排列組合

1、邏輯

(1) 敘述：能判斷真偽的語句。習慣「真」以「T」表示；「偽」以「F」表示。

(2) 複合敘述：將兩個敘述用「且」、「或」連接。「且」以「∧」表示；「或」以「∨」表示。

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	F	F	F

(3) 笛摩根律：$\sim(p\wedge q)=(\sim p)\vee(\sim q)$；$\sim(p\vee q)=(\sim p)\wedge(\sim q)$

2、集合

(1) 由一群物件組合出來的群體，這些物件稱為元素，這群體稱為集合。習慣以大寫英文字母表示。$n(A)$ 表示 A 集合內的元素個數。

(2) "$=$"：$A=B$ 表示 A 集合和 B 集合有相同元素。

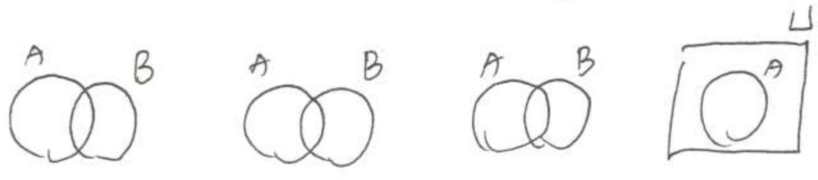
"$\subset$"（包含）：$A\subset B$ 表示 A 集合的元素，B 集合都有。也稱 A 是 B 的子集。

"$\in$"（屬於）：$a\in A$ 表示 A 集合有元素 a。

(3)

運算	$A\cap B$	$A\cup B$	$A-B$	A'	$A\times B$
名稱	交集	聯集	差集	補集	積集

文氏圖



$\{(a,b)\mid a\in A,\ b\in B\}$

※習慣上，U 表示宇集，ϕ 表示空集合

(4) 笛摩根律：$(A\cup B)'=A'\cap B'$；$(A\cap B)'=A'\cup B'$

3、集合計數

(1) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ (2) $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$ (3) $n(A')=n(U)-n(A)$

(4) $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(A\cap C)$ (5) $n(A\times B)=n(A)\times n(B)$

Ex1: 學校規定上學期成績需同時滿足以下兩項要求，才有資格參選模範生。

一、國文成績或英文成績 70分(含)以上

二、數學成績及格

已知小文上學期國文65分且他不符合參選模範生資格。請問下列哪一個選項推論正確？

(1) 小文英文成績未達70分

(2) 小文數學成績不及格

(3) 小文英文成績70分以上但數學成績不及格

(4) 小文英文成績未達70分且數學成績不及格

✓(5) 小文英文成績未達70分或數學成績不及格.

Sol: (1) 可能數學不及格，但英文70分以上

(2) 可能英文未達70分，但數學及格

(3) 同(2)

(4) 同(1)

(5) 正確.

∵ 不符資格

∴ (英文70分以上 ∩ 數學及格)′ = (英文未達70) ∪ (數學不及格)

Ex2: 某班35人，每天習慣喝含糖茶飲料的有25人，習慣喝咖啡的有10人，兩者都有的有6人，下列何者正確？

✓(1) 只喝含糖茶飲料的有19人

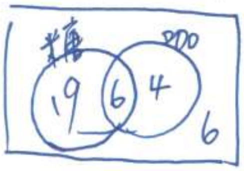
✓(2) 只喝咖啡的有4人

(3) 全班都喝含糖茶飲料或咖啡

✓(4) 不喝含糖茶飲料且不喝咖啡有6人

✓(5) 不喝含糖茶飲料的有10人.

Sol:



※從中間做起

(3) 有6人都不喝

Ex3: 某班共有45人，統計顯示此班有35人有手機；有24人有平板.

