi^2}{c^2-(di)^2}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)+\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i}$$

Ex1：設 a,b,c 均為整數，且 $|a-1|+2\sqrt{b-2}+3(c-3)^2=2$，求序對 (a,b,c) 有幾組？

Sol：key：<u>係數大</u> 先討論．

若 $c\neq3\Rightarrow3(c-3)^2\geq3$（不合）

$\therefore c=3$

若 $b\neq2\Rightarrow2\sqrt{b-2}\geq2\Rightarrow b=3$

case 1：$b=3\Rightarrow|a-1|=\cancel{x}\,0\Rightarrow a=1$

case 2：$b=2\Rightarrow|a-1|=2\Rightarrow a=-1$ or 3

$\therefore$ <u>3 組解</u>

Ex 2: 設 a, b 均為正整數, 且 $\frac{b}{a}=0.2\overline{3}$,

求 a−b 的最小值。

Sol: $0.2\overline{3}=\frac{23-2}{90}=\frac{7}{30}$

$\therefore a=30t,\ b=7t,\ t\in\mathbb{N}$

$\therefore a-b=23t\geq 23$

23 #

Ex 3: 將 $\frac{79}{555}$ 化為小數, 求小數點後第 100 位數字為何?

↳ 找規律

Sol:

$$\begin{array}{r} 0.14234\cdots \\ 555\,\overline{)\,790} \\ 555 \\ \hline 2350 \\ 2220 \\ \hline 1300 \\ 1110 \\ \hline 1900 \\ 1665 \\ \hline 2350 \end{array}$$

$\therefore \frac{79}{555}=0.1\overline{423}$

$=0.1423423423\cdots$

$100\div 3\cdots 1$

∴第 1, 4, 7, ……, 100 位數字相同

3 #

Ex 4: 有關循環小數, 下列何者正確?

(1) $0.\overline{3}+0.\overline{7}=1.\overline{1}$ (2) $0.\overline{45}+0.\overline{55}=1$

(3) $0.\overline{2}+0.\overline{3}=0.\overline{5}$ (4) $0.\overline{9}=1$

Sol: (1)

$$\begin{array}{r} 0.333\cdots \\ 0.777\cdots \\ \hline 1.111\cdots \end{array}$$

$0.\overline{3}=\frac{3}{9}$ $0.\overline{7}=\frac{7}{9}$. $1.\overline{1}=\frac{11-1}{9}=\frac{10}{9}$

(2)

$$\begin{array}{r} 0.454545\cdots \\ 0.555555\cdots \\ \hline 1.01010\cdots \end{array}$$

$0.\overline{45}=\frac{45}{99}$, $0.\overline{55}=\frac{55}{99}$

(1)(3)(4) #

Ex 5: $\frac{12345a}{36}$ 可以化為有限小數,

且 a 是 0~9 中的整數, 求 a。

Sol: 可化有限小數 ⇒ 分母只有 2 或 5 質因數

$\therefore$ 12345a 是 9 的倍數 ⇒ 數字和是 9 的倍數

$1+2+3+4+5+a=15+a$

$\therefore a=3$ #

Ex 6: 關於有理數、無理數, 下列何者正確?

(1) 若 a, b 都是無理數, 則 a+b 是無理數。

(2) 若 a, b 都是無理數, 則 ab 是無理數。

(3) 若 a 是有理數, b 是無理數, 則 a+b 是無理數。

(4) 若 a 是有理數, b 是無理數, 則 ab 是無理數。

(5) 若 a+b, a−b 都是有理數, 則 a, b 都是有理數。

《討論》

a	b	a+b	ab	$\frac{a}{b}$
有理	有理	有	有	有
有理	無理	無	有 or 無	有 or 無
無理	無理	有 or 無	有 or 無	有 or 無

Sol: (3)(5) #

(5)

$a=\frac{(a+b)+(a-b)}{2}\in\mathbb{Q}$

$b=\frac{(a+b)-(a-b)}{2}\in\mathbb{Q}$

Ex7：下列敘述，何者正確？

(1) $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$，則 $a=c$，$b=d$

(2) 若 $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$ 且 $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$，則 $a=c$，$b=d$

(3) 若 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ 且 $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$，則 $a=c$，$b=d$

(4) 若 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ 且 $a+bi=c+di$，則 $a=c$，$b=d$.

