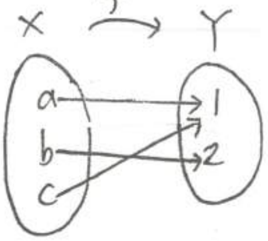
多項式

1、函數：對每一個 x，"存在唯一" 的 y 值，使得 $x \xrightarrow{f} y$。

稱 y 是 x 的一個函數，記作 $f(x)=y$。



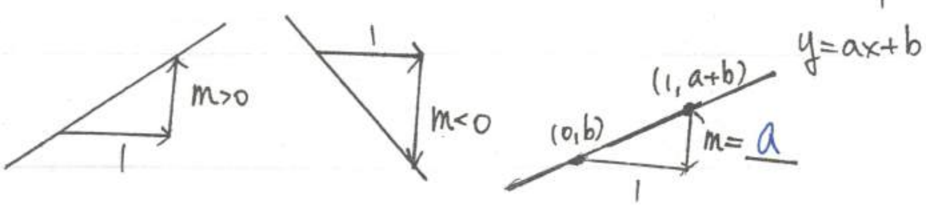
X 所成的集合稱為 定義域

$f(x)=Y$ 所成的集合稱為 值域

2、線性函數：$f(x)=y=ax+b$

- $a\neq 0$ 稱為 一次函數，圖形為斜直線
- $a=0$ 稱為 常數函數，圖形為水平線

(1) 斜率 m：向右 1 單位，鉛直的變化量稱為斜率。



$\Rightarrow y=ax+b$ 的斜率 $m=$ a

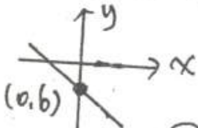
◎ 給定過兩點 (x_1,y_1)，(x_2,y_2) 的直線斜率 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

(2) a，b 的意義：

a 表示 斜率

- ① 正負：$a>0$ 表示 ／；$a<0$ 表示 ＼
- ② 大小：$|a|$ 越大，表示直線越 斜

b 表示 y 截距（與 y 軸交點坐標）

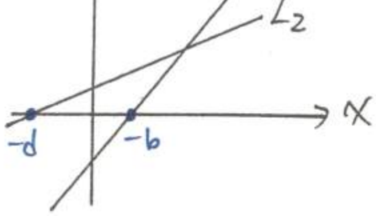


Ex1：二直線 L_1，L_2 之方程式分別為

$L_1: x+ay+b=0$，$L_2: x+cy+d=0$，

試問下列哪些選項是正確的？

(1) $a>0$ (2) $b>0$ (3) $c>0$ (4) $d>0$ (5) $a>c$



Sol：L_1 過 $(-b,0) \Rightarrow b<0$

L_2 過 $(-d,0) \Rightarrow d>0$

$m_{L_1}=\frac{-1}{a}>0 \Rightarrow a<0$

$m_{L_2}=\frac{-1}{c}>0 \Rightarrow c<0$

$m_{L_1}>m_{L_2} \Rightarrow \frac{-1}{a}>\frac{-1}{c}$

$\Rightarrow -c>-a$

$\Rightarrow a>c$

(4)(5)#

Ex2：某次段考，全班最高分和最低分分別為 70 分和 20 分。老師依據線性函數調整，使得最高分和最低分為 90 分和 60 分。已知某生調整後為 81 分，試問該生的原始成績為何？

Sol：設 $f(x)=ax+b$

$20a+b=60 \cdots ①$

$70a+b=90 \cdots ②$

②－①：$50a=30$

$a=\frac{3}{5}$，$b=48$

$81=\frac{3}{5}x+48$

$\Rightarrow \frac{3}{5}x=33$

$\Rightarrow x=55$#

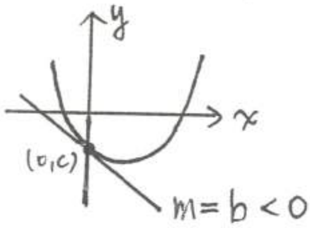
3、二次函數：$f(x)=y=ax^2+bx+c$ ，圖形為拋物線
($a\neq0$)

(1) a、b、c、D 的意義：

a表示 開口

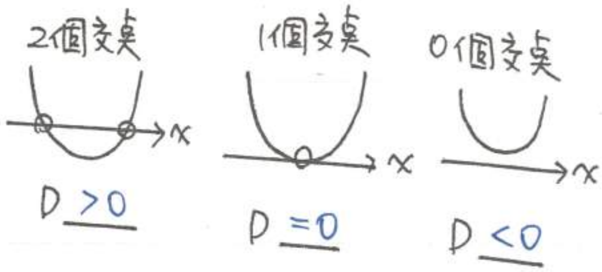
- ①正負：$a>0$ 表示 ∪ ；$a<0$ 表示 ∩
- ②大小：$|a|$ 越大，表示開口越 窄

b表示 y截距之切線斜率



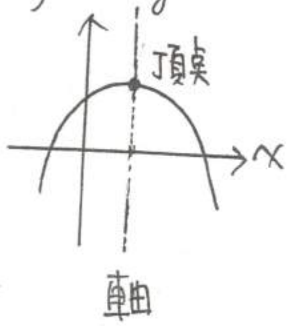
c表示 y截距

$D=b^2-4ac$ 表示 與x軸之交點個數



(2) 求最大、最小值：

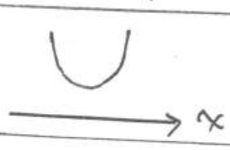
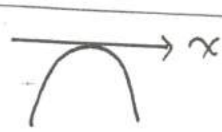
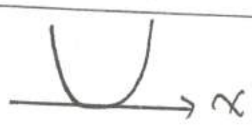
$$f(x)=y=ax^2+bx+c \xrightarrow{\text{配方}} y=a(x-h)^2+k$$



頂點為 (h,k) ；對稱軸為 $x-h=0$

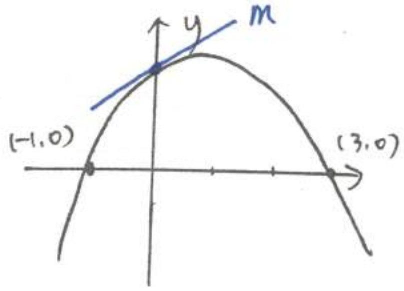
- $a>0$：當 $x=h$ 時，$f(x)$ 有最小值 k。(頂點是圖形最低點)
- $a<0$：當 $x=h$ 時，$f(x)$ 有最大值 k。(頂點是圖形最高點)

(3) 恆正、恆負：

	圖形	方程式
① 恆正 ($f(x)>0$, $\forall x$)		$a>0$, $D<0$
② 恆負 ($f(x)<0$, $\forall x$)		$a<0$, $D<0$
③ 恆非正 ($f(x)\leq0$, $\forall x$)		$a<0$, $D\leq0$
④ 恆非負 ($f(x)\geq0$, $\forall x$)		$a>0$, $D\leq0$

Ex3：已知 $y=f(x)=ax^2+bx+c$ 的圖形，則下列哪些選項正確？

(1) $a<0$　(2) $b>0$　(3) $b^2-4ac<0$　(4) $c=-3a$　(5) $5a-2b+c>0$



Sol：
(1) $a<0$ (開口向下)
(2) $m=b>0$
(3) 2個交點 $\Rightarrow D>0$
(4) $f(x)=a(x+1)(x-3)$
$=ax^2-2ax-3a$
$\therefore b=-2a,\ c=-3a$
(5) $5a-2b+c$
$=5a+4a-3a<0$

(1)(2)(4) #

Ex4：設 $a<b<c$，$y=f(x)$ 的圖形是開口向上的拋物線，與 x 軸交於 $(a,0),(b,0)$，$y=g(x)$ 的圖形也是開口向上的拋物線，與 x 軸交於 $(b,0),(c,0)$。試求 $y=f(x)+g(x)$ 的圖形可能的選項。

(1) 水平線　(2) 和 x 軸交於一點的直線　(3) 和 x 軸無交點的拋物線
(4) 和 x 軸交於一點的拋物線　(5) 和 x 軸交於二點的拋物線.

