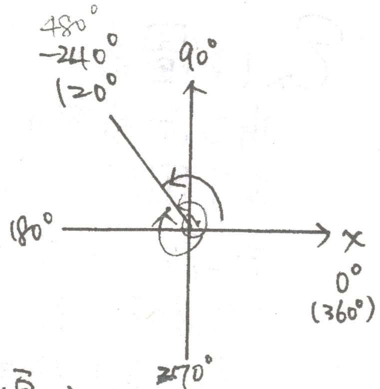
三角函數

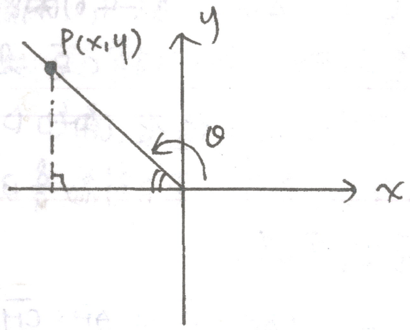
1、廣義角：以正 x 軸為始邊，旋轉到終邊的角度。

(1) 方向：逆時針旋轉為"+"，順時針旋轉為"−"。

(2) 同界角：終邊相同，稱為同界角。如：120°、480°、−240°。



2、廣義角三角函數：看與 x 軸的夾角（對 x 軸作垂線）



對任意角 θ，取終邊上一點 P(x,y)

$\sin\theta = \frac{y}{r}$ $\left(\frac{對}{斜}\right)$ 正弦，其中 $r = \sqrt{x^2+y^2} > 0$

$\cos\theta = \frac{x}{r}$ $\left(\frac{鄰}{斜}\right)$ 餘弦

$\tan\theta = \frac{y}{x}$ $\left(\frac{對}{鄰}\right)$ 正切

3、特殊角的三角函數值

(1)

	30°	45°	60°	0°	90°	180°	270°	I	II	III	IV
sin θ	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	1	0	−1	+	+	−	−
cos θ	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	−1	0	+	−	−	+
tan θ	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	0	×	0	×	+	−	+	−

※角度的單位

π 弧度 = 180°

1 弧度 ≒ 57°

例：$\frac{\pi}{3}$(弧度) = 60°

$\frac{3}{4}\pi$ (弧度) = 135°

(2) 廣義角三角函數化銳角三角函數

① 值：與 x 軸夾角相同，值（不論正負）就相同。

② 正負：看象限

例：$\cos 120° = -\cos 60° = \frac{-1}{2}$，$\tan 135° = -\tan 45° = -1$，$\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\sin 30° = \frac{-1}{2}$

(3) 值域及遞增(減)

① $-1 \le \sin\theta \le 1$

$-1 \le \cos\theta \le 1$

$\tan\theta \in \mathbb{R}$

② 在第一象限

sin θ ↗

cos θ ↘

tan θ ↗

4、基本關係：

(1) 商數關係：$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

（三角函數均可化為 sinθ、cosθ）

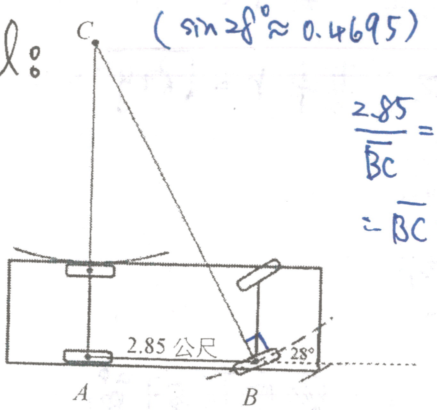
(2) 平方關係：$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

(3) 餘角關係：$\cos(90°-\theta) = \sin\theta$

（化同角）

Ex1：圖為汽車迴轉示意圖，汽車迴轉將方向盤轉動到極限，以低速讓汽車進行圓周運動。汽車轉向所形成的圓周半徑就是迴轉半徑，如圖中 $\overline{BC}$。已知在低速前進時，圖中A處的輪胎行進方向與 $\overline{AC}$ 垂直。B處的輪胎行進方向與 $\overline{BC}$ 垂直。已知軸距 $\overline{AB}=2.85$ 公尺，方向盤轉到極限時，輪子偏了28度，求此車的迴轉半徑 $\overline{BC}$。

