數列級數

1、等差、等比：

	等差	等比
定義	$a_n - a_{n-1} = d$ (後－前＝定值＝公差)	$\frac{a_n}{a_{n-1}} = r$ ($\frac{後}{前}$＝定值＝公比)
一般項	$a_n = \underline{a_m + (n-m)d}$ $= \underline{dn + k}$	$a_n = \underline{a_m \cdot r^{n-m}}$ $= \underline{k \cdot r^n}$
前n項和	$S_n = \underline{\frac{n(a_1+a_n)}{2}}$ $= \underline{\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}}$	$S_n = \begin{cases} \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} & r \neq 1 \\ n a_1 & r = 1 \end{cases}$
連3項 (a,b,c)	假設：$a-d, a, a+d$ 等差中項：$b = \frac{a+c}{2}$	假設：$\frac{a}{r}, a, ar$ 等比中項：$b = \pm\sqrt{ac}$
連n項和	$S_n, S_{2n}-S_n, S_{3n}-S_{2n}, \cdots$ 亦成等差。公差＝$n^2 d$	$S_n, S_{2n}-S_n, S_{3n}-S_{2n}, \cdots$ 亦成等比。公比＝r^n

Ex1：數列 $a_1+2, a_2+4, \cdots, a_{10}+20$ 共10項，其和為240。求 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}$ 之值。

Sol：$(a_1+2)+(a_2+4)+\cdots+(a_{10}+20)$

$= (a_1+a_2+\cdots+a_{10}) + (2+4+\cdots+20)$

$= (a_1+a_2+\cdots+a_{10}) + \frac{(2+20)\times 10}{2} = 240$

$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_{10} = 240-110 = \underline{130}$ #

Ex2：等差數列共10項，其奇數項和為15，偶數項和為30，求此數列公差。

Sol：$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9 = 15 \cdots ①$

$a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10} = 30 \cdots ②$

$② - ① \Rightarrow d+d+d+d+d = 15$

$\therefore \underline{d=3}$ #

Ex3：等比數列前10項和為80，前5個奇數項和為120，求首項 a_1 的範圍。

(1) $a_1 < 80$ (2) $80 \le a_1 < 90$ (3) $90 \le a_1 < 100$ (4) $100 \le a_1 < 110$

Sol：$\begin{cases} a_1 + a_1 r + \cdots + a_1 r^9 = \frac{a_1(1-r^{10})}{1-r} = 80 \cdots ① \\ a_1 + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^8 = \frac{a_1(1-(r^2)^5)}{1-r^2} = 120 \cdots ② \end{cases}$

$\frac{①}{②}$：$\frac{\frac{1}{1-r}}{\frac{1}{1-r^2}} = \frac{2}{3} \Rightarrow 1+r = \frac{2}{3} \Rightarrow r = \frac{-1}{3}$

$\therefore a_1 = 80 \times \frac{\frac{4}{3}}{1-(\frac{-1}{3})^{10}} \doteq 80 \times \frac{4}{3} = \frac{320}{3}$ $\underline{(4)}$ #

Ex4：a_1, a_2, a_3 是等差數列；b_1, b_2, b_3 是等比數列且此6數均為實數。下列哪些正確？

(1) $a_1 < a_2$ 和 $a_2 > a_3$ 可能同時成立 (×，遞增、遞減)

✓ (2) $b_1 < b_2$ 和 $b_2 > b_3$ 可能同時成立 (O，Ex: −4, 6, −9)

(3) 若 $a_1 + a_2 < 0$，則 $a_2 + a_3 < 0$ (×，−4, 1, 6)

✓ (4) 若 $b_1 b_2 < 0$，則 $b_2 b_3 < 0$ (正負相間)

(5) b_1, b_2, b_3 均為正整數且 $b_1 < b_2$，則 b_1 整除 b_2 (4, 6, 9)

Sol：等差 $\begin{cases} d>0 \Rightarrow \underline{遞增} \\ d<0 \Rightarrow \underline{遞減} \end{cases}$ 等比 $\begin{cases} r>0 \Rightarrow \underline{全正 or 全負} \\ r<0 \Rightarrow \underline{正負相間} \end{cases}$

2、Σ 求和公式

(1) Σ 意義：$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+\cdots+a_n = S_n$。反之，$a_n=\begin{cases} S_n - S_{n-1} & , n\geq 2 \\ S_1 & , n=1 \end{cases}$