A為同時有手机與平板人數

B為有手机，但沒有平板人數

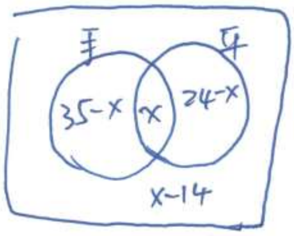
C為沒有手机，但有平板人數

D為沒有手机也沒有平板人數.

請選出恆成立的選項。

(1) A>B ✓(2) A>C ✓(3) B>C ✓(4) B>D (5) C>D

[法一]



$$\begin{cases} 35-x\ge 0 \\ x\ge 0 \\ 24-x\ge 0 \\ x-14\ge 0 \end{cases}$$

$\therefore 14\le x\le 24$

$A = x \Rightarrow 14\le A\le 24$

$B = 35-x \Rightarrow 11\le B\le 21$

$C = 24-x \Rightarrow 0\le C\le 10$

$D = x-14 \Rightarrow 0\le D\le 10$

[法二] 兩極端

Ex4: 某班50人，段考國文、英文、數學及格人數分別為45、39、34人。且英文及格的學生國文也都及格。假設數學和英文皆及格的有x人，數學及格但英文不及格的有y人，請選出正確的選項

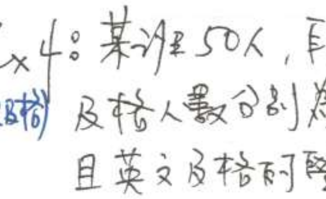
(1) $x+y=39$ ✓(2) $y\le 11$

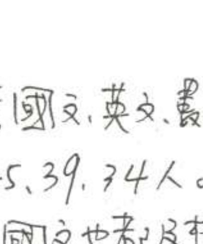
(3) 三科中至少一科不及格的有 $39-x+y$ 人

(4) 三科中至少一科不及格的最少有11人

✓(5) 三科中至少一科不及格的最多有27人.

Sol: 僅提及英、數





$$\begin{cases} 39-x\ge 0 \\ x\ge 0 \\ 34-x\ge 0 \\ x-23\ge 0 \end{cases} \Rightarrow 23\le x\le 34$$

$\therefore 0\le y=34-x\le 11$

(3)(4)(5)

至少一科不及格 = 英文or數學不及格 = $50-x$

$16\le 50-x\le 27$

← 國文不及格者 ⇒ 英文必不及格

p2.

4、加法原理、乘法原理：

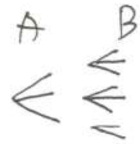
(1) 加法原理：做 A "或" 做 "B" 的方法數 $= n(A)+n(B)$

(2) 乘法原理：做 A "再" 做 "B" 的方法數 $= n(A)\times n(B)$

5、討論：

(1) 窮舉法：將所有情形逐一列出。若與個數有關可由(小→大) or (大→小)討論

(2) 樹狀圖：將事情分成步驟 A, B, … ⇒

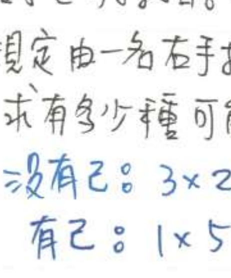


(3) 轉化為方程式：由係數大的開始討論。

Ex5：一乒乓球隊有6位選手，其中甲乙丙為右手持拍，丁戊為左手持拍，而己為左右手皆可持拍。現在要派2位參加雙打，規定由一名右手持拍與一名左手持拍搭配。求有多少種可能的搭配。

Sol：[法一] 沒有己：$3\times 2=6$
有己：$1\times 5=5$] 11種 #

[法二]



$3\times 3+2=11$ #

Ex6：每次用20根相同的火柴圍成一個三角形，共可圍成幾個不全等的三角形。

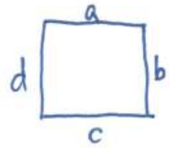
Sol：設三邊長 $x\geq y\geq z$
($\because x<y+z \Rightarrow \therefore x<10$)