Sol： ($\sin 28^\circ \approx 0.4695$)



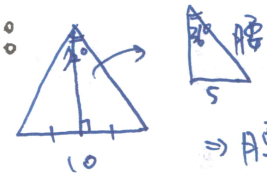
$\dfrac{2.85}{\overline{BC}} = \sin 28^\circ$

$\therefore \overline{BC} = \dfrac{2.85}{0.4695} \fallingdotseq 6.1$

Ex2：有一等腰三角形底邊為10，頂角72°，下列何者可以表示腰長。

(1) $5\sin 36^\circ$ (2) $5\tan 36^\circ$ (3) $\dfrac{5}{\tan 36^\circ}$ (4)✓ $\dfrac{5}{\sin 36^\circ}$

Sol：

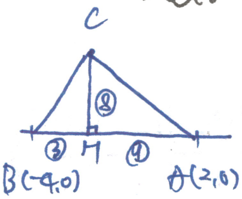


$\dfrac{5}{腰} = \sin 36^\circ$

$\Rightarrow 腰 = \dfrac{5}{\sin 36^\circ}$ (4)#

Ex3：x軸上有A(2,0)，B(-4,0)兩觀測站，同時觀察x軸上方的目標C点，測得∠BAC和∠ABC之值後，通知 $D(\frac{5}{2},-8)$ 的砲台此二角正切值分別為 $\frac{8}{9}$ 及 $\frac{8}{3}$。求 $\overline{CD}$ 的距離。

Sol：



$\tan\angle BAC = \frac{8}{9} \Rightarrow \overline{AH} : \overline{CH} = 9:8$

$\tan\angle ABC = \frac{8}{3} \Rightarrow \overline{BH} : \overline{CH} = 3:8$

$\therefore \overline{AH} : \overline{BH} = 9:3 \Rightarrow H(-4+\frac{3}{2}, 0)$

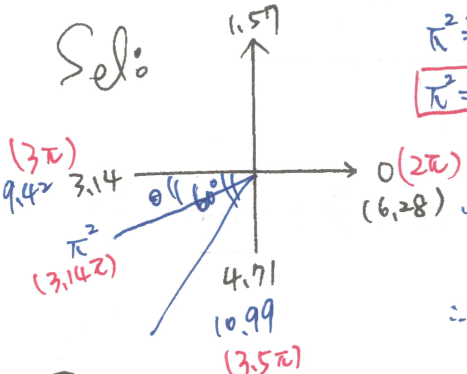
$\Rightarrow C(\frac{-5}{2}, 8\times\frac{1}{2})$

$\overline{CD} = \sqrt{5^2+12^2} = 13$

Ex4：令 $a=\cos(\pi^2)$，選出正確選項。

(1) $a=-1$ (2)✓ $-1<a\le-\frac{1}{2}$ (3) $-\frac{1}{2}<a\le 0$ (4) $0<a\le\frac{1}{2}$ (5) $\frac{1}{2}<a\le 1$

Sol：



$\pi^2 \fallingdotseq 9.8$

$\boxed{\pi^2 = 3.14\pi}$

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\because |\cos\pi^2| > \cos 60^\circ$ $(\theta<60^\circ)$

$\therefore \cos\pi^2 < \frac{-1}{2}$ (2)#

Ex5：若 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$，試問哪些選項恆成立。

(1) $\sin\theta<\cos\theta$ (2) $\tan\theta<\sin\theta$ (3) $\cos\theta<\tan\theta$ (4) $\sin 2\theta<\cos 2\theta$

Sol：(1) $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$

$\theta\in I$，$\sin\theta\uparrow$，$\cos\theta\downarrow$

$\therefore \cos\theta > \sin\theta$

(2) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} > \sin\theta$ (×)

(3) $\cos 0^\circ = 1$，$\tan 0^\circ = 0$ (×)

(4) $0<2\theta<90^\circ$

$0^\circ<2\theta<45^\circ \Rightarrow \sin\theta<\cos\theta$

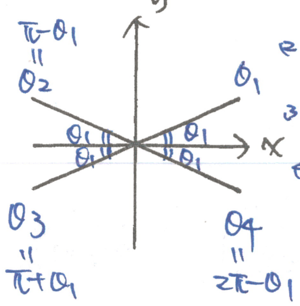
$45^\circ<2\theta<90^\circ \Rightarrow \sin\theta>\cos\theta$

