直線與圓

1、直線方程式 ⇒ ① 點 ② 斜率

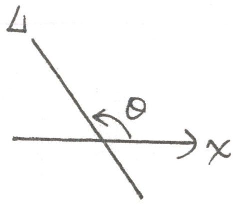
(1) 斜直線：斜率 m 且過點 (x_0, y_0) 之方程式為 $y-y_0=m(x-x_0)$

(2) 水平線：斜率為 0 且過點 (x_0, y_0) 之方程式為 $y=y_0$

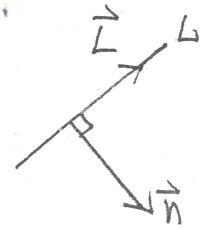
(3) 鉛直線：斜率不存在 且過點 (x_0, y_0) 之方程式為 $x=x_0$

◎ 直線假設法：$y=mx+k$（不包含鉛直線）

2、直線與其他之連結



(1) 三角函數：直線 L 與正 x 軸夾角為 θ ⇒ $m=\tan\theta$



(2) 向量：直線 $L: ax+by+c=0$ 之方向向量 $\vec{l}=(b,-a)$

（斜率 $m=\frac{-a}{b}$） 法向量 $\vec{n}=(a,b)$

(3) 參數式：直線 L 之方向向量 $\vec{l}=(a,b)$ 且過點 $A(x_0,y_0)$，

則 ① 直線 L 之參數式為 $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}$ or (x_0+at, y_0+bt)（求點）

② 直線 L 之比例式為 $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}$ or $bx-ay=bx_0-ay_0$（方程式）

3、平行與垂直：

已知直線 L_1, L_2 之斜率分別為 m_1, m_2，方向向量分別為 $\vec{l_1}$、$\vec{l_2}$，

(1) $L_1 /\!/ L_2$ ⇒ 斜 $m_1=m_2$ or 向 $\vec{l_1}=t\vec{l_2}$ (2) $L_1 \perp L_2$ ⇒ 斜 $m_1 \times m_2=-1$ or 向 $\vec{l_1}\cdot\vec{l_2}=0$

◎ 假設法：設直線 $L: ax+by+c=0$

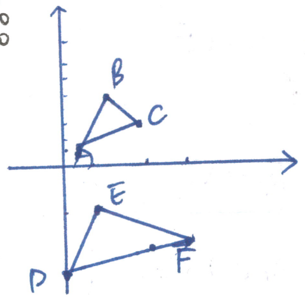
$L_1 /\!/ L$ ⇒ 設 L_1：$ax+by=k$；$L_2 \perp L$ ⇒ 設 L_2：$bx-ay=k$

4. 二直線關係：設 $L_1: a_1x+b_1y+c_1=0$，$L_2: a_2x+b_2y+c_2=0$

	判別式	解的個數 ($\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}$)	
(1) 平行 (//)	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$	無解	$\Delta=0$
有交點 (2) 重合 (/)	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$	無限多解	$\Delta=0$
有交點 (3) 相交 (X)	$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$	一解 $\left(\frac{\Delta x}{\Delta},\frac{\Delta y}{\Delta}\right)$	$\Delta\neq0$

Ex1：設 A(1,1), B(3,5), C(5,3) 為坐標上的點，D(0,-7), E(2,-3) 及 F(8,-6)，若直線 L 分別與 △ABC 及 △DEF 各有 1 個交點，則 L 的斜率之最小可能值為何？

Sol：

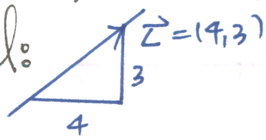


m 最小 ⇒ 負最多
一個交點 ⇒ 頂點

$m_{FC}=\frac{-9}{3}=-3$

Ex2：已知直線 L 之方向向量 $\vec{L}=(4,3)$，求直線 L 的斜率。

Sol：



$\Rightarrow m=\frac{3}{4}$

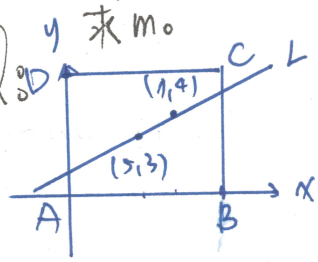
Ex3：求過 A(1,2), B(3,4) 之直線。

Sol：[法一] $m=\frac{2}{2}=1 \Rightarrow y=x+1$

[法二] $\vec{AB}=(2,2)//(1,1) \Rightarrow x-y=-1$

Ex4：設 A(0,0), B(10,0), C(10,6), D(0,6) 為坐標平面上的四點。若直線 $y=m(x-7)+4$，將四邊形 ABCD 分成面積相等的兩塊，求 m。