Sol：
$f(x)=k(x-a)(x-b)$，$k>0$
$g(x)=t(x-b)(x-c)$，$t>0$

$f(x)+g(x)=(x-b)[k(x-a)+t(x-c)]$
$=(k+t)(x-b)\left(x-\frac{ka+tc}{k+t}\right)$

二次式 ⇒ 拋物線
首項係數 >0 ⇒ 開口朝上.
交點 $b,\ \frac{ka+tc}{k+t}$ 介於 a,c 之間

(4)(5) #

Ex5：二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形頂點 $(2,3)$ 且過 $(3,1)$，求 (a,b,c)。

Sol：
$y=a(x-2)^2+3$
$(3,1) \Rightarrow 1=a\times1+3 \Rightarrow a=-2$
$\therefore y=-2(x-2)^2+3$
$=-2(x^2-4x+4)+3$
$=-2x^2+8x-5$

$(a,b,c)=(-2,8,-5)$ #

Ex6：二次函數 $f(x)=ax^2+bx+\frac{1}{a}$，在 $x=2$ 時，有最小值 -3，求 (a,b)。

Sol：
$f(x)=a(x-2)^2-3$，其中 $a>0$
$=a(x^2-4x+4)-3$
$=ax^2-4ax+(4a-3)$
$\therefore 4a-3=\frac{1}{a} \Rightarrow 4a^2-3a-1=0$
$\therefore (4a+1)(a-1)=0 \Rightarrow a=1$ or $\frac{-1}{4}$ (取正)
$\therefore (a,b)=(1,-4)$ #

Ex7：求下列各小題中，k的範圍

(1) 對所有實數 x，$kx^2+3x+1>0$ 恆成立。

(2) 不等式 $kx^2+2x-2>0$ 無解。

(3) $y=2x^2+x+k$ 的圖形恆在 $y=3x-1$ 的上方。

Sol:

(1) $\begin{cases} k>0 \\ 3^2-4\cdot k\cdot 1<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k>0 \\ k>\frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow \underline{k>\frac{9}{4}}$ #

(2) $kx^2+2x-2>0$ 無解 $\Rightarrow kx^2+2x-2\le 0,\ \forall x$

$\begin{cases} k<0 \\ 2^2-4\cdot k(-2)\le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k<0 \\ k\le \frac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow \underline{k\le \frac{-1}{2}}$ #

(3) $2x^2+x+k > 3x-1 \quad \forall x$

$2x^2-2x+(k+1)>0 \quad \forall x$

$\begin{cases} 2>0 \\ (-2)^2-4\cdot 2\cdot (k+1)<0 \end{cases} \Rightarrow k+1>\frac{4}{8} \Rightarrow \underline{k>\frac{-1}{2}}$ #

Ex8：若直線 $y=ax+b$ 與 $y=x^2$ 的圖形恰交於一點，亦與 $y=(x-2)^2+12$ 的圖形交於一點，求 a,b 之值。

Sol: $\begin{cases} y=ax+b \\ y=x^2 \end{cases}$ 一解 $\Rightarrow x^2=ax+b$

$\therefore x^2-ax-b=0 \Rightarrow D=a^2+4b=0 \cdots ①$

$\begin{cases} y=ax+b \\ y=x^2-4x+16 \end{cases}$ 一解 $\Rightarrow x^2-4x+16=ax+b$

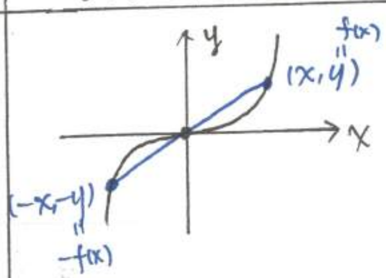
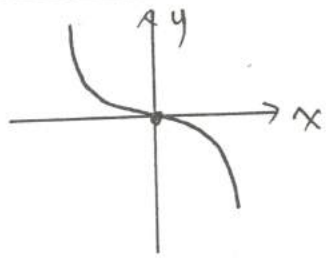
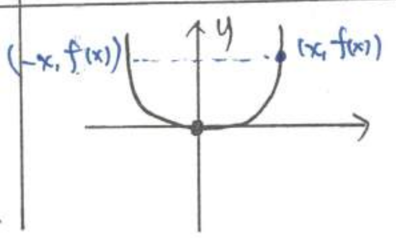
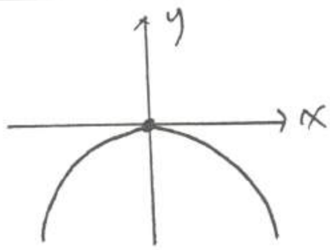
$\therefore x^2-(a+4)x+(16-b)=0 \Rightarrow D=(a+4)^2-4(16-b)=0$

$\Rightarrow a^2+8a+16-64+4b=0 \cdots ②$

①代入② $\Rightarrow a^2+8a-48-a^2=0$

$\Rightarrow \underline{a=6}$ #

4. 單項式函數：$f(x)=y=ax^n$，其中 $a\ne 0 \Rightarrow$ 必過 $\underline{(0,0)}$

	$a>0$ (開口 向上)	$a<0$ (開口 向下)	
n是奇數			① 圖形對稱於 原點 ② $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)$是單調函數
n是偶數			① 圖形對稱於 y軸 ② $x\ge 0$, $f(x)$是單調函數

(1) 奇函數 ⇔ 對稱於 $\underline{原點}$ ⇔ $f(-x)=\underline{-f(x)}$，如：$2x^5$, x^3-x, $\sin x$

奇+奇

偶函數 ⇔ 對稱於 $\underline{y軸}$ ⇔ $f(-x)=\underline{f(x)}$，如：3, $-x^2+x^4$, $\cos x$

偶+偶

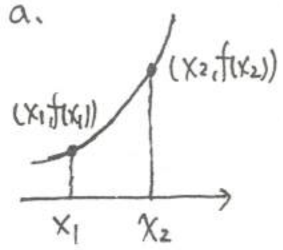
(圖形)　　(方程式)

(2) 單調函數（遞增或遞減）

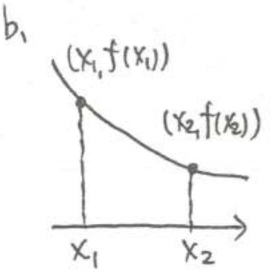
a. 遞增函數：若 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$

b. 遞減函數：若 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$

a.



b.