Ex6：設 $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4$ 分別為第一、第二、第三、第四象限角，且皆介於0與2π之間。已知 $|\cos\theta_1|=|\cos\theta_2|=|\cos\theta_3|=|\cos\theta_4|=\frac{1}{3}$，試問下列哪些選項是正確的？

(1) $\theta_1<\frac{\pi}{4}$ (2)✓ $\theta_1+\theta_2=\pi$ (3)✓ $\cos\theta_3=\frac{-1}{3}$

(4) $\sin\theta_4=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (5) $\theta_4=\theta_3+\frac{\pi}{2}$

Sol：



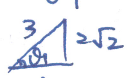
(1) $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{3} = \cos\theta_1$

$\therefore 45^\circ < \theta_1$

(2) $\theta_2 = \pi-\theta_1 \Rightarrow \theta_1+\theta_2 = \pi$

(3) $\cos\theta_3 = -\cos\theta_1 = -\frac{1}{3}$

(4) $\sin\theta_4 = -\sin\theta_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$



(5) $\theta_3+\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi+\theta_1 \ne \theta_4$

5、和(差)角公式

(1) $\sin(\alpha+\beta)=$ $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$　　$\sin(\alpha-\beta)=$ $\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

(2) $\cos(\alpha+\beta)=$ $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$　　$\cos(\alpha-\beta)=$ $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

(3) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$　　$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

6、倍(半)角公式

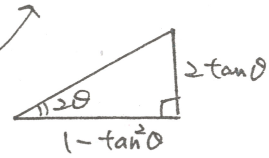
(1) 二倍角公式：

$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

$\tan2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

(以切表弦)



(2) 半角公式：
("±"看是何象限)

$\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$　　$\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}$

(3) 三倍角公式：

$\sin3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

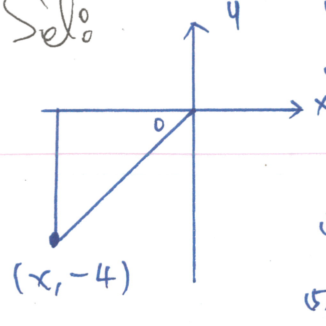
$\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

Ex7：廣義角θ的頂點為原點O，始邊為x軸的正向，且 $\tan\theta=\frac{2}{3}$。若θ的終邊上有一點P，其y坐標−4，則下列哪些選項正確？

(1) P的x坐標為6　(2) $\overline{OP}=2\sqrt{13}$

(3) $\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{13}}$　(4) $\sin2\theta>0$　(5) $\cos\frac{\theta}{2}<0$

Sol：



(1) $\tan\theta=\frac{2}{3}=\frac{-4}{x}\Rightarrow x=-6$

(2) $\overline{OP}=\sqrt{(-6)^2+(-4)^2}=2\sqrt{13}$

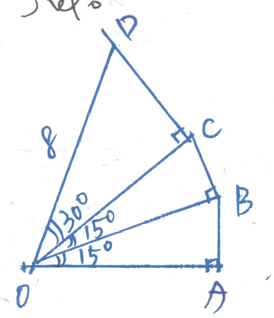
(3) $\cos\theta=\frac{-6}{2\sqrt{13}}=\frac{-3}{\sqrt{13}}$

(4) $\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta>0$

(5) $\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$

Ex8：右圖是由三個直角三角形堆疊而成，且 $\overline{OD}=8$，求 $\overline{AB}$ 長。

Sol：



$\overline{OC}=8\cdot\cos30^\circ$

$\overline{OB}=\overline{OC}\cdot\cos15^\circ$

$\overline{AB}=\overline{OB}\cdot\sin15^\circ$

$\Rightarrow\overline{AB}=8\cdot\cos30^\circ\cdot\cos15^\circ\cdot\sin15^\circ$

$=4\cos30^\circ\sin30^\circ$

$=2\sin60^\circ=\sqrt{3}$

Ex9：試問共有幾個角度 θ 滿足

$0^\circ<\theta<180^\circ$，且 $\cos(3\theta-60^\circ)$，$\cos3\theta$，$\cos(3\theta+60^\circ)$