(9,9,2) (8,8,4)
(9,8,3) (8,7,5)
(9,7,4) (8,6,6)
(9,6,5) (7,7,6)

8種 #

Ex7：將正方形ABCD的每一條邊各自標上1,2,3中的某一個數，使得任兩條相鄰的邊都標有恰好差1的兩個數。滿足這種條件的標示法有幾種。

Sol：



$a=1 \Rightarrow b=d=2 \Rightarrow c=1$ or 3：2種

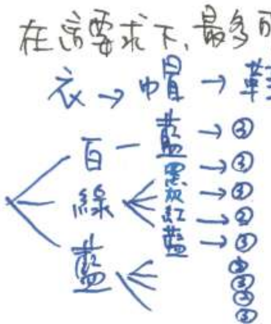
$a=2 \Rightarrow \begin{matrix} b=1 \text{ or } 3 \\ d=1 \text{ or } 3 \end{matrix} \Rightarrow c=2$ ：4種

$a=3 \Rightarrow b=d=2 \Rightarrow c=1$ or 3：2種

$2+4+2=8$ #

Ex8：某公司生產「阿民」公仔，各種款式只有球帽、球衣、球鞋顏色不同。其中球帽有黑、灰、紅、藍四種顏色；球衣有白、綠、藍三種顏色；球鞋有黑、白、灰三種顏色。公司決定 紅色帽子不配灰色鞋子 …①
白色球衣搭配藍色帽子 …②
在這要求下，最多可能有幾種不同款式的公仔。

Sol：衣 → 帽 → 鞋 (由①②)



$7\times 3+2\times 2=25$ #

Ex9：將100元換成50元、10元、5元，則有幾種不同的兌換方法。

Sol：設 50元 x 個，10元 y 個，5元 z 個
$50x+10y+5z=100 \Rightarrow 10x+2y+z=20$

x	0	1	2
y	0~10	0~5	0
z			0
組數	11	6	1

$11+6+1=18$ #

6、排組公式

(1) 直線排列：n人排n位的方法數＝ $n!$ 。 $\left(\begin{matrix} 0!=1,\ 1!=1,\ 2!=2,\ 3!=6 \\ 4!=24,\ 5!=120,\ 6!=720,\ 7!=5040 \end{matrix}\right)$

(2) 不盡相異物排列：3個相同白球和2個相同黑球排列的方法數＝ $\frac{5!}{3!2!}$ 。

(k個相同物 ⇒ $\frac{1}{k!}$)

(3) 簡單組合：n人挑m人的方法數＝ C^n_m ＝ C^n_{n-m} ＝ $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ 。

(從n個挑 n-m個不要)

<例> $C^5_2=\frac{5\times4}{1\times2}=10$ 。

(4) 重複組合：[想法一] n類物品挑m個(可重複)的方法數＝ H^n_m ＝ C^{n+m-1}_m 。

[想法二] 方程式 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$ 的非負整數解個數＝ H^n_m 。

註1([法一]→[法二])：設第1類物品挑 x_1 個

第2類物品挑 x_2 個

⋮

第n類物品挑 x_n 個

$\xrightarrow{\text{共挑m個}} x_1+x_2+\cdots+x_n=m$

註2(H→C)： $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$ ⇒ 將m想成 $\underbrace{11\cdots1}_{m\text{個}}$

∴即 $\underbrace{11\cdots1}_{m\text{個}}\ \underbrace{++\cdots+}_{(n-1)\text{個}}$ 排列

<c.f> P^n_m、n^m 均可想成乘法原理，亦或 $P^n_m=C^n_m\times m!$ 。

7、常用技巧

(1) 相鄰：綁在一起，視為一物。

(2) 不相鄰：先排其他，再插空。

(3) 有順序關係：視為相同物(□□)。

(4) 指定：直接先排

(5) 否定：全－( )

(6) 至少：[反面] 全－(不合)

[正面] 討論有幾個.