5、圖形的平移與對稱

(1) 平移

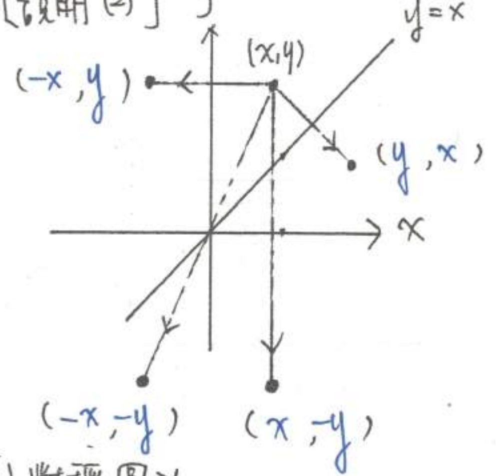
a. 向右平移 h：$y=f(x) \longrightarrow$ $\underline{y=f(x-h)}$

$(x \to x-h)$

b. 向上平移 k：$y=f(x) \longrightarrow$ $\underline{y-k=f(x)}$

$(y \to y-k)$

[說明(2)]



(2) 對稱   圖形間的對稱   線(點)對稱圖形

a. 對稱 x 軸	$y \to -y$	如：$\lvert y\rvert$, y^2
b. 對稱 y 軸	$x \to -x$	$f(-x)=f(x)$，如：$\lvert x\rvert$, x^2
c. 對稱原點	$\begin{cases} x \to -x \\ y \to -y \end{cases}$	$f(-x)=-f(x)$，如：x^3
d. 對稱 $y=x$	$\begin{cases} x \to y \\ y \to x \end{cases}$	($y=a^x$ 和 $y=\log_a x$)

Ex9：$y=-2x^2+4x+1$ 沿坐標軸向右移 h 單位，向上移 k 單位，移到 $y=-2x^2-12x-14$，求 h, k 值。

Sol：

$y=-2(x^2-2x)+1$

$=-2(x-1)^2+3$ $V(1,3)$

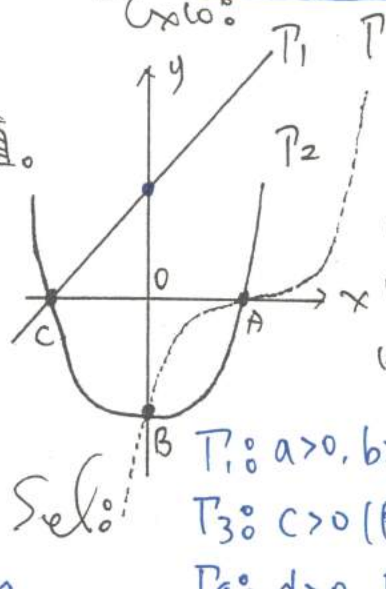
$y=-2x^2-12x-14$

$=-2(x^2+6x)-14$

$=-2(x+3)^2+4$ $V(-3,4)$

向右移 -4，向上移 1 $\underline{\begin{matrix} h=-4 \\ k=1 \end{matrix}}$ #

Ex10：$\underline{(1)(2)(3)(4)(6)(7)}$ #



設 $f(x)=ax+b$ — Γ_1

$g(x)=c(x-c)^3$ — Γ_3

$h(x)=dx^4+e$ — Γ_2

下列何者正確？

(1) $a>0$ (2) $b>0$ (3) $c>0$

(4) $d>0$ (5) $e>0$ (6) $e=-c^4$

(7) $d=1$ (8) $b=-ac$

Sol：

Γ_1：$a>0$, $b>0$

Γ_3：$c>0$（開口右上）

Γ_4：$d>0$. $B(0,e)$

$\therefore e<0$

$B=g(0)=h(0)$

$c(-c)^3=e \Rightarrow e=-c^4$

$A(c,0) \Rightarrow dc^4-c^4=0$

對稱 y 軸 $\therefore d=1$

$C(-c,0) \Rightarrow a(-c)+b=0$

$\Rightarrow b=ac$

Ex11：設 m,n 是小於或等於4的相異正整數且 a,b 均為非零實數。已知 $f(x)=ax^m$ 和 $g(x)=bx^n$ 的圖形恰有3個相異交點，求下列何者正確？

(1) m,n 皆為偶數且 a,b 同號
(2) m,n 皆為偶數且 a,b 異號
(3) m,n 皆為奇數且 a,b 同號
(4) m,n 皆為奇數且 a,b 異號
(5) m,n 一偶一奇.

Sol：[法一] $\begin{cases} y=ax^m \\ y=bx^n \end{cases} \Rightarrow ax^m = bx^n$ 三解

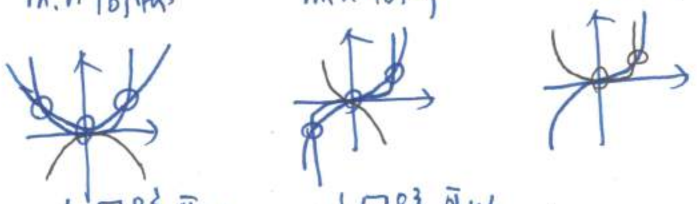
$ax^m - bx^n = 0 \Rightarrow ax^n\left(x^{m-n} - \frac{b}{a}\right) = 0$ 　0,1,2,3

∴ 必有解 $x=0$，尚須另外二解 ∴ $m-n$ 是偶，$\frac{b}{a}$ 是正數

（若 $\frac{b}{a}<0 \Rightarrow$ 無解；若 $m-n$ 是奇 $\Rightarrow$ 奇數解）

[法二] 圖.

m,n 同偶　　m,n 同奇　　一偶一奇



a,b 同號可以　　a,b 同號可以
a,b 異號 ⇒ 1交點 (×)　　a,b 異號 ⇒ 1交點 (×)

6、多項式函數：$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$，其中 $a_n \neq 0$

(1) $f(x)$ 稱為 n次多項式，記作 $\deg f(x) = n$。
　a_n 稱為首項係數；a_0 稱為常數。

$f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$
$f(-1) = a_0 - a_1 + a_2 + \cdots$

(2) 各項係數和：$a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1 + a_0 = \underline{f(1)}$
　常數　　：$a_0 = \underline{f(0)}$
　偶次項係數和：$a_0 + a_2 + a_4 + \cdots = \underline{\frac{f(1)+f(-1)}{2}}$
　奇次項係數和：$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots = \underline{\frac{f(1)-f(-1)}{2}}$

7. 多項式相等（恆等式）：

給定 $\deg f(x) \le n$ 且 $\deg g(x) \le n$，若存在相異的 $(n+1)$ 個值 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}$
使得 $f(\alpha_i) = g(\alpha_i)$，則 $f(x)=g(x)$。(① 次數相等 ② 對應係數相等)

Ex12：$f(x) = (x^3+2x^2-2x-1)^3 = a_9x^9 + \cdots + a_1x + a_0$

求 (1) $a_0 = f(0) = (-1)^3 = -1$

(2) $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9 = f(1) = (1+2-2-1)^3 = 0$

(3) $a_0+a_2+a_4+a_6+a_8 = \frac{f(1)+f(-1)}{2} = \frac{0+2^3}{2} = 4$

(4) $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9 = \frac{f(1)-f(-1)}{2} = \frac{0-2^3}{2} = -4$

Ex13：$f(x) = ax^2+bx+c$
　　$g(x) = x^2+x+1$

若 $f(1)=g(1)+1$
　$f(2)=g(2)+2$，求 a,b,c 之值
　$f(3)=g(3)+3$

Sol：$\underline{f(x) = g(x)+x}$ 有三個解
　　二次式
∴ $f(x) = x^2+2x+1$　　$(a,b,c) = (1,2,1)$ #

8、除法原理：

設二多項式 $f(x)$、$g(x)$，($g(x)$為非零多項式)，

則必存在唯一一組商式 $Q(x)$ 和餘式 $r(x)$，

使得 $f(x)=g(x)\cdot Q(x)+r(x)$，其中 $r(x)=0$ 或 $\deg r(x)<\deg g(x)$

(被除式=除式×商式+餘式)