Sol：

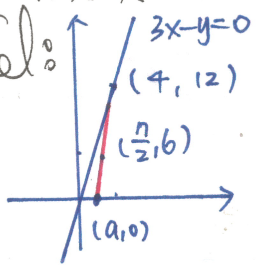


$y=m(x-7)+4$
⇒ 斜率 m，過點 (7,4)
∴ 面積平分 ⇒ 必過中心 (5,3)

$m=\frac{1}{2}$

Ex5：在坐標平面上，設 A 為直線 $3x-y=0$ 上一點，B 為 x 軸上一點。若 $\overline{AB}$ 的中點坐標為 $(\frac{7}{2},6)$，求 A 點與 B 點坐標。

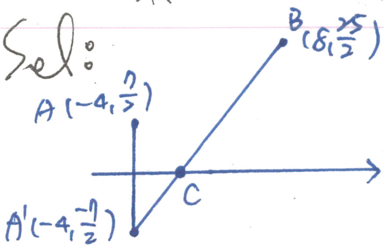
Sol：



設 A(a,0) ∵ $(\frac{7}{2},6)$
∴ B(b,12)
∴ $b=4 \Rightarrow \frac{a+4}{2}=\frac{7}{2}$
A(3,0)
B(4,12)

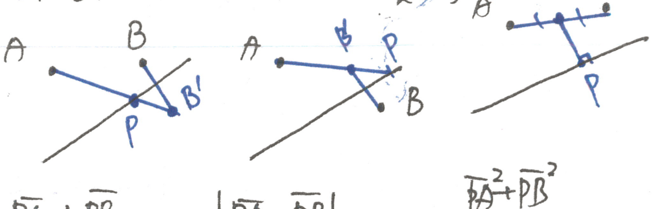
Ex6：給定兩點 $A(-4,\frac{7}{2})$, $B(8,\frac{25}{2})$，試在 x 軸上找一點 C，使得 △ABC 周長最小，求 △ABC 之周長最小值。

Sol：



△ABC 周長
$=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$
$=\overline{CB}+\overline{CA}+15$ 最小
$=\overline{A'B}+15$
$=20+15=35$

Key：P 為直線 L 上一點
① A,B 在 L 同側 ② A,B 在 L 異側 ③



$\overline{PA}+\overline{PB}$ 有最小值 $\quad |\overline{PA}-\overline{PB}|$ 有最大值 $\quad \overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 有最小值

P2.

Ex7：設 a, b 均為整數，已知

直線 L: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 恆過定點 P(3,−2)，

則下列敘述哪些正確？

✓(1) 此直線 L 共有 7 條

(2) L 一定不過第二象限

✓(3) L 一定不過坐標原點

✓(4) L 與兩坐標軸所圍之三角形面積最大為 16

(5) L 與兩坐標軸所圍之三角形面積最小為 1

Sol：$\frac{3}{a}-\frac{2}{b}=1 \Rightarrow 3b-2a=ab$

$\Rightarrow ab-3b+2a=0$

$\Rightarrow (a-3)(b+2)=-6=(-1)\times 6$ or $1\times(-6)$

$(-2)\times 3$ or $2\times(-3)$

$(-3)\times 2$ or $3\times(-2)$

$(-6)\times 1$ or $6\times(-1)$

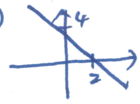
$\therefore (a,b)=(2,4)$ or $(4,-8)$

$(1,1)$ or $(5,-5)$

不合 ← $(0,0)$ or $(6,-4)$

$(-3,1)$ or $(9,-3)$

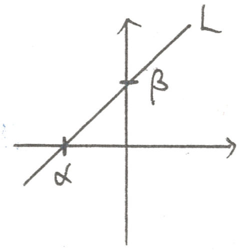
(2)



(4) $\frac{1}{2}\times 4\times 8=16$

(5) $\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$

補充 截距式 ⇒ 常用於 L 與二軸所圍三角形



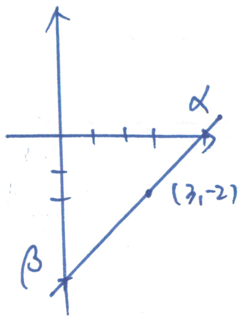
直線 L 之 x 截距 α，y 截距 β.