(2) Σ 性質：① $\sum(a_k+b_k)=\sum a_k+\sum b_k$

<c.f.> $\sum a_k \cdot b_k \neq (\sum a_k)(\sum b_k)$

② $\sum c\cdot a_k = c\cdot \sum a_k$

③ $\sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k$

(3) Σ 公式：① $\sum_{k=1}^{n} 1 = \underline{1+1+\cdots+1} = \underline{n}$

② $\sum_{k=1}^{n} k = \underline{1+2+\cdots+n} = \underline{\frac{n(n+1)}{2}}$

③ $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \underline{1^2+2^2+\cdots+n^2} = \underline{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

④ $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \underline{1^3+2^3+\cdots+n^3} = \underline{\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}$

[多項式] $\sum(ak^3+bk^2+ck+d)=a\sum k^3+b\sum k^2+c\sum k+d\sum 1$

[分式] $\sum \frac{1}{k(k+1)} = \sum\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$; $\sum \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\sum\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$$\sum \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum\left(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$$

Ex5：求下列各級數和.

(1) $\sum_{k=1}^{10} k(k+1)$

$= \sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=1}^{10} k$

$= \frac{10\times 11\times 21}{6} + \frac{10\times 11}{2}$

$= 385+55$

$= \underline{440}$ #

(2) $\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k(k+2)}$

$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{20}}-\frac{1}{22}\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{21}-\frac{1}{22}\right)$

$= \frac{1}{2}\times\frac{462+231-22-21}{462}$

$= \underline{\frac{325}{462}}$ #

(3) $11^3+12^3+\cdots+20^3$

$= (1^3+2^3+\cdots+20^3) - (1^3+\cdots+10^3)$

$= \left(\frac{20\times 21}{2}\right)^2 - \left(\frac{10\times 11}{2}\right)^2$

$= 210^2-55^2$

$= 265\times 155$

$= \underline{41075}$ #

(4) $1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+\cdots+10)$

$= \sum_{k=1}^{10}(1+2+\cdots+k)$

$= \sum_{k=1}^{10}\frac{k(k+1)}{2}$

$= \frac{1}{2}\times\left(\frac{10\times 11\times 21}{6}+\frac{10\times 11}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}\times\frac{10\times 11}{2}\times 8$

$= \underline{220}$ #

3. 遞迴關係

[型一] 等差型 ⇒ 連加

$a_n = a_{n-1} + K$

(係數均相等)

[型二] 等比型 ⇒ 連乘

$a_n = k \cdot a_n$

(沒有常數)

[其他] 找規律

Ex6：依據下列遞迴關係，找出 a_{100} 之值。

(1) $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + (2n+1) \\ a_1 = 1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} a_n \\ a_1 = 100 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{1-a_n} \\ a_1 = 4 \end{cases}$

Sol：

(1)

$a_1 = 1$

$n=1 \quad a_2 = a_1 + 3$

$n=2 \quad a_3 = a_2 + 5$

$\vdots$

$n=99 \quad (+)\ a_{100} = a_{99} + 2\times 99 + 1$

$a_{100} = 1+3+5+\cdots+(2\times 99+1)$

$= \dfrac{100(1+2\times 99+1)}{2} = 10000$ #

(2)

$a_1 = 100$

$n=1 \quad a_2 = \frac{1}{2} \times a_1$

$n=2 \quad a_3 = \frac{2}{3} \times a_2$

$n=3 \quad a_4 = \frac{3}{4} \times a_3$

$\vdots$

$n=99 \quad (\times)\ a_{100} = \frac{99}{100} \times a_{99}$

$a_{100} = 100 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{99}{100}$

$= 1$ #

(3)

$a_1 = 4,\ a_2 = \dfrac{1}{1-a_1} = \dfrac{-1}{3}$

$a_3 = \dfrac{1}{1-a_2} = \dfrac{1}{1-(\frac{-1}{3})} = \dfrac{3}{4}$

$a_4 = \dfrac{1}{1-a_3} = \dfrac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4$

$\therefore a_{100} = 4$ #

Ex7：遞迴數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_n = a_{n-1} + f(n-2)$，$n \geq 2$ 且 $f(x)$ 是二次多項式。若 $a_1 = 1$，$a_2 = 2$，$a_3 = 5$，$a_4 = 12$，求 a_5 之值。

[法一]