《綜合除法》

◎僅限除式為 $(x-a)$

例：$3x^2+2x-1$ 除以 $(x+2)$

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & \\ & -6 & 8 & -2 \\ \hline 3 & -4 & 7 & \end{array}$$

商：$3x-4$

餘：7

Ex14：若 $(x+1)f(x)$ 除以 (x^2+x+1) 餘 $(5x+3)$，

求 $f(x)$ 除以 (x^2+x+1) 的餘式。⇒ 設餘式 $ax+b$

Sol：$(x+1)f(x)=(x^2+x+1)Q(x)+(5x+3)\cdots①$

↓除 ↑乘

$f(x)=(x^2+x+1)\cdot q(x)+(ax+b)\cdots②$

"乘"：(由②⇒①) $(x+1)f(x)=(x+1)\left[(x^2+x+1)\cdot q(x)+(ax+b)\right]$

$$=\underbrace{(x^2+x+1)}_{除}\cdot\underbrace{q(x)\cdot(x+1)}_{商}+\underbrace{(ax^2+(a+b)x+b)}_{餘(不小於除式)}$$

$$\begin{array}{r|rrr} & a & & \\ \hline 1\ 1\ 1 & a & a+b & b \\ & a & a & a \\ \hline & & b & b-a \end{array}$$

真正餘式：$bx+(b-a)$

$\therefore b=5$，$b-a=3$ $\therefore a=2$

$2x+5$ #

Ex15：設 $f(x)=x^4-5x^3+4x^2+5x+6=a(x-3)^4+b(x-3)^3+c(x-3)^2+d(x-3)+e$

(1) 求 a,b,c,d,e 值　求值1 (2) 求 $f(3)$　求值2 (3) 求 $f(2.9)$ 的小數點後第三位數字

求值3 (4) 求 $f\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)$　(5) 求 $f(x)$ 除以 $(x-3)^2$ 的餘式.

Sol：$f(x)=(x-3)\underbrace{\left(a(x-3)^3+b(x-3)^2+c(x-3)+d\right)}+e$

商$_1=(x-3)\underbrace{\left[a(x-3)^2+b(x-3)+c\right]}+d$

商$_2=(x-3)\underbrace{\left[a(x-3)+b\right]}+c$

商$_3=(x-3)\cdot\underset{商_4}{a}+\underset{餘}{b}$

$$\begin{array}{lrrrrr|l} & 1 & -5 & 4 & 5 & 6 & 3 \\ & & 3 & -6 & -6 & -3 & \\ \hline 商_1\to & 1 & -2 & -2 & -1 & 3=e & \\ & & 3 & 3 & 3 & & \\ \hline 商_2\to & 1 & 1 & 1 & 2=d & & \\ & & 3 & 12 & & & \\ \hline 商_3\to & 1 & 4 & 13=c & & & \\ & & 3 & & & & \\ \hline & 1=a & 7=b & & & & \end{array}$$

(1) $(a,b,c,d,e)=(1,7,13,2,3)$ #

(2) $f(3)$ 想成 $f(x)$ 除以 $(x-3)$ 的餘式 $=3$ #

(3) $f(2.9)=3+2(-0.1)+13(-0.1)^2+7(-0.1)^3+(-0.1)^4$

$=3-0.2+0.13-0.007+0.0001$

3 #

(5) $f(x)=\underbrace{(x-3)^2}_{除}\underbrace{\left[a(x-3)^2+b(x-3)+c\right]}_{商}\underbrace{+d(x-3)+e}_{餘式}$

$\Rightarrow 2(x-3)+3=2x-3$ #

(4) $x=\frac{1+\sqrt5}{2}\Rightarrow 2x-1=\sqrt5$

$\Rightarrow 4x^2-4x+1=5$

$\Rightarrow x^2-x-1=0$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -4 & 1 & & \\ \hline 1\ -1\ -1 & 1 & -5 & 4 & 5 & 6 \\ & 1 & -1 & -1 & & \\ \hline & & -4 & 5 & 5 & \\ & & -4 & 4 & 4 & \\ \hline & & & 1 & 1 & 6 \\ & & & 1 & -1 & -1 \\ \hline & & & & 2 & 7 \end{array}$$

$2\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)+7$

$=8+\sqrt5$ #

9. 餘式定理、因式定理

(1) 餘式定理：多項式 $f(x)$ 除以 $(ax-b)$ 的餘式為 $f(\frac{b}{a})$

◎ 除式為0　$f(x)=(ax-b)Q(x)+r$

$f(\frac{b}{a})=0\cdot Q(x)+r \Rightarrow r=f(\frac{b}{a})$

(2) 因式定理：多項式 $f(x)$ 有因式 $(ax-b) \Leftrightarrow f(\frac{b}{a})=0$

◎ 若 $f(a)=f(b)=f(c)=0$，則 $f(x)$ 有因式 $(x-a)(x-b)(x-c)$

10. 插值多項式：設 $f(x)$ 是通過三點 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$ 之最低多項式

** [法一] 未定係數法：設 $f(x)=ax^2+bx+c$

[法二] 牛頓插值法：設 $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)+b(x-x_1)+y_1$

[法三] Lagrange 插值法：設 $f(x)=y_1\cdot\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+y_2\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+y_3\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$

◎ 求餘式問題亦同

過 (x_1,y_1) $\Leftrightarrow$	$f(x_1)=y_1$ $\Leftrightarrow$	$f(x)$ 除以 $(x-x_1)$ 的餘式為	y_1
(x_2,y_2)	$f(x_2)=y_2$	$(x-x_2)$	y_2
(x_3,y_3)	$f(x_3)=y_3$	$(x-x_3)$	y_3

◎ $g(x)$ 為通過三點 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$ 之多項式

$\Rightarrow g(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdot Q(x)+f(x)$

Ex16：求下列各除法後的餘式

(1) x^8+7x^2-6x+2 除以 $(x-1)$

(2) $x^{304}-5x^{303}-2$ 除以 (x^2-4x-5)

(3) $f(x)=2x^4+3x^3+5x^2-6$，求 $f(x-2)$ 除以 $(x-1)$ 的餘式。

Sol：

(1) $f(1)=1+7-6+2=\underline{4}$ #

(2) 設餘式 $ax+b$

$f(x)=(x^2-4x-5)Q(x)+ax+b$

$f(-1)=-a+b=4$　$\therefore 6a=-6$

$f(5)=5a+b=-2$　$a=-1,\ b=3$

$\underline{-x+3}$ #

(3) x 用 1 代入 $\Rightarrow f(1-2)=f(-1)=\underline{-2}$ #

Ex17：多項式 $f(x)$ 除以 $(x+1)$ 餘 (-7)，
$f(x)$ 除以 $(x-2)$ 餘 (-1)，
求 $f(x)$ 除以 (x^2-x-2) 的餘式。

Sol：$f(-1)=-7$，$f(2)=-1$

$f(x)=(x+1)Q_1(x)-7$

$f(x)=(x-2)Q_2(x)-1$

$f(x)=(x^2-x-2)Q(x)+\underline{ax+b}$

除式為0 ⇒ $f(-1)=-a+b=-7$　　$\therefore 3a=6,\ a=2$
$f(2)=2a+b=-1$　　$b=-5$

$\underline{2x-5}$ #

Ex18：$f(x)$ 除以 (x^2-5x+4) 餘 $(x+2)$
$f(x)$ 除以 (x^2-5x+6) 餘 $(3x+4)$
求 $f(x)$ 除以 (x^2-4x+3) 的餘式。