L: $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$

Ex8：直線 L 恆過定點 (3,−2)，則 L 與兩坐標軸所圍之三角形面積最小值為何？在第四象限

Sol：

[法一] $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$，求 $\frac{1}{2}\alpha(-\beta)$



$\frac{3}{\alpha}+\frac{-2}{\beta}=1$

$\therefore \frac{\frac{3}{\alpha}+\frac{-2}{\beta}}{2}\geq\sqrt{\left(\frac{3}{\alpha}\right)\left(\frac{-2}{\beta}\right)}$

$\therefore \frac{1}{4}\geq\frac{6}{-\alpha\beta} \Rightarrow -\alpha\beta\geq 24$

$\Rightarrow \frac{-\alpha\beta}{2}\geq 12$ #

[法二] 設 $y=mx-3m-2$

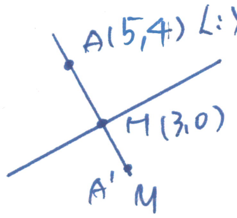
$\left(\frac{3m+2}{m},0\right)$ $\frac{1}{2}\times\frac{3m+2}{m}\times 3m+2$ 之 min：

$(0,-3m-2)$ $=\frac{1}{2}\left(9m+12+\frac{4}{m}\right)\geq\frac{1}{2}\times(2\times 6+12)=12$ #

$\left(\frac{9m+\frac{4}{m}}{2}\geq\sqrt{9m\cdot\frac{4}{m}}=6\right)$

Ex9：給定 A(5,4)，直線 L: x+2y=3，求 A 對 L 之對稱點 A′ 坐標。

㊣ 求對稱點 ⇒ 先求投影點



垂直 L 過 A 點

$\Rightarrow 2x-y \xlongequal{(5,4)} 6$

$\therefore$ H $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x-y=6 \end{cases}$ $\therefore x=3$, $y=0$

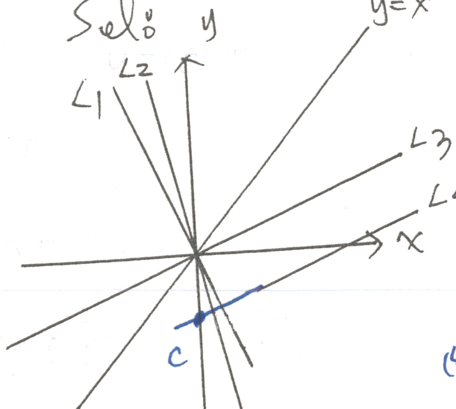
$\therefore$ A′(1,−4) #

Ex10：坐標平面上四條直線 L_1, L_2, L_3, L_4 與 x 軸，y 軸，y=x 的相關位置如圖所示，其中 $L_1\perp L_3$ 且 $L_3 // L_4$，設 L_1, L_2, L_3, L_4 的方程式分別為 $y=m_1x$，$y=m_2x$，$y=m_3x$ 及 $y=m_4x+c$，試問下列哪些正確？

(1) $m_3>m_2>m_1$ ✓(2) $m_1\times m_4=-1$ ✓(3) $m_1<-1$

✓(4) $m_2\times m_3<-1$ (5) $c>0$

Sol：



(1) $m_3>0$

$|m_1|<|m_2|$

且 $m_1, m_2<0$

$\therefore m_3>m_1>m_2$

(2) $L_1\perp L_4 \Rightarrow m_1\times m_4=-1$

(3) $0<m_3<1$

$m_1=-\frac{1}{m_3}<-1$

(4) $|m_2\times m_3|>|m_1\times m_3|$

$\therefore m_2\times m_3<-1$

Ex1: 若實數a,b,c,d使得

$\begin{cases}ax+8y=c\\x-4y=3\end{cases}$ 有解 且 $\begin{cases}-3x+by=d\\x-4y=3\end{cases}$ 無解，