$a_2 = a_1 + f(0) \Rightarrow f(0) = 1$

$a_3 = a_2 + f(1) \Rightarrow f(1) = 3$

$a_4 = a_3 + f(2) \Rightarrow f(2) = 7$

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(0) = 1 = c$

$f(1) = a+b+c = 3 \Rightarrow a+b = 2$

$f(2) = 4a+2b+c = 7 \Rightarrow 2a+b = 3$

$\therefore a = 1,\ b = 1,\ c = 1$

$\therefore a_5 = 12 + f(3) = 12 + 9 + 3 + 1 = 25$ #

[法二] 找規律

$a_1 = 1$

$a_2 = 2$

$a_3 = 5$

$a_4 = 12$

$a_5 = 25$

一階差：1, 3, 7, 13

二階差：2, 4, 6

Ex8：已知二多項式，

$P(x)=1+2x+3x^2+\cdots+11x^{10}=\sum_{k=0}^{10}(1+k)x^k$

$Q(x)=1+3x^2+5x^4+\cdots+11x^{10}=\sum_{k=0}^{5}(2k+1)x^{2k}$，

求 $P(x)\cdot Q(x)$ 中，x^9 的係數。

Sol：

$Q(x)$	$P(x)$
1	$\cdot\ 10x^9$
$3x^2$	$\cdot\ 8x^7$
$5x^4$	$\cdot\ 6x^5$
$7x^6$	$\cdot\ 4x^3$
$9x^8$	$\cdot\ 2x^1$

$1\cdot10+3\cdot8+5\cdot6+7\cdot4+9\cdot2$

$=10+24+30+28+18$

$=\underline{110}$ #

[法二] $\sum_{k=1}^{5}(2k-1)(-2k+12)$

$=\sum_{k=1}^{5}(-4k^2+26k-12)$

$=-4\times\frac{5\times6\times11}{6}+26\times\frac{5\times6}{2}-12\times5$

$=-220+390-60=\underline{110}$ #

Ex9：在等比數列 $\langle a_n\rangle$ 中，

$a_1=1$，$a_4=2-\sqrt5$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，

求 $\langle a_n\rangle$ 的公比。

Sol： $a_1, a_1r, a_1r^2, a_1r^3, \cdots$

$a_3=a_2+a_1$

$\therefore a_1r^2=a_1r+a_1$

$\Rightarrow r^2-r-1=0$

$\Rightarrow r=\frac{1\pm\sqrt5}{2}$

(取負)

$\underline{r=\frac{1-\sqrt5}{2}}$ #

$\because a_1=1>0$

$a_4=2-\sqrt5<0$

(正負相間)

$\therefore r<0$

Ex10：數列 $\langle a_n\rangle$ 前 n 項和

$a_1+a_2+\cdots+a_n=2^{n+1}(n^2-2n)$，

求此數列第 n 項 a_n。

Sol： $a_n=S_n-S_{n-1}$

$=2^{n+1}(n^2-2n)-2^n((n-1)^2-2(n-1))$

$=2^n[2n^2-4n-(n^2-4n+3)]$

$=\underline{2^n(n^2-3)}$ #

Ex11：設 $(a_{n+1})^2=\frac{1}{\sqrt{10}}(a_n)^2$，$n\in\mathbb{N}$ 且 $a_n>0$。

令 $b_n=\log a_n$，則數列 $b_1,b_2,\cdots$ 為

(1) 公差為正的等差數列 (2) 公差為負的等差數列

(3) 公比為正的等比數列 (3) 公比為負的等比數列.

Sol： $\log(a_{n+1})^2=\log\left[\frac{1}{\sqrt{10}}(a_n)^2\right]$

$\Rightarrow 2\log a_{n+1}=-\frac12+2\log a_n$

$\Rightarrow 2b_{n+1}=\frac{-1}{2}+2b_n$

$\Rightarrow b_{n+1}-b_n=\frac{-1}{4}$ $\underline{(2)}$ #

Ex12：設 $a_1,a_2,\cdots$ 為實數數列，

滿足 $a_{n+1}=\frac{n(n+1)}{2}-a_n$，$\forall n\in\mathbb{N}$.

請選出正確的選項。

(1) 若 $a_1=1$，則 $a_2=1$

(2) 若 a_1 是整數，則此數列每一項都是整數

(3) 若 a_1 是無理數，則此數列每一項都是無理數

(4) $a_2\le a_4\le\cdots\le a_{2n}\le\cdots$

(5) 如果 a_k 是奇數，則 $a_{k+2},a_{k+4},\cdots,a_{k+2n},\cdots$ 都是奇數.