依序成一個等差數列。

(1) 1個 (2) 2個 (3) 3個 (4) 4個 (5) 5個

Sol：

$(\cos3\theta)\times\frac{1}{2}+(\sin3\theta)\times\frac{\sqrt3}{2}$，$\cos3\theta$，$\frac{1}{2}\cos3\theta-\frac{\sqrt3}{2}\sin3\theta$

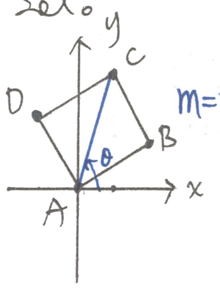
$\Rightarrow\ 2\cos3\theta=\cos3\theta\Rightarrow\cos3\theta=0$

$0^\circ<3\theta<540^\circ\Rightarrow3\theta=90^\circ,270^\circ,450^\circ$

(3) #

Ex10：如圖，有一正方形ABCD，其中對角線 $\overline{AC}$ 的斜率為3，試求 $\overline{AD}$ 的斜率。

Sol：



$\tan\theta=3$

$m=\tan(\theta+45^\circ)=\dfrac{\tan\theta+\tan45^\circ}{1-\tan\theta\cdot\tan45^\circ}$

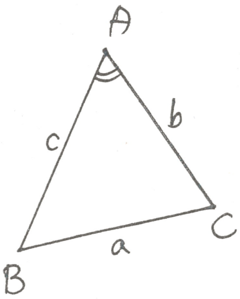
$=\dfrac{3+1}{1-3\times1}=\dfrac{4}{-2}=-2$

7、正弦定理：使用時機 ① 角多(一邊及其對角) ② 與R有關

設 $\triangle ABC$ 三邊長 a,b,c 及其對角 $\angle A,\angle B,\angle C$。$\triangle ABC$ 之外接圓半徑R，

則 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ $\Rightarrow a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

8、餘弦定理：使用時機 ① 邊多 ② 求角度



設 $\triangle ABC$ 三邊長 a,b,c 及其對角 $\angle A,\angle B,\angle C$。

則 $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$ $\Rightarrow\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

◎ 三角形判斷：設 $a\geq b\geq c$

若 $a^2=b^2+c^2\Rightarrow$ 直角

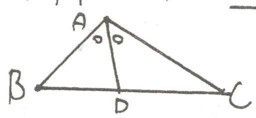
$a^2<b^2+c^2\Rightarrow$ 銳角

$a^2>b^2+c^2\Rightarrow$ 鈍角

◎ 常用性質

[一] 圓內接四邊形 $\Rightarrow$ 對角互補

[二] 角平分線 $\Rightarrow$ $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$



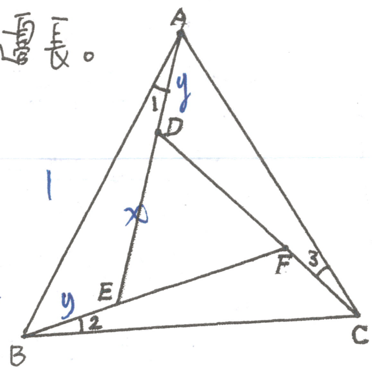
Ex11：如圖，正三角形ABC的邊長為1，且 $\angle1=\angle2=\angle3=15^\circ$，已知 $\sin15^\circ=\dfrac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$，求正三角形DEF的邊長。

Sol：$\dfrac{1}{\sin120^\circ}=\dfrac{y}{\sin15^\circ}=\dfrac{x+y}{\sin45^\circ}$

$\therefore y=1\times\dfrac{\sqrt6-\sqrt2}{4}\times\dfrac{2}{\sqrt3}=\dfrac{3\sqrt2-\sqrt6}{6}$