Sol：$f(x)=(x^2-5x+4)Q_1(x)+(x+2)$

$f(x)=(x^2-5x+6)Q_2(x)+(3x+4)$

$f(x)=(x^2-4x+3)Q_3(x)+ax+b$

$f(1)=a+b=3$　　$\therefore a=5$
$f(3)=3a+b=13$　　$b=-2$

$\underline{5x-2}$ #

Ex19：多項式 $f(x)$ 除以 $(x-1)$ 餘 9，
$f(x)$ 除以 $(x+2)$ 餘 3，
$f(x)$ 除以 $(x-3)$ 餘 43，
求 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x+2)(x-3)$ 的餘式。

Sol：[法一] 未定係數法 ⇒ 設餘式為 $\underline{ax^2+bx+c}$

$f(1)=a+b+c=9$ …①

$f(-2)=4a-2b+c=3$ …②

$f(3)=9a+3b+c=43$ …③

②−①：$3a-3b=-6$
③−②：$5a+5b=40$

$a+b=8$　　$\therefore a=3$
$a-b=-2$　　$b=5$
　　　　　$c=1$　　⇒ $3x^2+5x+1$ #

[法二] 牛頓插值 ⇒ 設餘式為 $\underline{a(x-1)(x+2)+b(x-1)+9}$

$(-2,3)$ 代入 ⇒ $b(-3)+9=3$　$\therefore b=2$

$(3,43)$ 代入 ⇒ $a(2)(5)+2\times2+9=43$
$\therefore a=3$

$3(x-1)(x+2)+2(x-1)+9$
$=3(x^2+x-2)+2(x-1)+9=3x^2+5x+1$ #

[法三] Lagrange 插值

$$餘式=9\cdot\frac{(x+2)(x-3)}{(1+2)(1-3)}+3\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}+43\frac{(x-1)(x+2)}{(3-1)(3+2)}$$

Ex20：二次多項式 $f(x)$ 滿足
$f(-1)=6$，$f(1)=4$，$f(2)=9$，
求 $f(4)$ 之值。

Sol：

[法一] $f(x)=ax^2+bx+c$

$f(-1)=a-b+c=6$

$f(1)=a+b+c=4$

$f(2)=4a+2b+c=9$

②−①：$2b=-2$，$b=-1$
③−②：$3a+b=5$ ⇒ $a=2$　　$\therefore c=3$

$f(x)=2x^2-x+3$

$f(4)=32-4+3=31$ #

[法二] $f(x)=a(x+1)(x-1)+b(x+1)+6$

$f(1)=2b+6=4$　$\therefore b=-1$

$f(2)=a\cdot3-3+6=9$ ⇒ $a=2$

$f(x)=2(x+1)(x-1)-(x+1)+6$

$f(4)=2\times5\times3-5+6=31$

[法三] $f(x)=6\cdot\frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)}+4\frac{(x+1)(x-2)}{(1+1)(1-2)}+9\frac{(x+1)(x-1)}{(2+1)(2-1)}$

$f(4)=6\times\frac{3\times2}{(-2)(-3)}+4\cdot\frac{5\times2}{2\times(-1)}+9\cdot\frac{5\cdot3}{3\cdot1}$
$=+6+(-20)+45=31$

Ex21：三次多項式$f(x)$滿足

$f(1)=f(-1)=f(2)=3$，$f(0)=11$，

求$f(5)$之值。

Sol：給定$f(x)$次數 ⇒ 求出$f(x)$

設 $f(x)=(x-1)(x+1)(x-2)\cdot a+3$

$f(0)=(-1)\times 1\times(-2)\cdot a+3=11$

$\therefore a=4$

$f(x)=4(x-1)(x+1)(x-2)+3$

$f(5)=4\times4\times6\times3+3$

$=291$

Ex22：三次多項式$f(x)$，

$f(x)$除以(x^2-3x+2)餘$(2x-1)$

$f(x)$除以(x^2+3x+2)餘$(8x+11)$，

求$f(x)$除以(x^2-9)的餘式。

Sol：$f(x)=(x^2-3x+2)(ax+b)+(2x-1)$

$f(-1)=6(-a+b)-3=3$

$f(-2)=12(-2a+b)-5=-5$

$\begin{cases}-a+b=1\\-2a+b=0\end{cases}$ $\therefore a=1, b=2$

$f(x)=(x^2-3x+2)(x+2)+2x-1$

$=(x^2-9)Q(x)+px+q$

$f(3)=2\times5+5=3p+q=15$

$f(-3)=20\times(-1)-7=-3p+q=-27$

$6p=42$，$p=7$，

$2q=-12$，$q=-6$

$\underline{7x-6}$ #

Ex23：已知多項式$f(x)$滿足

$f(-3)=-1$, $f(0)=5$, $f(1)=7$,

且$f(x)$除以$(x+3)\cdot x(x-1)$餘$r(x)$。

設 $g(x)=(-1)\dfrac{x(x-1)}{(-3)(-4)}+5\dfrac{(x+3)(x-1)}{3(-1)}+7\dfrac{(x+3)x}{4(1)}$，

求下列敘述那些正確？

(1) $f(0)=g(0)$ (2) $f(2)=g(2)$ (3) $r(1)=g(1)$

(4) $r(3)=g(3)$ (5) $f(x)$至少是三次式.

(6) 若$f(x)$是三次多項式且首項係數為1，則$f(-2)=7$。

Sol：$f(x)=(x+3)x(x-1)Q(x)+r(x)$

$r(x)$是滿足 $r(-3)=f(-3)=-1$, $r(0)=f(0)=5$, $r(1)=f(1)=7$ 之最低多項式

又$g(x)$也是 $g(0)=5$, $g(1)=7$, $g(-3)=-1$

$\therefore r(x)=g(x)\quad \forall x$

(1)(3)(4) 正確，(2) $f(2)=10Q(2)+g(2)$ (×)

(5) $f(x)$最低 即 $Q(x)=0 \Rightarrow r(x)$是一次式 (×)

(6) 取$Q(x)=1 \Rightarrow f(-2)=1\times(-2)\times(-3)+g(-2)=6+(-\frac{1}{2})+5+7\cdot(\frac{-1}{2})=\underline{7}$ # (O)

Ex24：(除式為二次一次)

設多項式$f(x)$滿足

$f(x)$除以(x^2+1)餘$(2x+3)$

$f(x)$除以$(x+1)$餘(-1)，

求$f(x)$除以$(x+1)(x^2+1)$的餘式。

Sol：[法一] 設餘式 $\underline{ax^2+bx+c}$

$f(i)=2i+3=ai^2+bi+c$

$\therefore b=2$，$c-a=3$

$f(-1)=-1=a-b+c$ $\therefore a+c=1$

$c=2, a=-1$

$\underline{-x^2+2x+2}$ #

[法二] 設餘式 $\underline{a(x^2+1)+(2x+3)}$ (二次為主)

$f(-1)=2a+1=-1$ $\therefore a=-1$

$-(x^2+1)+(2x+3)=\underline{-x^2+2x+2}$ #

11、多項式方程式的根：

(1) 代數基本定理：n次方程式恰有n個複數根(含重根)。

[型一] 求方程式的解 ⇒ 因式分解、公式解、有理根、…

(2) 虛根成對定理：實係數n次方程式有一虛根 $a+bi$，則必有另一根 $a-bi$。

◎ 實係數奇數次方程式 ⇒ 必有 實根。

◎ 設 $f(x)$ 是實係數多項式，$\overline{f(a+bi)} =$ $f(a-bi)$。

(3) 無理根成對定理：有理係數n次方程式有一根 $a+b\sqrt{c}$，則必有另一根 $a-b\sqrt{c}$。

(4) 找有理根(整係數一次因式檢驗法)：

設整係數多項式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 有整係數一次因式 $(ax-b)$，其中 a,b 為整數且 a,b 互質，則 a 是 a_n 的因數且 b 是 a_0 的因數。