Ex10：合作社有5種不同品牌的巧克力，今甲、乙、丙三人前往購買，求下列各小題的方法數。

(1) 3人各買一盒巧克力(可重複)，求有幾種買法。

(2) 3人各買一盒均不同的巧克力，求有幾種買法。

(3) 3人各買一盒巧克力(可重複)，求店員有幾種取法。

(4) 3人各買一盒均不同的巧克力，求店員有幾種取法。

Sol：(1) 甲 乙 丙

$5\times5\times5=125$

(2) $5\times4\times3=60$

(3) 第1品牌 x_1 盒

2 x_2

⋮

5 x_5

$\Rightarrow x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=3$

$H^5_3=C^7_3=35$

(4) $C^5_3=10$

Ex11：某地共有9個電視頻道，將其分配給3個新聞台、4個綜藝台、2個體育台共三種類型。若同類型電視台的頻道要相鄰，而且前兩個頻道留給體育台，則頻道分配方式有幾種？

Sol：相鄰⇒綁一起

體體　新新新　綜綜綜綜

$1\times 2!\ \times 2!\times 3!\times 4! = 2\times 2\times 6\times 24$

$= \underline{576}$ #

Ex12：因乾旱水源不足，自來水公司計畫在下週一至週日的7天中選擇2天停止供水。若要求停水的2天不相連，則自來水公司共有多少種方式？

Sol：[法一] 不相鄰⇒先排其他，再插空

$\check{}0\check{}0\check{}0\check{}0\check{}0\check{} \Rightarrow C^6_2=15$ #

[法二] 全－相鄰

0000000　$C^7_2-6=15$ #

Ex13：某地區的車牌號碼共六碼，其中前兩碼為O以外英文字母大寫，後四碼為0到9的阿拉伯數字，但規定不能連續三個4。則所有第一碼為A且最後一碼為4的車牌個數為

(1) 25×9^3 (2) $25\times 9^2\times 10$ (3) 25×900 (4) 25×990 (5) 25×999

Sol：A＿ ＿ ＿ ＿ 4

不能都是4

$25\times\ 10\times(10\times 10-1)$

Ex14：啦啦隊競賽規定每隊8人，且每隊男、女生至少要有2人。某班共有4名男生及7名女生想要參加啦啦隊競賽。若由此11人中依規定選出8人組隊，則共有多少種不同的組隊方法？

Sol：至少⇒[正面] 討論有幾個

[反面] 全－不合

~~先分 ＿ 剩下隨便分~~ $\Rightarrow C^4_2 C^7_2 C^7_4 = 6\times 21\times 35$

[正面] 男2女6＋男3女5＋男4女4

$C^4_2C^7_6+C^4_3C^7_5+C^4_4C^7_4=42+84+35$

$=\underline{161}$ #

[反面] 全－男1女7－男0女8

$C^{11}_8-C^4_1C^7_7-0=\underline{161}$ #

Ex15：某動物園列車依序編號1到7，共7節車廂。今在每節車廂上畫一種動物。其中的兩節畫企鵝，兩節畫無尾熊，剩下三節畫貓熊，並要求最中間三節必須有企鵝、無尾熊及貓熊，則7節車廂共有多少種畫法。

Sol：□□□□□□□

中間

中間　兩側(企×1，無×1，貓×2)

$3!\ \times\ \frac{4!}{2!} = \underline{72}$ #

Ex16：從玫瑰、菊花、杜鵑、蘭花、山茶、水仙、繡球等七盆花中選四盆靠在牆邊排成一列，其中杜鵑和山茶都被選到，且此兩盆花位置相鄰的排法有多少種。

Sol：挑花　排列　AB杜山

$C^5_2\ \times(3!\times 2!)$

$=10\times 12=\underline{120}$ #

Ex17：小明想要安排星期一到星期五共五天的午餐計畫。他的餐點共有四種選擇：牛肉麵、大滷麵、咖哩飯及排骨飯。小明想依據下列兩原則來安排他的午餐：
(甲)每天只選一種但這五天每一種至少各點一次
(乙)連續兩天的餐點不重複且不連續兩天吃麵.
根據上述原則，小明這五天有多少不同午餐計畫