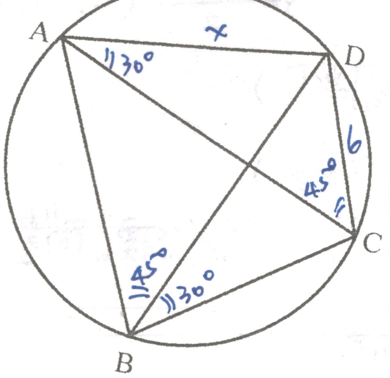
$x+y=1\times\dfrac{\sqrt2}{2}\times\dfrac{2}{\sqrt3}=\dfrac{\sqrt6}{3}$

$\Rightarrow x=\dfrac{3\sqrt6-3\sqrt2}{6}=\dfrac{\sqrt6-\sqrt2}{2}$ #



Ex12：如圖，ABCD為圓內接四邊形，若$\angle DBC=30^\circ$，$\angle ABD=45^\circ$，$\overline{CD}=6$，求$\overline{AD}$。

Sol:



[法一] 看$\triangle ACD$

$$\frac{6}{\sin 30^\circ}=\frac{x}{\sin 45^\circ}$$

$$\Rightarrow x=6\times 2\times\frac{\sqrt2}{2}=6\sqrt2$$

[法二] R相同

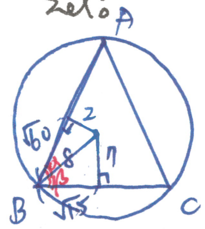
$\triangle BCD$ $\triangle ABD$

$$\frac{6}{\sin 30^\circ}=2R=\frac{x}{\sin 45^\circ}$$

$$\Rightarrow x=6\sqrt2$$

Ex13：設銳角三角形ABC的外接圓半徑為8。已知外接圓圓心到$\overline{AB}$的距離為2，而到$\overline{BC}$的距離為7，求$\overline{AC}$。

Sol:



$R=8 \Rightarrow$ 正弦：$\frac{\overline{AC}}{\sin B}=2R$

$B = \alpha+\beta$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

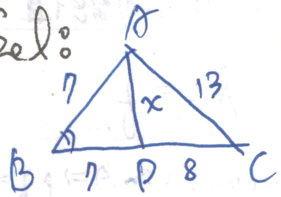
$$=\frac{2}{8}\times\frac{\sqrt{15}}{8}+\frac{2\sqrt{15}}{8}\times\frac{7}{8}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\therefore \overline{AC}=2\times 8\times\frac{\sqrt{15}}{4}=4\sqrt{15}\ \#$$

Ex14：[題型]  $\Rightarrow$ $\cos B$

三角形ABC中，若D在$\overline{BC}$邊上，且$\overline{AB}=7$，$\overline{AC}=13$，$\overline{BD}=7$，$\overline{CD}=8$，求$\overline{AD}$。

Sol:



$$\cos\beta=\frac{7^2+7^2-x^2}{2\cdot7\cdot7}=\frac{7^2+15^2-13^2}{2\cdot7\cdot15}$$

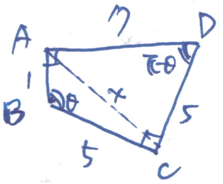
($\triangle ABD$) ($\triangle ABC$)

$$\Rightarrow 15(98-x^2)=7(105)$$

$$\Rightarrow x^2=49 \Rightarrow x=7\ \#$$

Ex15：四邊形ABCD中，$\overline{AB}=1$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CD}=5$，$\overline{DA}=7$，且$\angle DAB=\angle BCD=90^\circ$，求$\overline{AC}$。

Sol:



$$\cos\theta=\frac{1^2+5^2-x^2}{2\cdot1\cdot5}\quad(\triangle ABC)$$

$$\cos(\pi-\theta)=\frac{7^2+5^2-x^2}{2\cdot7\cdot5}\quad(\triangle ACD)$$

$$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{7^2+5^2-x^2}{2\cdot7\cdot5}=-\frac{1^2+5^2-x^2}{2\cdot1\cdot5}$$

$$\Rightarrow 74-x^2=-7(26-x^2)$$

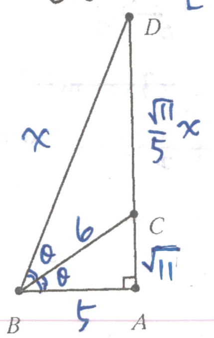
$$\Rightarrow 8x^2=256$$

$$\Rightarrow x^2=32$$

$$\Rightarrow x=4\sqrt2\ \#$$

Ex16：直角$\triangle ABD$中，$\angle A$為直角，C為$\overline{AD}$上的點，已知$\overline{BC}=6$，$\overline{AB}=5$，$\angle ABD=2\angle ABC$，求$\overline{BD}$。