(5) 若 $a+bi=c+di$，則 $a=c$，$b=d$

Sol：$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$

(2)(4) #

(3) $a=0$，$b=\sqrt{2}$，$c=2$，$d=0$

(5) $a=i$，$b=1$，$c=0$，$d=2$

Ex8：$n\in\mathbb{N}$ 且 $n<\sqrt{13+2\sqrt{40}}<n+1$，求 n 值。

Sol：① 估計 ⇒ 放入 $\sqrt{\ }$

$\sqrt{13+2\sqrt{40}}=\sqrt{8}+\sqrt{5}=4.\cdots$ or $5.\cdots$

(不佳)

$\sqrt{13+\sqrt{160}}\doteq\sqrt{13+12.\cdots}\doteq\sqrt{25.\cdots}\doteq5.\cdots$

$n=5$ #

Ex9：已知 $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$ 的整數部分為 a，小數部分為 b，求 a−b 的值。

Sol：$\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{5}-1$

$a=1$

$b=$ 全−整數 $=\sqrt{5}-2$

$\therefore a-b=3-\sqrt{5}$

Ex10：將下列複數化為 a+bi 的形式．

(1) i^{2018} (2) $\underbrace{1+i+i^2+\cdots+i^{100}}_{101\text{項}}$ (3) $(2-3i)+(-3+5i)$ (4) $(1+2i)(2-i)$

(5) $\dfrac{2-i}{1+i}$ (6) $(1+i)^2$ (7) $\sqrt{i}$

Sol：

(1) $i^{2018}=i^2=-1$

(2) $1+(\underbrace{\quad 0 \quad}_{100\text{項}})=1$

(3) $-1+2i$

(4) $2-i+4i-2i^2$

$=4+3i$

(5) $\dfrac{2-i}{1+i}\times\dfrac{1-i}{1-i}=\dfrac{2-2i-i+i^2}{2}$

$=\frac{1}{2}+(\frac{-3}{2})i$

(6) $(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$

(7) $\sqrt{i}=\sqrt{0+2\sqrt{\frac{-1}{4}}}$

$=\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$

2、乘法公式：

(1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a+b+c)^2=$ $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

(2) $(a+b)^3=$ $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, $(a-b)^3=$ $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(3) $a^3+b^3=$ $(a+b)(a^2-ab+b^2)$ (因式分解) $=$ $(a+b)^3-3ab(a+b)$ (求值公式)

$a^3-b^3=$ $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ (因式分解) $=$ $(a-b)^3+3ab(a-b)$ (求值公式)

(4) $x^n-1=$ $(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$

Ex11：設 $x=\sqrt{5}-2$，求下列各式的值。

(1) $x+\frac{1}{x}$ (2) $x^2+\frac{1}{x^2}$ (3) $x^3+\frac{1}{x^3}$

Sol:

(1) $\sqrt{5}-2+\frac{1}{\sqrt{5}-2}=\sqrt{5}-2+\frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\sqrt{5}-2+\sqrt{5}+2=2\sqrt{5}$

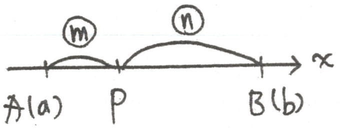
(2) $x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{x}=(2\sqrt{5})^2-2\times1=18$

(3) $x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})^3-3\cdot x\cdot\frac{1}{x}(x+\frac{1}{x})=(2\sqrt{5})^3-3\times1\times2\sqrt{5}=40\sqrt{5}-6\sqrt{5}=34\sqrt{5}$

3. 分點公式：設 A, B 兩點在數線上分點為 a, b

(1) 若 P 為 A, B 的中點，則 $P=\frac{A+B}{2}$，亦即 P 點坐標 $\frac{a+b}{2}$

(2) 若 P 在 $\overline{AB}$ 上且 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$，則 $P=$ $\frac{mB+nA}{m+n}$ $=\frac{mb+na}{m+n}$

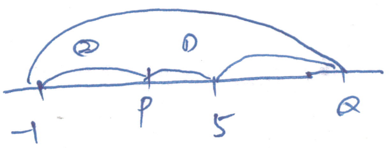


Ex12：數線上兩點 A(-1), B(5)

(1) P 在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}:\overline{PB}=2:1$，求 P 點。

(2) Q 在 $\overline{AB}$ 外，且 $\overline{AQ}:\overline{QB}=2:1$，求 Q 點。

Sol:



(1) $P=\frac{2\times5+1\times(-1)}{2+1}=\frac{9}{3}=3$

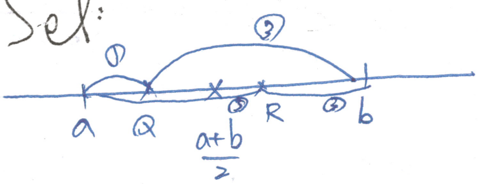
(2) $Q\Rightarrow Q=11$

$(AP:PQ=1:1)$

Ex13：設 $a<b$，試比較 P, Q, R

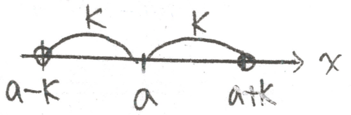
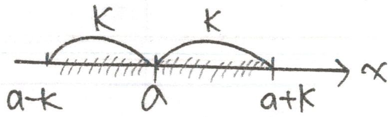
$P=\frac{a+b}{2}$, $Q=\frac{3a+b}{4}$, $R=\frac{3a+5b}{8}$

Sol:



$Q<P<R$

4. 絕對值

	[想法一] 距離	[想法二] 正負(討論)
$\lvert x\rvert$	表示 x 到原点 0 的距離	$\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$
$\lvert x-a\rvert$	表示 x 到点 a 的距離	$\begin{cases} x-a, & x\geq a \\ -(x-a), & x<a \end{cases}$
$\lvert x-a\rvert=k$	 $\therefore x=a+k$ 或 $a-k$	① 若 $x\geq a \Rightarrow x-a=k \Rightarrow x=a+k$ (合) ② 若 $x<a \Rightarrow x-a=-k \Rightarrow x=a-k$ (合) 由①.②知 $x=a+k$ 或 $a-k$
$\lvert x-a\rvert<k$	 $\therefore a-k<x<a+k$	① 若 $x\geq a \Rightarrow x-a<k \Rightarrow x<a+k$ 取交集: $a\leq x<a+k$ ② 若 $x<a \Rightarrow -(x-a)<k \Rightarrow x-a>-k$ $\Rightarrow x>a-k$ 取交集: $a-k<x<a$ 由①.②知(取聯集): $a-k<x<a+k$

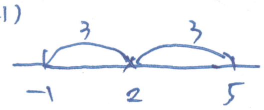
Ex14: 解下列不等式:

(1) $|x-2|=3$ (2) $|2x+3|=5$

(3) $3\leq|2x-1|<7$

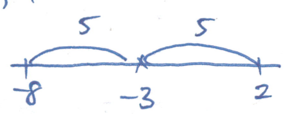
Sol: [想法一]

(1)



$\therefore x=-1$ or 5

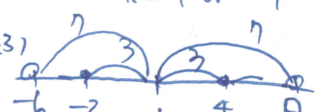
(2) $|2x-(-3)|=5$



$2x=2$ or -8

$\therefore x=1$ or -4

(3)



$\therefore 4\leq 2x<8$ or $-6<2x\leq -2$

$\therefore 2\leq x<4$ or $-3<x\leq -1$

[想法二]

(1) $x-2=\pm 3$

$x=2\pm 3=5$ or -1

(2) $2x+3=\pm 5$

$\Rightarrow 2x=-3\pm 5=2$ or -8

$\Rightarrow x=1$ or -4

(3) $3\leq|2x-1|<7$

$\Rightarrow 3\leq 2x-1<7$

or $3\leq -(2x-1)\leq 7$

⋮

Ex15: 求下列各條件之 a.b 值

(1) $|x-a|\leq b$ 之解為 $-2\leq x\leq 8$

(2) $|ax+3|\leq b$ 之解為 $-1\leq x\leq 4$

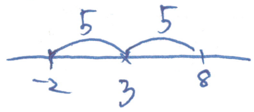
Sol: (1) [想法一]

$-b\leq x-a\leq b$

$\underbrace{a-b}_{=-2}\leq x\leq \underbrace{a+b}_{=8}$

$\begin{cases} a-b=-2 \\ a+b=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=3 \\ b=5 \end{matrix}$

[想法二]



$\therefore |x-3|\leq 5$

$\therefore a=3,\ b=5$

(2) $-b\leq ax+3\leq b$

Case 1: $a>0$: $\frac{-b-3}{a}\leq x\leq\frac{b-3}{a}$

Case 2: $a<0$: $\frac{-b-3}{a}\geq x\geq\frac{b-3}{a}$

$\begin{cases} \frac{-b-3}{a}=4 \\ \frac{b-3}{a}=-1 \end{cases}$ $\therefore \frac{-b-3}{b-3}=-4$