Sol：(甲) 某一種2天、其餘1天

① 牛×2 ⇒ 麵飯麵飯麵 ⇒ 麵 飯 $\frac{2!}{2!}\times 2! = 6$

② 大×2 ⇒ 同① ⇒ 6

③ 咖×2 ⇒ ✓咖✓咖✓排✓ ⇒ $C^3_1\times 2!$
(麵不相鄰) ✓咖✓排✓咖✓ ⇒ $C^4_2\times 2!$
✓排✓咖✓咖✓ ⇒ $C^3_1\times 2!$
⇒ 24

④ 排×2 ⇒ 同③

6+6+24+24 = 60

Ex18：

(1) 求 $x+y+z=8$ 的非負整數解個數。

(2) 求 $x+y+z=8$ 的正整數解個數。

(3) 求 $x+y+z\le 6$ 的正整數解個數。

Sol：(1) $H^3_8 = C^{10}_8 = \frac{10\times 9}{2} = 45$

(2) x 是正整數：1,2,3,… ⇒ $x=x'+1$
x' 是非負整數：0,1,2,3,…
同理 $y'=y+1$，$z'=z+1$
$x+y+z=8 \Rightarrow (x'+1)+(y'+1)+(z'+1)=8$
$\Rightarrow H^3_5 = C^7_5 = 21$

(3) 設非負整數 u 滿足 $x+y+z+u=6$
設 x',y',z' 為非負整數
$x'+y'+z'+u=3 \Rightarrow H^4_3 = C^6_3 = 20$

Ex19：將24顆雞蛋分裝到紅、黃、綠的三個籃子。每個籃子都要有雞蛋且黃、綠兩個籃子都裝奇數顆。求分裝的方法數。

Sol：[法一] 設黃色有 $(2a+1)$ 個
綠色有 $(2b+1)$ 個
⇒ 紅色 $(2c+2)$ 個
$\Rightarrow (2a+1)+(2b+1)+(2c+2)=24$
$\Rightarrow a+b+c=10$
$H^3_{10} = C^{12}_{10} = 66$

[法二] 討論 (黃,綠,紅)

(1,1,22)	(3,1,20)	……	(21,1,2)
(1,3,20)	(3,3,18)		
⋮	⋮		
(1,21,2)	(3,19,2)		
11個	10個		1個

共 $1+2+\cdots+11 = \frac{11\times 12}{2} = 66$

Ex20：小燦預定在陽台上種植玫瑰、百合、菊花、向日葵等四種盆栽。如果陽台上的空間最多能種8盆，可以不必擺滿，並且每種花至少一盆，則小燦買盆栽有多少種方法。

Sol：[法一] 第一種花 x_1 盆
二 x_2
三 x_3
四 x_4
$\Rightarrow x_1+x_2+x_3+x_4\le 8$ 的正整數解.
設 u 滿足 $x_1+x_2+x_3+x_4+u=8$
$\Rightarrow x_1'+x_2'+x_3'+x_4'+u=8-4$
$\Rightarrow H^5_4 = C^8_4 = \frac{8\times7\times6\times5}{24} = 70$

[法二] 討論
(1,1,1,1) ⇒ 1
(1,1,1,2) ⇒ 4
(1,1,1,3) ⇒ 4
(1,1,1,4) ⇒ 4
(1,1,1,5) ⇒ 4
(1,1,2,2) ⇒ 6
(1,1,2,3) ⇒ 12
(1,1,2,4) ⇒ 12
(1,1,3,3) ⇒ 6
(1,2,2,2) ⇒ 4
(1,2,2,3) ⇒ 12
(2,2,2,2) ⇒ 1