Sol:



[法一] 角平分線性質

$$\Rightarrow \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}=\frac{x}{5}\Rightarrow \overline{CD}=\frac{\sqrt{11}}{5}x$$

$$\therefore x^2=5^2+\left(\sqrt{11}+\frac{\sqrt{11}}{5}x\right)^2$$

$$x^2=25+11+\frac{22}{5}x+\frac{11}{25}x^2$$

$$14x^2-110x-36\times25=0$$

$$\Rightarrow (7x-90)(2x+10)=0\Rightarrow x=\frac{90}{7}$$

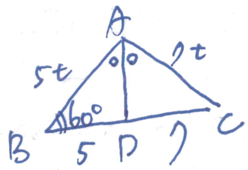
[法二]

$$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1$$

$$\frac{5}{x}=2\left(\frac{5}{6}\right)^2-1\Rightarrow\frac{5}{x}=\frac{7}{18}\Rightarrow x=\frac{90}{7}\ \#$$

Ex17：$\triangle ABC$中，D為$\overline{BC}$邊上一點且$\overline{AD}$平分$\angle BAC$。已知$\overline{BD}=5$，$\overline{DC}=7$，且$\angle ABC=60^\circ$，求：

(1) $\sin\angle ACB$ (2) $\sin\angle BAC$ (3) $\overline{AB}$



$$\cos60^\circ=\frac{(5t)^2+12^2-(7t)^2}{2\cdot5t\cdot12}$$

$$\Rightarrow 60t=25t^2+144-49t^2$$

$$\Rightarrow 24t^2+60t-144=0$$

$$\Rightarrow 2t^2+5t-12=0$$

$$\Rightarrow (2t-3)(t+4)=0$$

$$\Rightarrow t=\frac{3}{2}\quad\therefore \overline{AB}=\frac{15}{2}\ \#$$

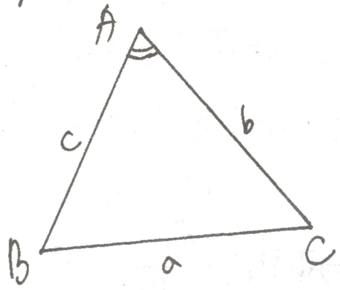
(1)
$$\frac{\overline{AC}}{\sin60^\circ}=\frac{\overline{AB}}{\sin\angle ACB}$$

$$\Rightarrow \sin\angle ACB=\frac{5}{7}\times\frac{\sqrt3}{2}=\frac{5\sqrt3}{14}$$

(2)
$$\sin\angle BAC=\sin(120^\circ-\angle ACB)$$

$$=\frac{\sqrt3}{2}\times\frac{11}{14}-\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{5\sqrt3}{14}=\frac{4\sqrt3}{7}$$

9. 三角形面積公式：



$\triangle ABC$面積 $= \frac{1}{2}\times$底$\times$高

$= \frac{1}{2}bc\sin A$ （二邊一夾角）

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $s=\frac{a+b+c}{2}$ （三邊長）

$= \frac{abc}{4R}$ （R為外接圓半徑）

$= r\cdot s$ （r為內切圓半徑）

$= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$ （給定坐標 or 向量）

$= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AC}\end{vmatrix}\right|$ （平面向量）

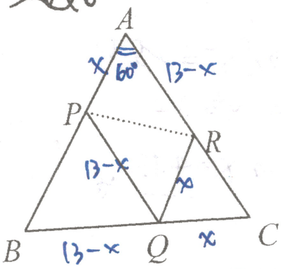
$= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$ （空間向量）

◎ 平行四邊形面積

$\square = 2\times\triangle$

Ex18： 邊長為13的正三角形ABC上各邊取一點P.Q.R，使得APQR形成平行四邊形，如圖。若四邊形APQR的面積為$20\sqrt{3}$，求$\overline{PR}$。