◎ $f(x)$ 有一次因式 $(ax-b)$ ⇔ $f(\frac{b}{a})=0$ ⇔ $f(x)=0$ 有有理根 $\frac{b}{a}$

V◎ 若 a 是 a_n 的因數且 b 是 a_0 的因數，"無法"推得 $(ax-b)$ 是 $f(x)$ 的因式。

(5) 根與係數：

$f(x)=ax^2+bx+c=0$ 有二根 α,β

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=\frac{-b}{a} \\ \alpha\beta=\frac{c}{a} \end{cases}$$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=0$ 有三根 α,β,γ

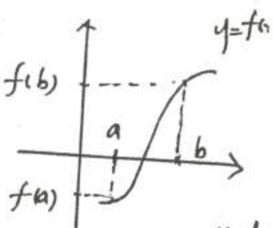
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=\frac{-b}{a} \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma=\frac{d}{a} \end{cases}$$

◎ 二次式有實根 ⇔ $D=b^2-4ac\geq 0$

◎ 根式運算：$a,b\in\mathbb{R}$．$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\begin{cases}\sqrt{ab}, & \text{其他} \\ -\sqrt{ab}, & a<0,b<0\end{cases}$　$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\begin{cases}\sqrt{\frac{a}{b}}, & \text{其他} \\ -\sqrt{\frac{a}{b}}, & a>0,b<0\end{cases}$

[型二] 求方程式解的範圍 ⇒ 勘根定理

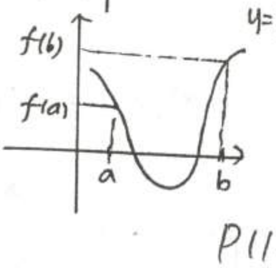
(6) 勘根定理：設實係數n次多項式 $f(x)$，及二相異實數 $a<b$，
若 $f(a)\cdot f(b)<0$，則必存在 c 在 a,b 之間使得 $f(c)=0$。



◎ 若 $f(a)\cdot f(b)<0$ ⇔ a,b 之間有 奇 個實根(含重根)。

若 $f(a)\cdot f(b)>0$ ⇔ a,b 之間有 偶 個實根。

(可能是0個，亦即沒有實根)

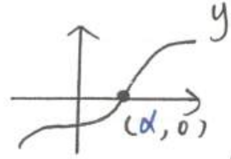


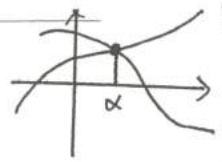
V◎ 若 a,b 之間有實根，"無法"推得 $f(a)\cdot f(b)<0$。

[型三] 求方程式解的個數 ⇒ 畫圖找交點數

(1) $\boxed{\text{實根}}$的意義：$f(x)=0$ 的解表示 $y=f(x)$ 的圖形與 x軸 $(y=0)$ 的交點坐標。

方程式	圖形
$f(x)=0$ 的解 $x=\alpha$	$\begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \end{cases}$ 的交點
$f(x)=g(x)$ 的解 $x=\alpha$	$\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases}$ 的交點





Ex25：求下列各方程式的解

(1) 設 a 是實數 且 $a>0$,
$f(x)=x^2+ax+4+6i=0$ 有純虛根。

Sol：設純虛根 ki

$(ki)^2+a(ki)+4+6i=0$

$\Rightarrow (-k^2+4)+(ak+6)i=0$

$\therefore k=\pm 2$

$ak=-6$

$\because a>0 \therefore k<0$

$a=3$

$k=-2i$ #

(2) 三次多項式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+5$，其中 $a,b\in\mathbb{R}$ 且 $1-ci$ 和 $d+2i$ 是 $f(x)=0$ 的二根。$\left(\begin{matrix} c,d\neq 0 \\ c,d\in\mathbb{R}\end{matrix}\right)$

Sol：$1-ci$，$d+2i$ 必共軛(至多2虛根)

$\therefore d=1, c=2 \quad (1\pm 2i)$

$x=1+2i$

$x-1=2i$

$x^2-2x+1=-4$

$x^2-2x+5=0$

$f(x)$ 有因式 x^2-2x+5

$$\begin{array}{r|rrrr} 1\ -2\ 5 & 1 & a & b & 5 \\ & 1 & -2 & 5 & \\ \hline & & a+2 & b-5 & 5 \\ & & 1 & -2 & 5 \\ \hline & & & & 0 \\ \hline & 1 & 1 & & \end{array}$$

$a=-1$

$b=3$

實根：-1 #

(3) $x^3+6x^2+11x+6=0$

Sol：係數全正 ⇒ 沒有正根

係數正負相間 ⇒ 沒有負根

可能的根：$\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$

$x=-1$ 代入 $\Rightarrow (-1)^3+6(-1)^2+11(-1)+6=0$

有因式 $(x+1)$ $\Rightarrow (x+1)(x^2+5x+6)=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1\ 1 & 1 & 6 & 11 & 6 \\ & 1 & 1 & & \\ \hline & & 5 & 11 & \\ & & 5 & 6 & \\ \hline & 1 & 5 & 6 & \end{array}$$

$\Rightarrow (x+1)(x+2)(x+3)=0$

$\therefore x=-1,-2,-3$ #

(4) $x^3+ax^2+bx+5=0$ 有三相異整數根。$(a,b\in\mathbb{Z})$

Sol：可能之根：$\pm1,\pm5$

設三根 α,β,γ

$\alpha\beta\gamma=-5$ $\therefore$ 三根必為 $1,-1,5$ #

Ex26：設 $x^2+7x+2=0$ 二根為 α,β，求：

(1) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-7}{2}$ #

(2) $(2-\alpha)(2-\beta)=2^2+7\times2+2=20$ #

$[(x-\alpha)(x-\beta)=x^2+7x+2]$

(3) $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}+\beta=\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}=-7-2\sqrt{2}$ #

$\begin{cases}\alpha+\beta<0 \\ \alpha\beta>0\end{cases}$ $\therefore \alpha<0$ 且 $\beta<0$

Ex27：設 a, b 均為整數，且 $x^2-ax+15=0$ 和 $x^2-bx+3b-1=0$ 有共同根，且此根為質數，求b。

Sol：由 $x^2-ax+15=0$ 知可能的根 $\pm1,\pm3,\pm5,\pm15$

其中質數僅：3, 5

Case1：若共同根 $x=3 \Rightarrow \begin{cases} 9-3a+15=0 \Rightarrow a=8 \\ 9-3b+3b-1=0 \quad \times\ (\text{不合}) \end{cases}$

Case2：若共同根 $x=5 \Rightarrow \begin{cases} 25-5a+15=0 \Rightarrow a=8 \\ 25-5b+3b-1=0 \Rightarrow b=12 \end{cases}$ #

Ex28: $f(x)=x^3-7x^2+14x-\cancel{9}=0$ (-7)
在下列哪些連續整數間有實根?
(1) $(-2,-1)$ (2) $(-1,0)$ (3) $(0,1)$ (4) $(1,2)$ (5) $(2,3)$