則下列哪些選項一定正確？

(1) $a\neq-2$ (2) $c=-6$ (3) $b=12$ (4) $d\neq-9$

(5) $\begin{cases}ax+8y=c\\-3x+by=d\end{cases}$ 無解

Sol: ∵ $\begin{cases}-3x+by=d\\x-4y=3\end{cases}$ 無解 ⇒ 平行

∴ $b=12$, $d\neq-9$

∵ $\begin{cases}ax+8y=c\\x-4y=3\end{cases}$ 有解 ⇒ 重合 or 相交.

case 1:(重合) $a=-2$, $c=-6$

case 2:(相交) $a\neq-2$, c 任意值.

(5) 若 case 1 ⇒ 無解

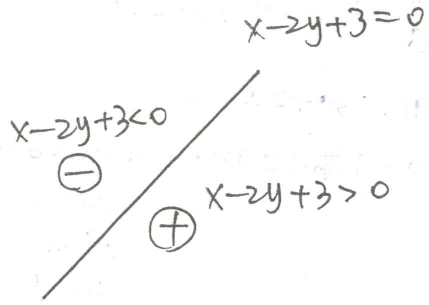
case 2 ⇒ 有解.

5、二元一次不等式: $ax+by+c \gtrless 0$

(1) $ax+by+c=0$ 表一直線

$ax+by+c\gtrless0$ 表半平面(右、左、上、下)

(">0"想成"+", "<0"想成"—")



(2) 半平面的判定:

① a是x的係數 ⇒ 判定左 or 右

② b是y的係數 ⇒ 判定上 or 下

$a>0$ 時, $\begin{cases}右\leftrightarrow +\\左\leftrightarrow -\end{cases}$

反之, $a<0$ 時, $\begin{cases}右\leftrightarrow -\\左\leftrightarrow +\end{cases}$

$b>0$ 時, $\begin{cases}上\leftrightarrow +\\下\leftrightarrow -\end{cases}$

反之, $b<0$ 時 $\begin{cases}上\leftrightarrow -\\下\leftrightarrow +\end{cases}$

6、點、線的關係:

設直線 L: $f(x,y)=ax+by+c=0$.

(1) 若A在直線L上 ⇒ $f(A)=0$

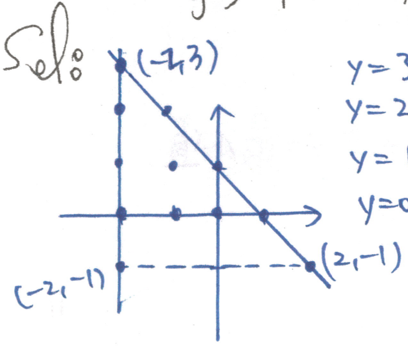
(2) 若A,B兩點在直線L同側 ⇒ $f(A)\times f(B)>0$

(3) 若A,B兩點在直線L異側 ⇒ $f(A)\times f(B)<0$

(4) 若L與線段$\overline{AB}$相交 ⇒ $f(A)\times f(B)\leq0$

Ex12： $\begin{cases} x+y\le 1 \\ x\ge -2 \\ y>-1 \end{cases}$ 的可行解區域，有幾個格子點。

Sol：

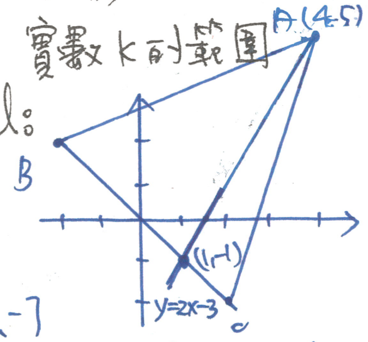


$y=3 \Rightarrow x=-2$
$y=2 \Rightarrow x=-2,-1$
$y=1 \Rightarrow x=-2,-1,0$
$y=0 \Rightarrow x=-2,-1,0,1$

共 10個.