$1\times2+4\times5+6\times2+12\times3 = 70$

Ex21：分組分堆 ⇒ 先分組，再分配（分組有相同個數要除）

(1) 6本不同的書平分3堆的方法數

(2) 6本不同的書平分給甲乙丙的方法數

(3) 6本不同的書分給甲乙丙，每人至少一本的方法數

Sol：(1) $C^6_2C^4_2C^2_2\times\frac{1}{3!} = 15$
(2,2,2)

(2) $(C^6_2C^4_2C^2_2\times\frac{1}{3!})\times 3! = 90$

(3) (1,1,4)：$C^6_1C^5_1C^4_4\times\frac{1}{2!}\times 3!$
(1,2,3)：$C^6_1C^5_2C^3_3\times 3!$
(2,2,2)：$C^6_2C^4_2C^2_2\times\frac{1}{3!}\times 3!$
90+360+90=540

Ex22：籃球3人鬥牛賽，共有甲乙等9人參加，組成3隊，且甲、乙兩人不在同一隊的組隊方法有多少種？

Sol：[正面] 分 (2,2,3) 甲乙
$C^7_2\times C^5_2\times C^3_3\times\frac{1}{2!}\times 2! = 210$

[反面] 全 − 甲乙同隊
$C^9_3C^6_3C^3_3\times\frac{1}{3!} - C^7_1C^6_3C^3_3\times\frac{1}{2!} = 210$

Ex23: 因數問題

$a=360$, 求:

(1) a的正因數個數　(2) a的正因數和

(3) a的正因數中, 是12的倍數 個數及其總和.

Sol: ◎ $a=p_1^{n_1}\times p_2^{n_2}\times\cdots\times p_k^{n_k}$ (質因數分解)

⇒ (1) a的正因數個數 = $(n_1+1)(n_2+1)\cdots(n_k+1)$

(2) a的正因數和 = $(p_1^0+p_1^1+\cdots+p_1^{n_1})\times\cdots\times(p_k^0+p_k^1+\cdots+p_k^{n_k})$

$360=2^3\times3^2\times5$

(1) $2^{\square}\times3^{\triangle}\times5^{☆}$

$\square$: 0,1,2,3　$\triangle$: 0,1,2　☆: 0,1

$4\times3\times2=\underline{24}$ #

(2) $(2^0+2^1+2^2+2^3)(3^0+3^1+3^2)(5^0+5^1)$

$=15\times13\times6=\underline{1170}$ #

(3) 個數　$\square$: 2,3　$\triangle$: 1,2　☆: 0,1

$2\times2\times2=\underline{8}$ #

和 $=(2^2+2^3)(3^1+3^2)(5^0+5^1)$

$=12\times12\times6=\underline{864}$ #

Ex24: 數字問題

(1) 三位數abc中, 數字均相異有幾個。

(2) 三位數abc中, $a<b<c$的有幾個。

(3) 三位數abc中, $a\le b\le c$的有幾個。

(4) 三位數100~999中, 含有"0"的有幾個。

(5) 三位數100~999中寫了幾個"0"。

Sol: ◎看到 $a<b<c \Rightarrow \underline{C}$

$a\le b\le c \Rightarrow \underline{H}$

百 十 個

(1) $9\times9\times8=648$

(2) $C^9_3=\frac{9\times8\times7}{6}=84$

(3) 1有x_1個

2有x_2個

⋮

9有x_9個

$\Rightarrow x_1+x_2+\cdots+x_9=3$

$\Rightarrow H^9_3=C^{11}_3=\frac{11\times10\times9}{6}=165$

(4) x0x ⇒ 9×9

xx0 ⇒ 9×9

x00 ⇒ 9

共171個

(5) $81\times1+81\times1+9\times2$

$=180$個

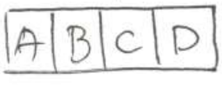
Ex25: 著色問題 ⇒ 接觸面多先塗

用3種顏色塗A,B,C,D(如下圖), 且相鄰不得同色。

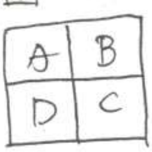
(1) 任意塗有幾種方法。

(2) 3種顏色均使用, 有幾種方法。

Sol: 圖一



圖二



(1) $3\times2\times2\times2=24$

[反面]