Sol：



$x\cdot(13-x)\cdot\sin 60^\circ = 20\sqrt{3}$

$\Rightarrow x(13-x)=40$

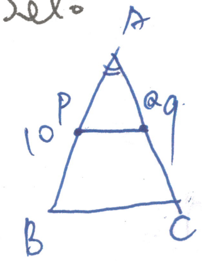
$\Rightarrow x=5$ or 8

$\overline{PR}=\sqrt{5^2+8^2-2\cdot5\cdot8\cdot\cos 60^\circ}$

$=\sqrt{49}=7$

Ex19： $\triangle ABC$中，$\overline{AB}=10$，$\overline{AC}=9$，$\cos\angle BAC=\frac{3}{8}$。設點P.Q分別在$\overline{AB}$、$\overline{AC}$上使得$\triangle APQ$面積為$\triangle ABC$面積一半，求$\overline{PQ}$的最小可能值。

Sol：



設 $\overline{AP}=p$，$\overline{AQ}=q$

$\frac{1}{2}\cdot p\cdot q\cdot\sin A = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\cdot 10\times 9\times\sin A \Rightarrow pq=$

$\overline{PQ}=\sqrt{p^2+q^2-2pq\cdot\cos A}$

$=\sqrt{p^2+q^2-2\times45\times\frac{3}{8}} \geq \sqrt{90-\frac{135}{4}}$

$\left(\frac{p^2+q^2}{2}\geq\sqrt{p^2q^2}\Rightarrow p^2+q^2\geq 2\times45=90\right)$ $=\sqrt{\frac{225}{4}}=\frac{15}{2}$

Ex20： $\triangle ABC$中，$\angle A=20^\circ$，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=4$。請選出正確的選項。[SSA]

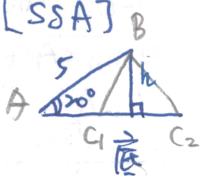
(1) 可以確定$\angle B$的餘弦值

(2) ✓ 可以確定$\angle C$的正弦值

(3) 可以確定$\triangle ABC$面積

(4) 可以確定$\triangle ABC$的內切圓半徑

(5) ✓ 可以確定$\triangle ABC$的外接圓半徑



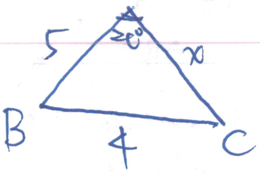
$h=5\cdot\sin 20^\circ$

若 $\overline{BC}>h\Rightarrow 2$解

$\overline{BC}=h\Rightarrow 1$解

$\overline{BC}<h\Rightarrow 0$解

Sol：



(1) $\cos 20^\circ=\frac{25+x^2-16}{2\cdot5\cdot x}$

$\Rightarrow x^2-10(\cos20^\circ)x+9=0$

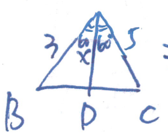
$D=10^2\cos^2 20^\circ-36>0\Rightarrow 2$個解

(2) $\frac{5}{\sin C}=\frac{4}{\sin 20^\circ}=2R=\frac{x}{\sin B}$

$\angle C$可能2解 $\to \sin C$

Ex21： $\triangle ABC$中，$\overline{AD}$平分$\angle A$交$\overline{BC}$於D，$\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=5$，$\angle A=120^\circ$，求$\overline{AD}$。

Sol：[法一] $\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ADC$



$\frac{1}{2}\times3\times5\ \sin120^\circ=\frac{1}{2}\times3\cdot x\cdot\sin60^\circ+\frac{1}{2}\cdot5\cdot x\cdot\sin60^\circ$

$\Rightarrow 8x=15\Rightarrow x=\frac{15}{8}$

[法二] STEP 1. 餘弦定理 $\Rightarrow \overline{BC}$長

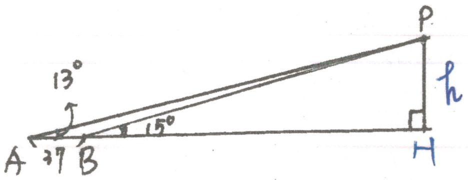
STEP 2. 利用角平分性質 $\Rightarrow \begin{cases}\overline{BD}=3t\\ \overline{CD}=5t\end{cases}$