Sol: 沒有負根

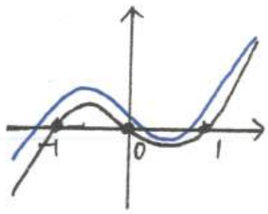
$f(0)=-7$
$f(1)=1-7+14-7=1$) 有根　　$\underline{(3)(5)}$ #
$f(2)=8-28+28-7=1$
$f(3)=27-63+42-7=-1$) 有根
⋮) 有根
$f(\infty)>0$

Ex29: 設 x 是正實數滿足 $x\cdot 3^x=3^{18}$,
若 x 介於連續正整數 k 與 $k+1$ 間,
求 k 值。　　勘根

Sol: 設 $f(x)=x\cdot 3^x-3^{18}$
$f(18)=18\cdot 3^{18}-3^{18}>0$
$f(17)=17\cdot 3^{17}-3^{18}=\frac{17}{3}\cdot 3^{18}-3^{18}>0$
$f(16)=16\cdot 3^{16}-3^{18}=\frac{16}{9}\cdot 3^{18}-3^{18}>0$
$f(15)=15\cdot 3^{15}-3^{18}=\frac{15}{27}\cdot 3^{18}-3^{18}<0$

$\underline{k=15}$ #

Ex30: 已知 $y=x(x-1)(x+1)$ 如圖, 向上平移 0.01
設 $f(x)=x(x-1)(x+1)+0.01$,
$f(x)=0$ 的解, 何者正確?
(1) 有三個實根
(2) $x<-1$ 時, 恰有一實根
(3) $-1<x<0$ 時, 恰有一實根 (0)
(4) $0<x<1$ 時, 恰有一實根 (2)
(5) $x>1$ 時, 恰有一實根 (0)



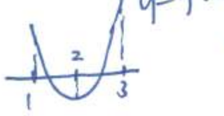
Sol: $\underline{(1)(2)}$ #

Ex31: 下列敘述何者正確?
(1) 若 $f(2-3i)=1+i$, 則 $f(2+3i)=1-i$ (×)
(2) 設 $f(x)$ 是三次整係數多項式, 且 α 是無理數使得 $f(\alpha)=0$, 則 $f(x)=0$ 至少有二個無理根
✓(3) 設 $f(x)$ 是三次實係數多項式, 且 $f(2+i)=0$, $f(2)>0$, $f(3)<0$, 則 $f(4)<0$
(4) 若 $f(x)$ 是實係數多項式, 且 $f(\frac{3}{2})=0$, 則 $f(1)\times f(2)<0$
✓(5) 若 $f(x)$ 是整係數多項式, 且 $f(x)$ 有因式 $2x-3$, 則 $f(0)$ 是3的倍數。

Sol: (1) 需要 $f(x)$ 是實係數多項式 (×)
(2) 僅 $a+b\sqrt{c}$ 其軛 $a-b\sqrt{c}$ (×)
如: $f(x)=x^3-2=0 \Rightarrow x$ 僅 $\sqrt[3]{2}$ 一個無理根
(3) $\because f(2+i)=0 \Rightarrow f(x)$ 有一實根 = 3 根 (0)
(4) (×) 有可能 1, 2 之間有偶數個根
(5) (0) $f(0)=a_0$

Ex32: 設 $f(x)$ 是二次多項式, 且
$f(1)>0$, $f(2)<0$, $f(3)>0$,
令 $g(x)=f(x)+(x-2)(x-3)$, 選出正確選項。
(1) $y=f(x)$ 的圖形是開口向下的拋物線
(2) $y=g(x)$ 的圖形是開口向下的拋物線
✓(3) $g(1)>f(1)$
✓(4) $g(x)=0$ 在 1 和 2 之間恰有一實根
(5) 若 α 是 $f(x)$ 的最大實根, 則 $g(\alpha)>0$

Sol:

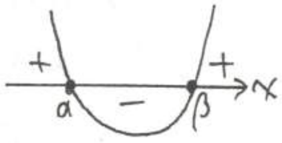
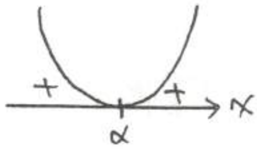
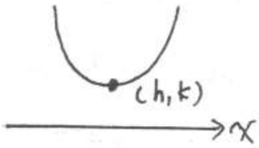


$\Rightarrow f(x)$ 開口向上, 亦即 x^2 係數為正
$\therefore g(x)$ 的 x^2 係數亦為正

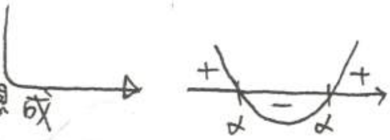
(3) $g(1)=f(1)+(1-2)(1-3)$　$\therefore g(1)>f(1)$ (0)
$=f(1)+2$
(4) $g(1)=f(1)+2>0$) 恰一根　(0)
$g(2)=f(2)+0<0$) 恰一根
$g(3)=f(3)+0>0$
(5) α 介於 2 和 3 之間 且 $f(\alpha)=0$
$\therefore g(\alpha)=\underset{0}{f(\alpha)}+\underset{+}{(\alpha-2)}\underset{-}{(\alpha-3)}<0$ (×)

12、多項式不等式：將多項式分解為<u>實係數</u>一次因式或二次因式乘積

(1) 二次式 $f(x)=ax^2+bx+c$，其中 $a>0$

判別式	$D>0$	$D=0$	$D<0$ (恆正)
方程式	$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$ $\alpha<\beta$	$f(x)=a(x-\alpha)^2$	$f(x)=a(x-h)^2+k$ $k>0$
圖形			
不等式	$f(x)>0 \Rightarrow$ $x>\beta,\ x<\alpha$ $f(x)\leq 0 \Rightarrow$ $\alpha\leq x\leq\beta$	$f(x)>0 \Rightarrow$ $x\neq\alpha$ $f(x)\leq 0 \Rightarrow$ $x=\alpha$	$f(x)>0 \Rightarrow$ $x\in\mathbb{R}$ $f(x)<0 \Rightarrow$ 無解

可想成



(2) 高次不等式：

(a) 首項係數為正

(b) 去掉二次因式(恆正)

(c) $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$，其中 $a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n$

由右至左，正負相間

(d) $f(x)>0$ 取"+"區間；$f(x)<0$ 取"−"區間

13、分式不等式：

(1) $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0 \Rightarrow$ $f(x)\cdot g(x)>0$ ；$\dfrac{f(x)}{g(x)}<0 \Rightarrow$ $f(x)\cdot g(x)<0$

(2) $\dfrac{f(x)}{g(x)}\geq 0 \Rightarrow$ $f(x)\cdot g(x)\geq 0$，但 $g(x)\neq 0$ ；$\dfrac{f(x)}{g(x)}\leq 0 \Rightarrow$ $f(x)\cdot g(x)\leq 0$，但 $g(x)\neq 0$

◎ 若不等式右邊不為0 ⇒ 加減移項，使右邊為0

如：$\dfrac{f(x)}{g(x)}<h(x) \Rightarrow$ $\dfrac{f(x)}{g(x)}-h(x)<0 \Rightarrow \dfrac{f(x)-h(x)}{g(x)}<0$

Ex33：解下列各多項式不等式解的範圍。

(1) $-x^2+x+2<0$

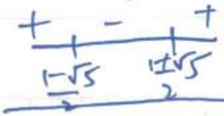
$x^2-x-2>0$

$(x-2)(x+1)>0$

$\boxed{x>2 \text{ or } x<-1}$

(2) $x^2-x-1\le 0$

$x=\dfrac{1\pm\sqrt5}{2}$



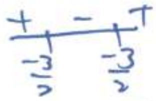
$\boxed{\dfrac{1-\sqrt5}{2}\le x\le\dfrac{1+\sqrt5}{2}}$

