機率 ⇒ 所有物品均視為 相異物

1、樣本空間與事件：

(1) 樣本空間：一試驗所有可能的結果所形成的集合稱樣本空間，以 S 表示。而樣本空間的元素稱樣本點。

(2) 事件：樣本空間 S 中的任意子集 A 稱為事件。

① 和事件：$A \cup B$

② 積事件：$A \cap B$

③ 餘事件：A'

④ 互斥事件：若 $A \cap B = \phi$，稱 A、B 為互斥事件。

2、古典機率：

(1) 定義：樣本空間 S 有 n 個樣本點且每一個樣本點出現機會均等，事件 A 是由 m 個樣本點所組成 $(m \le n)$，則事件 A 發生的機率 $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{m}{n}$。

(2) 性質：① $P(\phi) = 0$　② $P(S) = 1$　③ $0 \le P(A) \le 1$

④ $P(A') = 1 - P(A)$　⑤ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Ex 1：樣本空間 $S = \{1,2,3,4,5\}$，若基本事件出現的機會均等，則下列敘述何者正確？

(1) S 共有 5 個事件　$\{\ \}, \{1\}, \{2\}, \cdots, \{5\}$　$\{1,2\}, \cdots, \{1,2,3,4,5\}$

(2) 若 $A \subset S$，且 $n(A) = 2$ 的事件共有 10 個

(3) S 是一事件

(4) ϕ 是一事件

Sol：◎ 集合 S(樣本空間) 有 n 個元素，⇒ 子集 A(事件) 有 2^n 個。

(1) $2^5 = 32$

(2) $C^5_2 = 10$

(3) S 稱為全事件

(4) ϕ 稱為空事件

Ex2：對50人的班級調查喝飲料，發現習慣半糖的有37人，而習慣去冰的有28人。現在隨機抽問該班一位同學，他喝飲料的習慣是半糖且去冰的機率有可能是下列哪些選項？

(1) 0.28 (2) ✓ 0.46 (3) ✓ 0.56 (4) 0.66 (5) 0.74

Sol：

∴ $15 \le x \le 28$

$\frac{15}{50} \le p \le \frac{28}{50} \Rightarrow 0.3 \le p \le 0.56$

Ex3：從二位數中隨機選取一個數，設p是其十位數字小於個位數字的機率。關於p值的範圍，何者正確？

(1) $0.22 \le p < 0.33$ (2) ✓ $0.33 \le p < 0.44$
(3) $0.44 \le p < 0.55$ (4) $0.55 \le p < 0.66$

Sol：$a < b \Rightarrow C^9_2 = 36$

$p = \frac{36}{90} = \frac{4}{10}$

Ex4：某公司規定員工可在一星期中挑兩天休假。若甲、乙隨機選擇休假日且互不相關。試問一星期中發生兩人在同一天休假的機率。

Sol：全 − 均不同天休假

[反面] $= 1 - \frac{C^7_2 C^5_2}{C^7_2 C^7_2} = 1 - \frac{10}{21} = \frac{11}{21}$ #

[正面] 有2天同 + 有1天同

$\frac{C^7_2 \times 1}{C^7_2 C^7_2} + \frac{C^7_2 C^2_1 C^5_1}{C^7_2 C^7_2} = \frac{1+10}{21} = \frac{11}{21}$ #

Ex5：一隻青蛙位於坐標平面的原點，每步隨機上、下、左、右跳一單位長，總共跳了四步。求四步後恰回到原點的機率。

Sol：討論

上×2，下×2 $\Rightarrow \frac{4!}{2!2!} = 6$

上×1，下×1，左×1，右×1 $\Rightarrow 4! = 24$

左×2，右×2 $\Rightarrow \frac{4!}{2!2!} = 6$

$p = \frac{36}{4^4} = \frac{9}{64}$ #

Ex6：12張分別標以1,2,3,…,12的卡片，任意分成兩疊，每疊各六張，求：

(1) 1,2,3三張在同一疊的機率。

(2) 1,2,3,4四張中，每疊各兩張的機率

Sol：Key：分子、分母要一致
(可視為 ① 兩疊可互換 ② A、B兩疊)

[法一] 兩疊可換

$n(S) = C^{12}_6 C^6_6 \times \frac{1}{2!}$ (6,6)

(1) $n(A) = C^9_3 C^6_6$ (3,6)

$\Rightarrow p = \frac{C^9_3}{C^{12}_6} = \frac{6}{12 \times 11 \times 10} = \frac{1}{220}$