(2) 全−只用2色

$24-C^3_2\times2\times1\times1\times1=18$

[正面] $3\times2\times($ C用第3色 $2+$ D用第3色 $1-0)$

$=18$

(1) A B C D

A=C　$3\times2\times1\times2=12$

A≠C　$3\times2\times1\times1=6$

共18種

(2) 全−只用2色

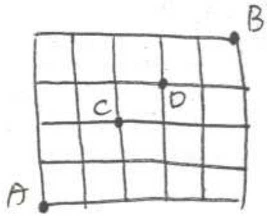
$18-(2\times1\times1\times1)=16$

Ex26: 捷徑問題 ⇒ 角註法(加法原理)

(1) A→B, 走捷徑方法數。

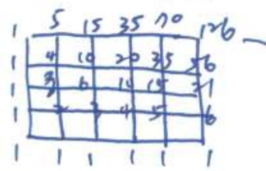
(2) A→B, 走捷徑, 經過C, 但不經過D的方法數。

(3) A→B走「→」「↑」「↓」的方法數。



Sol: (1) [法一] →→→→→ ↑↑↑↑ 排列 ⇒ $\frac{9!}{5!4!}=\underline{126}$ #

[法二]



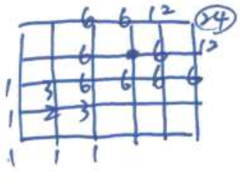
126 #

(2) [法一] 經C − 經C且經D

A→C→B　A→C→D→B

$\frac{4!}{2!2!}\times\frac{5!}{3!2!}-\frac{4!}{2!2!}\times\frac{2!}{1!1!}\times\frac{3!}{2!1!}=60-36=\underline{24}$ #

[法二]



24 #

(3) $|\frac{\rightarrow}{5}|\frac{\rightarrow}{5}|\frac{\rightarrow}{5}|\frac{\rightarrow}{5}|\frac{\rightarrow}{5}|\Rightarrow 5^5=\underline{3125}$ #

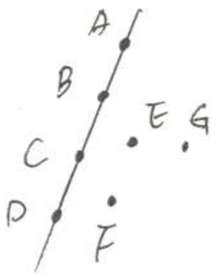
Ex27: 幾何計數

平面上有7個點，其中A.B.C.D 4點共線，其餘任三點均不共線，

(1) 這7點可以決定幾條相異直線。

(2) 這7點可以決定幾個相異三角形。

Sol: 2點決定直線；3點決定三角形



有線

(1) $C^7_2 - C^4_2 + 1 = 21-6+1 = \underline{16}$ #

(2) $C^7_3 - C^4_3 = 35-4 = \underline{31}$ #

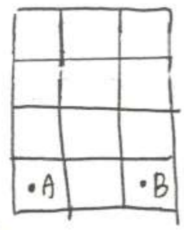
Ex28: 如下圖所示，每一小格均為1×1的正方形，求：

(1) 共有幾個矩形。

(2) 共有幾個正方形。

(3) 共有幾個矩形包含A點或B點。

Sol:



矩形

(1) 上下選2條，左右選2條

$C^5_2 \times C^4_2 = \underline{60}$ #

(2) 正方形：討論

1×1： 3×4 = 12
2×2： 2×3 = 6
3×3： 1×2 = 2

共20個 #

(3) 含A + 含B − 含A且B

上下 左右

$C^4_1C^1_1C^1_1C^3_1 + C^4_1C^1_1C^3_1C^1_1 - C^4_1C^1_1C^1_1C^1_1$

$= 12+12-4 = \underline{20}$ #

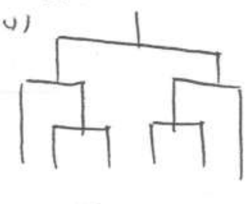
Ex29: 賽程問題

(1) 如圖，有6個隊伍排入，有幾種不同賽程。

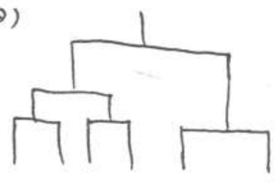
(2) 如圖，有6個隊伍排入，有幾種不同賽程。

Sol: 有對稱 ⇒ $\times\frac{1}{2!}$

(1)



(2)



$\frac{6!}{(2!)^3} = \underline{90}$ #

$\frac{6!}{(2!)^4} = \underline{45}$ #

8、二項式定理：

$$(x+y)^n = C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1}y^1 + C_2^n x^{n-2}y^2 + \cdots + C_n^n y^n$$

① 共有 $(n+1)$ 項　　② 一般項：$C_k^n x^k y^{n-k}$

<Gft> 巴斯卡定理：$C_k^n = C_k^{n-1} + C_{k-1}^{n-1}$

（想法：n人挑 k人 分成"甲沒被選"或"甲被選"）

Ex 30： $(ax^2 - \frac{2}{x})^5$ 展開式中 x^4 的係數為 5，求 a 值。

Sol：一般項 $C_k^5 (ax^2)^k (-\frac{2}{x})^{5-k}$

$= C_k^5 \cdot a^k (-2)^{5-k} \cdot x^{2k+k-5}$

$\therefore 3k-5=4 \Rightarrow k=3$

$\therefore x^4$ 係數 $C_3^5 \cdot a^3 \cdot (-2)^2 = 5$

$\Rightarrow a^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ #

Ex 31： 二項式定理應用

(1) $x^{100}+1$ 除以 $(x-1)^2$ 的餘式。

(2) 12^{10} 除以 1000 的餘數。

Sol：

(1) $(x-1+1)^{100}+1$

$= \underbrace{C_{100}^{100}(x-1)^{100} + \cdots + C_2^{100}(x-1)^2}_{\text{均為 }(x-1)^2\text{ 倍式}} + C_1^{100}(x-1) + C_0^{100} + 1$

$\therefore$ 餘式 $= 100(x-1)+1+1 = 100x-98$ #

(2) $(10+2)^{10} = \underbrace{C_{10}^{10}10^{10} + \cdots + C_3^{10}10^3 \cdot 2^7}_{\text{均為 1000 倍數}} + C_2^{10} \cdot 10^2 \cdot 2^8 + C_1^{10} \cdot 10 \cdot 2^9 + C_0^{10} \cdot 2^{10}$

$\therefore$ 餘數 $= 45 \times 100 \times 256 + 51200 + 1024$

$\therefore$ 真正餘數 $= 224$ #

Ex 32：

(1) $C_0^3 + C_1^4 + C_2^5 + \cdots + C_{86}^{89} = C_m^n$ 且 $m<10$，求數對 (n,m)。

(2) $2000 < C_1^n + C_2^n + \cdots + C_n^n < 3000$，求 n 值。

Sol：下面相同 ⇒ 巴斯卡

上面相同 ⇒ 二項式

(1) $C_3^3 + C_3^4 + C_3^5 + \cdots + C_3^{89}$

$= \underline{C_4^4 + C_3^4} + C_3^5 + \cdots + C_3^{89}$

$= C_4^{90}$　　$\therefore n=90,\ m=4$ #

(2) $C_0^n + C_1^n + \cdots + C_n^n = (1+1)^n$

原式 $= 2^n - 1$

$2000 < 2^n - 1 < 3000$

$2001 < 2^n < 3001$

$\Rightarrow n = 11$ #