$b+3=4b-12$

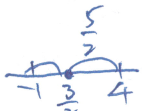
$3b=15,\ b=5,\ a=-2$ (合)

$\begin{cases} \frac{-b-3}{a}=-1 \\ \frac{b-3}{a}=4 \end{cases} \Rightarrow \frac{-b-3}{b-3}=\frac{-1}{4}$

$\Rightarrow -4b-12=-b+3$

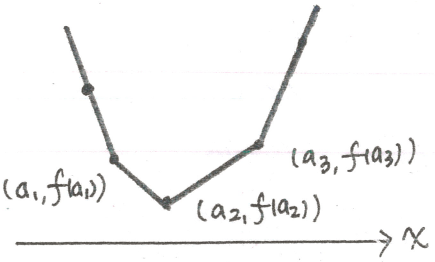
$\Rightarrow 3b=-15,\ b=-5$

$\Rightarrow a=-2$ (不合)

[想法二]  $\Rightarrow \left|x-\frac{3}{2}\right|\leq\frac{5}{2} \Rightarrow |2x-3|\leq 5 \Rightarrow |-2x+3|\leq 5$

5、絕對值函數 $\Longrightarrow$ 圖形為折線圖（轉折點是絕對值內為 0）

$f(x)=|x-a_1|+|x-a_2|+|x-a_3|$



《例》 $f(x)=|x+2|+|x|+|x-1|$

討論 Ⅳ Ⅲ Ⅱ Ⅰ（-2　0　1）

Ⅰ $x\geq 1$：$f(x)=x+2+x+x-1=3x+1$

Ⅱ $0\leq x\leq 1$：$f(x)=x+2+x-(x-1)=x+3$

Ⅲ $-2\leq x\leq 0$：$f(x)=x+2-x-(x-1)=-x+3$

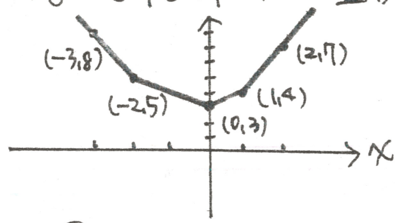
Ⅳ $x\leq -2$：$f(x)=-(x+2)-x-(x-1)=-3x-1$

STEP1：描點 $\longrightarrow$

x	-3	-2	0	1	2
$f(x)$	8	5	3	4	7

ⅠⅡⅢⅣ 圖形均為直線

STEP2：連線 $\longrightarrow$



Ex16：解下列絕對值方程式或不等式

(1) $|x+1|=|2x+1|-2$

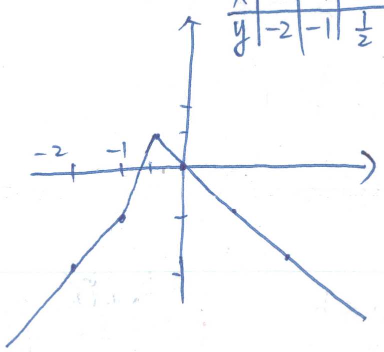
Sol:

[法一]

$y=|x+1|-|2x+1|$
$y=-2$

$|x+1|-|2x+1|=-2$

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0
y	-2	-1	$\frac{1}{2}$	0



$x=2,-2$

[法二] 討論 Ⅲ Ⅱ Ⅰ（-1　$-\frac{1}{2}$）x

Ⅰ $x\geq -\frac{1}{2}$：$x+1=2x+1-2 \Rightarrow x=2$（合）

Ⅱ $-1\leq x\leq -\frac{1}{2}$：$x+1=-(2x+1)-2$

$\Rightarrow 3x=-4 \Rightarrow x=-\frac{4}{3}$（不合）

Ⅲ $x\leq -1$：$-(x+1)=-(2x+1)-2$

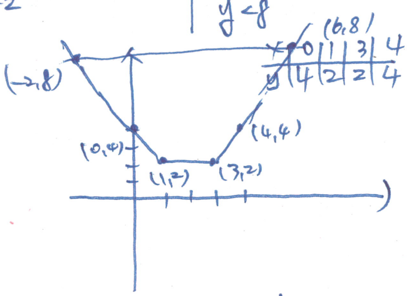
$\Rightarrow x=-2$（合）

$\therefore x=2$ or -2

(2) $|x-1|+|x-3|<8$

$y=|x-1|+|x-3|$
$y<8$

x	0	1	3	4
y	4	2	2	4



$-2<x<6$.