(2) $n(A) = C^4_2 C^2_2 \times \frac{1}{2!} \times 2!$ (2,2) $\times C^8_4 C^4_4 \times \frac{1}{2!}$ (4,4)

$\Rightarrow p = \frac{3 \times 35 \times 2}{C^{12}_6} = \frac{5}{22}$

[法二] A、B兩疊

$n(S) = C^{12}_6 C^6_6$

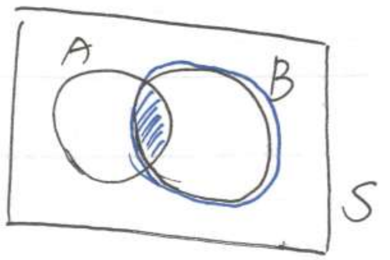
(1) $n(A) = C^1_1 \times C^9_3 \times C^6_3$ (放1,2,3)

(2) $n(A) = C^4_2 C^2_2 C^8_4 C^4_4$

3、條件機率 ⇒ 可視為樣本空間限縮($S\to B$)

設 A、B 是 S 中的兩事件，

已知事件 B 發生的情形下，求事件 A 發生的機率 $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$。

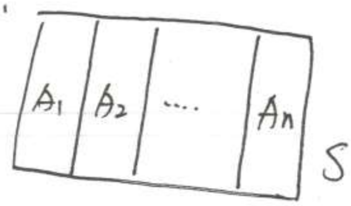


4. 貝氏定理 ⇒ 樹狀圖

(1) 分割：設 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是樣本空間 S 的一分割，

則 ① $A_i \cap A_j = \phi$ $(i\neq j)$

② $A_1\cup A_2\cup A_3 \cdots \cup A_n = S$



(2) 貝氏定理：設 A_1, A_2 是樣本空間 S 的一分割，則對 S 中任意事件 B，

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)\cdot P(B|A_1)}{P(A_1)\cdot P(B|A_1)+P(A_2)\cdot P(B|A_2)}$$

5、獨立事件：

(1) 若 A、B 為獨立事件 ⇔ $P(A|B)=P(A)$ ⇔ $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$。

反之，A、B 不獨立則稱為相關事件。

<cf> A、B 為互斥事件 ⇔ $A\cap B=\phi$。

Ⓝ A、B 獨立 ⇔ A、B' 獨立 ⇔ A'、B 獨立 ⇔ A'、B' 獨立

(2) 若 A、B、C 為獨立事件 ⇔ ① $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

② $P(A\cap C)=P(A)\cdot P(C)$

③ $P(B\cap C)=P(B)\cdot P(C)$

④ $P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$

Ex7：袋中有10支籤，其中3支中獎籤，
今甲、乙、丙三人逐一抽取，取後不放回，
求下列何者正確？

(1) ✓ 甲中獎機率為 $\frac{3}{10}$

(2) 乙中獎機率小於 $\frac{3}{10}$

(3) 在甲不中獎情形下，乙中獎機率為 $\frac{2}{9}$

(4) ✓ 在甲、乙恰有1人中獎情形下，丙中獎機率為 $\frac{2}{8}$

(5) 甲中獎和乙中獎為獨立事件

Sol：公平抽籤 ⇒ 不分順序，獲勝機會相等

(1)(2) 甲中獎機率 = 乙中獎機率 = $\frac{3}{10}$

(3) 甲不中獎 ⇒ 9支籤中，3支中獎籤

∴ 乙中獎機率 = $\frac{3}{9}$

(4) 甲、乙1人中獎 ⇒ 8支籤，2支中獎籤，

∴ 丙中獎機率 = $\frac{2}{8}$

(5) $P(\text{甲中且乙中}) = \frac{3}{10}\times\frac{2}{9} \neq \frac{3}{10}\times\frac{3}{10} = P(\text{甲中})\times P(\text{乙中})$

Ex9：投擲一個公正骰子三次，

(1) 求出現至少一次一點的機率。

(2) 求在出現至少一次一點的情形下，出現至少一次二點的機率。

(3) 求最大是5點的機率。

(4) 求最大是5點的情形下，最小是2點的機率。

Sol：(1) $1 - P(\text{沒有1點}) = 1 - \frac{5^3}{6^3} = \frac{91}{216}$

(2) $n(S) = 6^3 - 5^3 = 91$

A: 112, 122, 12x

$n(A) = \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + C^4_1 \times 3! = 30 \Rightarrow P = \frac{30}{91}$