STEP 3. $\triangle_B \Rightarrow \cos B$，求$\overline{AD}$。

10、三角測量：仰角、俯角均為與水平線的夾角。

Ex22：如圖，老王在平地點A測得山頂點P的仰角為13°。老王朝著山的方向前進37公尺後來到點B，再測得點P的仰角為15°，求山高約幾公尺？（四捨五入至個位數，$\tan 13^\circ \approx 0.231$，$\tan 15^\circ \approx 0.268$）

Sol：



設 $\overline{PH} = h \Rightarrow \frac{h}{\overline{BH}} = \tan 15^\circ \Rightarrow \overline{BH} = \frac{h}{0.268}$

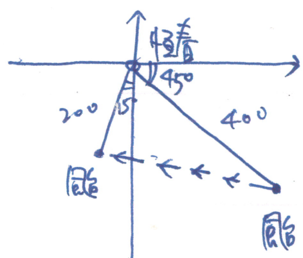
$\tan 13^\circ = \frac{h}{37 + \frac{h}{0.268}} = 0.231$

$\Rightarrow 37 \times 0.231 + \frac{0.231}{0.268} h = h$

$\Rightarrow \frac{37}{268} h = 37 \times 0.231 \Rightarrow h = 268 \times 0.231 \doteqdot 62$

Ex23：氣象局測出在20小時期間，颱風中心位置由恆春東南方400公里，直線移動到恆春南15°西的200公里，求颱風移動的平均速度為____km/hr。（整數以下四捨五入，$\sqrt{3} \approx 1.732$）

Sol：



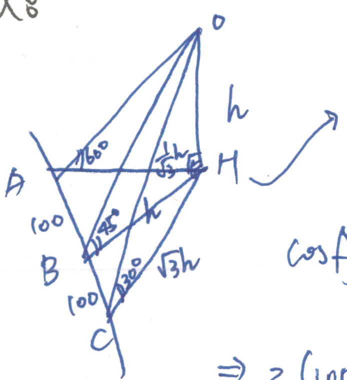
位移 $= \sqrt{200^2 + 400^2 - 2 \times 200 \times 400 \times \cos 60^\circ}$

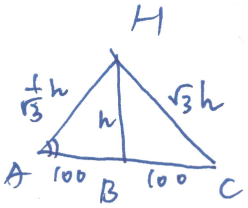
$= 100\sqrt{4+16-8} = 100\sqrt{12} = 200\sqrt{3}$

速度 $= \frac{200\sqrt{3}}{20} = 10\sqrt{3} \doteqdot 17.32$ #

Ex24：地面上一直線三點A, B, C測得山頂仰角分別為60°, 45°, 30°，且 $\overline{AB}=100$公尺，$\overline{BC}=100$公尺，求山高。（A, B, C三點與山腳不共線）

Sol：





$\cos A = \frac{\frac{1}{3}h^2 + 100^2 - h^2}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}h \cdot 100} = \frac{\frac{1}{3}h^2 + 200^2 - 3h^2}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}h \cdot 200}$

$\Rightarrow 2\left(100^2 - \frac{2}{3}h^2\right) = 4 \cdot 100^2 - \frac{8}{3}h^2$

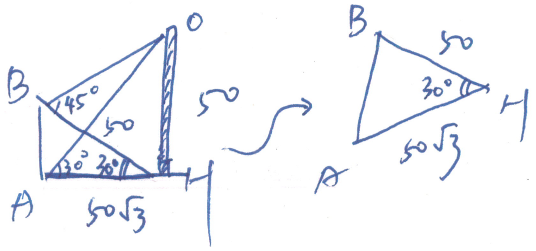
$\Rightarrow \frac{4}{3}h^2 = 2 \cdot 100^2$

$\Rightarrow h^2 = \frac{3}{2} \cdot 100^2$

$\Rightarrow h = 50\sqrt{3}$ #

Ex25：已知數學系館高50公尺，在該大樓的正西方和北60°西的方向各有一測量站A和B，若測出數學系館的仰角為30°和45°，求$\overline{AB}$。

Sol：



$\overline{AB} = \sqrt{50^2 + (50\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 50 \cdot 50\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$

$= 50\sqrt{1 + 3 - 2 \cdot \frac{3}{2}}$

$= 50$ #