[法二] Ⅲ Ⅱ Ⅰ（1　3）

Ⅰ $x\geq 3$：$(x-1)+(x-3)<8$

$\Rightarrow 2x<12 \Rightarrow x<6$

取交集 $3\leq x<6$

Ⅱ $1\leq x\leq 3$：$(x-1)-(x-3)<8$

$2<8 \Rightarrow x\in\mathbb{R}$

取交集 $1\leq x\leq 3$

Ⅲ $x\leq 1$：$-(x-1)-(x-3)<8$

$\Rightarrow -2x<4$

$\Rightarrow x>-2$

取交集 $-2<x\leq 1$

由Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ

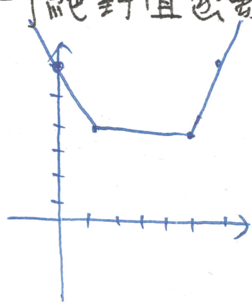
$-2<x<6$

Ex17：求 $|x-1|+|x-5|$ 的最小值

Sol:

[法一] 絕對值函數

x	0	1	5	6
y	6	4	4	6



[法二] 三角不等式：$|a|+|b|\geq|a+b|$

$|x-1|+|5-x|\geq|(x-1)-(5-x)|$

$=4$

[法三] 討論

Ⅲ Ⅱ Ⅰ（1　5）

Ⅰ $x\geq 5$：$f(x)=x-1+x-5=2x-6\geq 4$

Ⅱ $1\leq x\leq 5$：$f(x)=x-1-(x-5)=4$

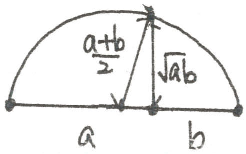
Ⅲ $x\leq 1$：$f(x)=-(x-1)-(x-5)=-2x+6\geq 4$

$\therefore \min=4$

6、算幾不等式 $\Longrightarrow$ 使用時機 相加、相乘.

設 $a, b>0$，則 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

pf: 以 $a+b$ 為直徑，作半圓

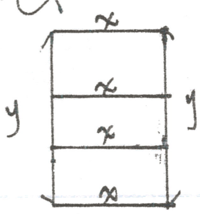


"$=$"成立時，$a=b$

若 $x>0 \Rightarrow x+\frac{1}{x}$ ≥ 2 .（常見的條件限制）

Ex1: 小明想用鐵絲圍成面積 18cm^2 的「目」字區域（如圖），則他至少要準備多少的鐵絲？

Sol:



已知 $xy=18$

求 $4x+2y$ 之 min

$\frac{4x+2y}{2} \geq \sqrt{(4x)(2y)}$

$\Rightarrow 4x+2y \geq 2\sqrt{8\times 18} = 24$

"$=$"成立 $4x=2y=12$

當 $(x,y)=(3,6)$ 時，有 $\min=24$

Ex2: 試求下列各式的最小值。

(1) $x>0$，$x+\frac{4}{x}$ $\Rightarrow$ 隱含相乘條件

(2) $x>0$，$\frac{x^2+4x+9}{x}$

Sol:

(1) $\frac{x+\frac{4}{x}}{2} \geq \sqrt{x\left(\frac{4}{x}\right)} \Rightarrow x+\frac{4}{x} \geq 4$

(2) $x+4+\frac{9}{x}$

$\frac{x+\frac{9}{x}}{2} \geq \sqrt{x\cdot\frac{9}{x}} \Rightarrow x+\frac{9}{x} \geq 6$

$\therefore x+4+\frac{9}{x} \geq 10$.

<cf.> 求最大最小值。

(1) 配方法 $\Rightarrow$ 使用時機 二次函數

《例》 $f(x)=2x^2+4x+9=2(x+1)^2+7$

當 $x=$ -1，$f(x)$ 有最小值 7

延伸：設 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$

$f(x)=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2$，當 $x=$ $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$（平均）時，$f(x)$ 有最小值。

$f(x)=|x-a_1|+|x-a_2|+\cdots+|x-a_n|$，當 $x=$ $a_{\frac{n+1}{2}}$（中位數）時，$f(x)$ 有最小值。

（請 P6. 討論，x 係數全正 → 全負
$\Rightarrow$ +,− 變換時有 min）