Ex13：設 $A(4,5)$, $B(-2,2)$, $C(2,-2)$, $P(k,2k-3)$，若P為△ABC內部一點（含邊界），求實數k的範圍

Sol：



$\overleftrightarrow{AB}: y=\frac{1}{2}x+3$
$\overleftrightarrow{BC}: y=-x$
$\overleftrightarrow{AC}: y=\frac{7}{2}x-9$

[方法一]

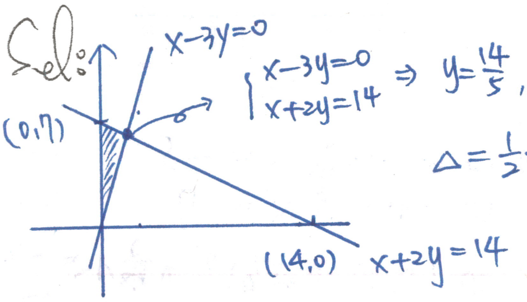
$\begin{cases} x-2y+6\ge 0 \\ x+y\ge 0 \\ 7x-2y-18\le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k-4k+6+6\ge 0 \Rightarrow k\le 4 \\ k+2k-3\ge 0 \Rightarrow k\ge 1 \\ 7k-4k+6-18\le 0 \Rightarrow k\le 4 \end{cases}$ $1\le k\le 4$ #

[方法二]

$\begin{cases} x=k \\ y=2k-3 \end{cases} \Rightarrow y=2x-3$ 由圖形易知 $1\le k\le 4$ #

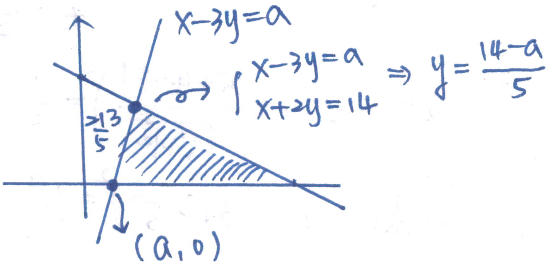
Ex14：設a為一實數，已知在第一象限，滿足 $\begin{cases} x-3y\le a \\ x+2y\le 14 \end{cases}$ 的所有點所形成之區域面積為 $\frac{213}{5}$ 平方單位，求a值。

Sol：



$\begin{cases} x-3y=0 \\ x+2y=14 \end{cases} \Rightarrow y=\frac{14}{5}, x=\frac{42}{5}$

$\triangle=\frac{1}{2}\times 7\times\frac{42}{5}=\frac{147}{5}$



$\begin{cases} x-3y=a \\ x+2y=14 \end{cases} \Rightarrow y=\frac{14-a}{5}$

$\triangle=\frac{1}{2}\times 7\times 14-\frac{213}{5}=\frac{32}{5}=\frac{1}{2}\times(14-a)\times\frac{(14-a)}{5}$

$\therefore (14-a)^2=64 \Rightarrow 14-a=\pm 8$

$\therefore a=6$ or 22（不合）

Ex15：坐標平面上兩點(4,1)和(5,9)在直線 $3x-y-k=0$ 的兩側，其中k為整數，請選出正確的選項：

(1) 滿足上式的k最少有5個
(2) 所有滿足上式的k的總和是 35 34
(3) ✓ 所有滿足上式的k中，最小的是7
(4) 所有滿足上式的k的平均是9
(5) ✓ 所有滿足上式的k中，奇數與偶數個數相同.

Sol： $f(A)\cdot f(B)<0$

$\Rightarrow (11-k)(6-k)<0 \Rightarrow 6<k<11$

$k=7,8,9,10$,

7、線性規劃

STEP 1：（將應用問題轉成）二元一次不等式組 ⇒ 畫出可行解區域

STEP 2：找到目標函數 $f(x,y)=k=ax+by+c$

STEP 3：[法一] 平行線法　　　，求出 k 的最大值和最小值.