(3) $4x^2+12x+9>0$

$(2x+3)^2>0$

[法一]

[法二]



$\boxed{x>\frac{-3}{2} \text{ or } x<\frac{-3}{2} \quad (x\ne\frac{-3}{2})}$

(4) $(x^2+x+1)(x-2)(x+3)\le 0$

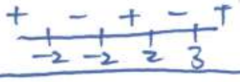
$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\notin\mathbb{R}$ 去掉

$\boxed{-3\le x\le 2}$

(5) $(x+2)^2(x-2)(x-3)\ge 0$

[法一]

[法二]

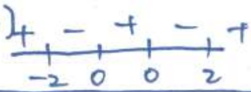


$\boxed{x\ge 3 \text{ or } -2\le x\le 2 \text{ or } x\le -2}$

(6) $(x+2)\cdot x^2\cdot(x-2)<0$

[法一]

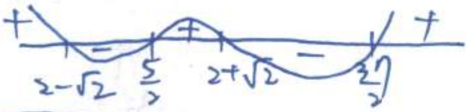
[法二]



$\boxed{0<x<2 \text{ or } -2<x<0}$

(7) $(x^2-4x+2)(2x-5)(2x-37)\le 0$

$x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-8}}{2}=2\pm\sqrt2$



$\boxed{2-\sqrt2\le x\le\frac{5}{2} \quad 2+\sqrt2\le x\le\frac{37}{2}}$

(8) $(x^2+2x-3)(x-1)(x+5)<(-2x-7)(x-1)(x+5)$

$(x^2+2x-3)(x-1)(x+5)-(-2x-7)(x-1)(x+5)<0$

$\Rightarrow (x^2+4x+4)(x-1)(x+5)<0$

$\Rightarrow (x+2)^2(x-1)(x+5)<0$

$\boxed{\begin{matrix}-5<x<-2\\ -2<x<1\end{matrix}}$

(9) $\dfrac{(x-4)(x+5)}{(x-1)(x+2)}\le 0$

$(x-4)(x+5)(x-1)(x+2)\le 0$

但 $(x-1)(x+2)\ne 0$

$\boxed{-5\le x<-2 \text{ or } 1<x\le 4}$

(10) $\dfrac{2}{x-1}\ge 1$

$\dfrac{2}{x-1}-1\ge 0$

$\dfrac{2-(x-1)}{x-1}\ge 0$

$\dfrac{-x+3}{x-1}\ge 0$

$(x-1)(x-3)\le 0$ 但 $x\ne 1$

$\boxed{1<x\le 3}$

(11) $\dfrac{2x^2+7x+3}{x^2-4x+3}\le 1$

$\dfrac{2x^2+7x+3}{x^2-4x+3}-1\le 0$

$\dfrac{(2x^2+7x+3)-(x^2-4x+3)}{x^2-4x+3}\le 0$

$\dfrac{x^2+11x}{x^2-4x+3}\le 0$

$x(x+11)(x-1)(x-3)\le 0$，但 $x\ne 1,3$

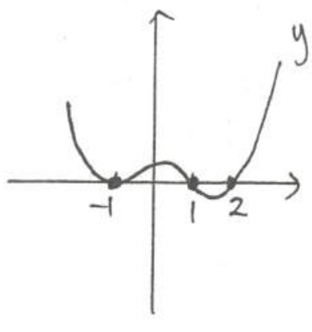
$\boxed{\begin{matrix}1<x<3\\ -11\le x\le 0\end{matrix}}$

Ex34：如圖，已知多項式 $f(x)$ 為四次式

且首項係數為1，求：

(1) $f(x)\le 0$ 的解 $\Rightarrow 1\le x\le 2$ or $x=-1$

(2) $f(x)=(x-2)(x-1)(x+1)^2$



Ex35: 設多項式不等式 $f(x)>0$ 的解為 $-2<x<4$, 求 $f(2x)\le 0$ 的解。

Sol: $f(x)\le 0 \Rightarrow x\ge 4$ or $x\le -2$

$f(2x)\le 0 \Rightarrow 2x\ge 4$ or $2x\le -2$

$\Rightarrow x\ge 2$ or $x\le -1$ #

Ex36: 設 $a>0$, 已知不等式 $|2x-a|<1$ 與 $x^2-ax+\frac{3}{4}<0$ 有相同的解集合, 求 a 值。

Sol: $|2x-a|<1$

$-1<2x-a<1$

$a-1<2x<a+1$

$\frac{a-1}{2}<x<\frac{a+1}{2}$

$\left(\frac{a-1}{2}\right)\left(\frac{a+1}{2}\right)=\frac{3}{4}$

$\therefore a^2-1=3$ $\quad a>0$

$a=\pm 2$ (取正)

Ex37: 關於不等式, 請選出正確的選項。

(1) $\frac{x-1}{x^2-x-2}>1$ 的解與 $x-1>x^2-x-2$ 的解相同

(2) $\frac{x+1}{x^2+x+2}>1$ 的解與 $x+1>x^2+x+2$ 的解相同

(3) $mx^2-3mx-5<0$ 恆成立, 則 m 必小於 0

(4) $(x^2+5x+9)(x-2)^2\le 0$ 無解

(5) $(x-1)(x-2)>0$ 的解與 $\frac{x-1}{x-2}>0$ 的解相同

Sol: (1) $\because x^2-x-2=(x+1)(x-2)$ 非恆正 (×)

(2) x^2+x+2 恆正 (○)

(3) $\begin{cases} a<0 \\ D<0 \end{cases}$ $\therefore$ $m<0$, $(-3m)^2-4m(-5)<0$ $\Rightarrow m$ 必小於 0 (○)

(4) x^2+5x+9 恆正

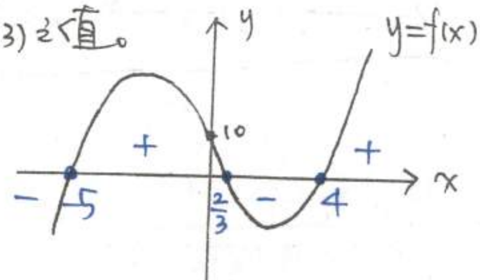
原式 $\Rightarrow (x-2)^2\le 0 \Rightarrow x=2$ (×)

(5) 均為 $x>2$ or $x<1$ (○)

(2)(3)(5) #

Ex38: 三次多項式 $y=f(x)$ 圖形如下。已知 $A(0,10)$, $B(\frac{2}{3},0)$ 在 $y=f(x)$ 上, 且 $f(x)=0$ 有二個相異整數根。又 $f(x)\le 0$ 的正整數解恰有4個。$f(x)\ge 0$ 的負整數解恰有5個。求 $f(3)$ 之值。

Sol:



$\because f(x)\le 0$ 恰有4個正整數解

即 1, 2, 3, 4

$\because f(x)\ge 0$ 恰有5個負整數解

即 $-1,-2,-3,-4,-5$

$\therefore f(x)$ 有因式 $(x+5)(3x-2)(x-4)$

$\therefore$ 又 $f(x)$ 是三次

$\therefore f(x)=a(x+5)(3x-2)(x-4)$

$A(0,10)$ 代入 $\Rightarrow 10=a\times 5\times(-2)\times(-4)$

$\therefore a=\frac{1}{4}$

$\therefore f(3)=\frac{1}{4}\times 8\times 7\times(-1)=-14$