Sol：

(1) $a_2=\frac{1\times2}{2}-a_1$

$=1-a_1$ (×)

(2) $\because \frac{n(n+1)}{2}$ 必為整數

$\therefore a_n$ 是整數 $\Rightarrow a_{n+1}$ 是整數

(整數"+""−"運算仍為整數)

(3) "有理數±無理數"必為無理數

$\therefore a_{n+1}$ 為無理數

(4) $a_{n+2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}-a_{n+1}$

$\therefore a_{n+2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}-\left(\frac{n(n+1)}{2}-a_n\right)$

$=a_n+(n+1)$

$\therefore a_n\le a_{n+2}$ $\forall n$

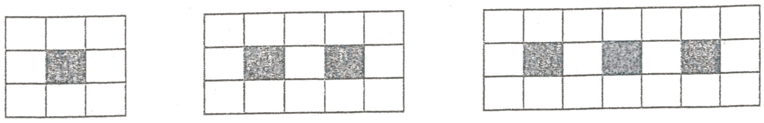
(5) case1：若 k 是奇數，k+1 是偶

$\therefore a_k,a_{k+2},\cdots$ 均奇

case2：若 k 是偶，k+1 是奇

$\therefore a_k,a_{k+2},\cdots$ 奇，偶，奇，偶.

Ex13：用黑白兩色地磚，依如下規則：



圖一　圖二　圖三

求第95個圖需要幾個白色地磚？

Sol：[法一] $3+5\times95=\underline{478}$ #

[法二] $a_n-a_{n-1}=5$

$a_1=8$

$a_2-a_1=5$

$\vdots$

$+)\ a_{95}-a_{94}=5$

$a_{95}=8+5\times94=\underline{478}$ #

Ex14：用單位長的不銹鋼條焊接如下圖，
圖1有兩層，共4個焊接點，
圖2有三層，共10個焊接點，
圖3有四層，共20個焊接點，

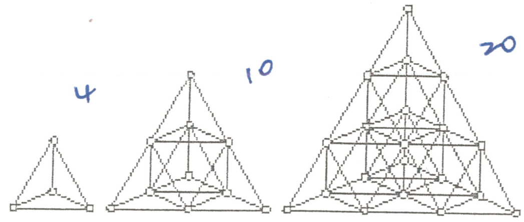


圖1　圖2　圖3

依此規律，圖5有六層共有多少個焊接點。

Sol：[法一] $1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+\cdots+6)$

$=\sum_{k=1}^{6}(1+2+\cdots+k)=\sum_{k=1}^{6}\frac{k(k+1)}{2}$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{6\times7\times13}{6}+\frac{6\times7}{2}\right)=\underline{56}$ #

[法二] $a_1=1$

$a_2-a_1=6$) 3

$a_3-a_2=10$) 4

$a_4-a_3=15$) 5

$a_5-a_4=21$) 6

$\therefore a_4=35$

$\underline{a_5=56}$ #

Ex15：觀察 3x3 和 4x4 方格數字規律，

1	2	3
1	2	2
1	1	1

1	2	3	4
1	2	3	3
1	2	2	2
1	1	1	1

在10x10方格上，仿上面規律填入數字，
則所填入的100個數字和為何？

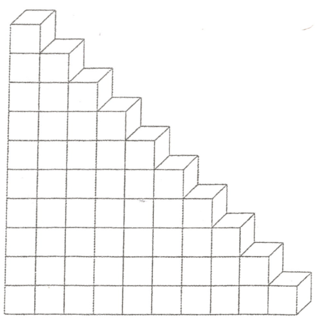
Sol：[法一] $1\cdot19+2\cdot17+\cdots+10\cdot1$

$=\sum_{k=1}^{10}k(-2k+21)$

$=-2\times\frac{10\times11\times21}{6}+21\times\frac{10\times11}{2}=385$

[法二]
5　7　9　11　13　15　17　19
4　9　16　25　36　49　64　81　100
1　5　14　30　55　91　140　204　285　$\underline{385}$ #

Ex16：將邊長為1公分的正立方体堆疊如下圖，
當堆疊完10層時，此圖形的表面積為何？

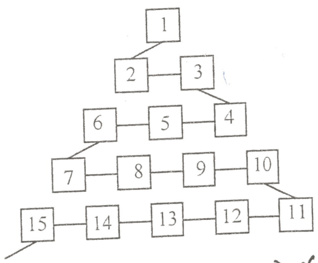


Sol：

上=10
下=10
左=10
右=10
前=1+2+⋯+10=55
後=1+2+⋯+10=55

$\underline{150}$ #

Ex17：下圖為網路工作者經常用來
解釋網路運作的蛇形模型：
數字1出現在第1列，數字2,3出現在第2列
數字6,5,4（左至右）出現在第3列，依此類推。



試問第99列第67個數字為何？

Sol：第k列有k個數

⇒ 第1～98列共有 $\frac{98\times99}{2}=4851$

第99列由左至右第67個數
由右至左第33個數

$\therefore 4851+33=\underline{4884}$ #