(3) $n(S) = 6^3 = 216$

A: 5xx, 55x, 555

$n(A) = 4^2 \times \frac{3!}{2!} + 4 \times \frac{3!}{2!} + 1 = 61 \Rightarrow P = \frac{61}{216}$

(4) $n(S) = 61$

A: 552, 5x2, 522

$\Rightarrow n(A) = \frac{3!}{2!} + C^2_1 \times 3! + \frac{3!}{2!} = 18$

$P = \frac{18}{61}$

Ex8：擲一均勻硬幣，連續三次出現同一面就停止。

a：恰好投擲三次停止的機率。

b：在第一次反面的情況下，恰好在第四次停止的機率。

c：在第一、二次都是反面的情形下，恰好在第五次停止的機率。

求 a、b、c 大小關係。

Sol：

a ⇒ 全正 or 全反，$P_a = (\frac{1}{2})^3 \times 2$

b ⇒ 二～四 全反，$P_b = (\frac{1}{2})^3$

c ⇒ 三～五 全正，$P_c = (\frac{1}{2})^3$

$b = c < a$

Ex10：某公司員工有15%為行政人員，有35%為技術人員，50%為研發人員。這些員工中，有60%的行政人員有大學文憑，有40%的技術人員有大學文憑，有80%的研發人員有大學文憑。

(1) 求此公司員工有大學文憑的比例。

(2) 求有大學文憑的員工中隨機抽一人，他是技術人員的機率。

Sol：
- 15% 行政
  - 60% 有大學 ✓
  - 沒大學
- 35% 技術
  - 40% 有 ✓
  - 沒有
- 50% 研發
  - 80% 有 ✓
  - 沒

(1) $15\% \times 60\% + 35\% \times 40\% + 50\% \times 80\% = 63\%$ #

(2) $\frac{35\% \times 40\%}{63\%} = \frac{14}{63} = \frac{2}{9}$ #

Ex11：高二舉行打靶練習，甲、乙兩人射擊命中率分別為$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，今天兩人同時射擊一靶，各射擊一發，且兩人互不影響，求：

(1) 靶面命中一發的機率。

(2) 已知靶面命中一發，求是甲命中的機率。

Sol：

甲：$\frac{2}{3}$ O ─ 乙：$\frac{3}{4}$ O；$\frac{1}{4}$ X ✓

甲：$\frac{1}{3}$ X ─ 乙：$\frac{3}{4}$ O ✓；$\frac{1}{4}$ X

(1) $\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{5}{12}$ #

(2) $$\frac{\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}}{\frac{5}{12}}=\frac{2}{5}$$ #

Ex12：設某人投籃命中率為$\frac{2}{3}$，試問此人需連續投幾球，至少投進一球的機率超過0.999。

Sol：設連續投n球

至少進一球 = 全 − 都沒進

$1-\left(\frac{1}{3}\right)^n>0.999$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^n<0.001=\frac{1}{1000}$

$\therefore n\geq 7$ $(3^7=2187)$ #

Ex13：兩組使機器運轉的配件A、B，其單獨發生故障的機率分別為0.1，0.15。只有當A、B都發生故障時，才無法運作。A、B若用串接方式，前面故障會導致後面故障，A、B若用並列方式，則故障情形互不影響。

(一) 將B串接於A之後

(二) 將A串接於B之後

(三) 將A、B獨立並列

在情況(一)、(二)、(三)下，機器無法運轉的機率分別為p_1、p_2、p_3，求p_1、p_2、p_3大小關係。

Sol：

(一) A — B $\Rightarrow P_1=0.1$

(A故障，就故障)

(二) B — A $\Rightarrow P_2=0.15$

(三) $-\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}-$ $\Rightarrow P_3=0.1\times 0.15=0.015$

$P_3<P_1<P_2$

Ex14：根據50個學生對校外教學的滿意度調查如下表所示。已知滿意度與學生性別為獨立事件，求x，y值。

Sol：

	滿意	不滿意
男	x	12
女	y	8

$\Rightarrow y=30-x$

[法一] P(男生且不滿意) = P(男生)×P(不滿意)

$\Rightarrow \frac{12}{50}=\frac{x+12}{50}\times\frac{20}{50}$

$\Rightarrow x+12=12\times\frac{5}{2}=30$

$\therefore x=18$，$y=12$ #

[法二] 獨立⇒成比例

$\frac{x}{y}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}=\frac{18}{12}$

$\therefore x=18$，$y=12$ #