　　[法二] 頂點法（限制：①封閉區域 ②一次函數

(1) 平行線法：　a(左右)　　　　b(上下)

$a>0$ 時，$\begin{cases} 右 \leftrightarrow 大 \\ 左 \leftrightarrow 小 \end{cases}$　　$b>0$ 時，$\begin{cases} 上 \leftrightarrow 大 \\ 下 \leftrightarrow 小 \end{cases}$

反之，$a<0$ 時，$\begin{cases} 右 \leftrightarrow 小 \\ 左 \leftrightarrow 大 \end{cases}$　　反之，$b<0$ 時，$\begin{cases} 上 \leftrightarrow 小 \\ 下 \leftrightarrow 大 \end{cases}$

(2) 頂點法：①若 $f(x,y)$ 有最大(小)值時，必發生在頂點上。

②若有超過一個頂點有最大(小)值，則整個邊均發生最大(小)值。

有不是頂點　有最大(小)值，

[作法] 將所有頂點 (x,y) 代入 $f(x,y)$，其中最大(小)的即為最大(小)值。

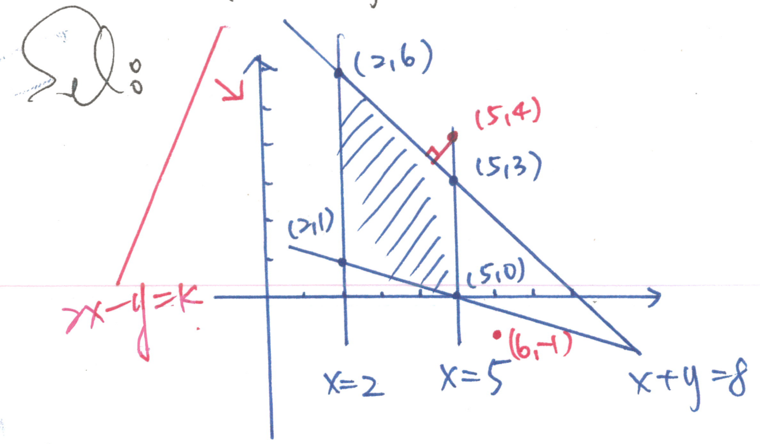
Ex16：設 (x,y) 滿足不等式 $\begin{cases} 2\le x\le 5 \\ x+y\le 8 \\ x+3y\ge 5 \end{cases}$，求：

(1) $2x-y-3$ 的最大值和最小值

(2) $\dfrac{y+1}{x-6}$ 的最大值和最小值

(3) $(x-5)^2+(y-4)^2$ 的最大值和最小值

Sol：



[法一] (1) (2,6) 代入最小 $=-5$

(5,0) 代入最大 $=7$

(2) +5 (5,3) 所成直線 m 最小 $=-4$

(2,1)　　　　大 $=\frac{-1}{2}$

(3) $(最近距離)^2=\left(\dfrac{|5+4-8|}{\sqrt{1^2+1^2}}\right)^2=\frac{1}{2}$

最遠距離 $=(\sqrt{3^2+3^2})^2=18$

[法二] 僅能判斷 (1)(2)

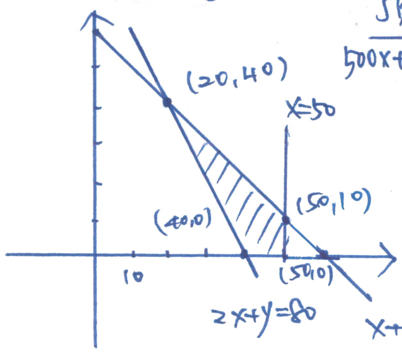
頂	(2,1)	(2,6)	(5,3)	(5,0)
$2x-y-3$	0	-5	4	7
$\frac{y+1}{x-6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{4}$	-4	-1

Ex17：某公司召聘新員工，共有1600人應徵參加筆試。筆試場地借用甲大學的教室，該校可租借的大教室有50間，每間可容納40人，每間租金500元；小教室有60間，每間可容納20人，每間租金150元。考慮監考人員的限制，筆試教室不能超過60間。試問租借大教室 x 間，小教室 y 間，最省租借場地費用，求 x, y 值。

Sol：①常見應用問題限制 $x\geq 0, y\geq 0$.

$$\begin{cases} x, y \geq 0,\ x\leq 50 \\ \text{教室: } x+y\leq 60 \\ \text{人數: } 40x+20y\geq 1600 \quad (2x+y\geq 80) \end{cases}$$

，求租金 $500x+150y$ 最小



頂點	(20,40)	(40,0)	(50,0)	(50,10)
$500x+150y$	16000	20000	25000	26500

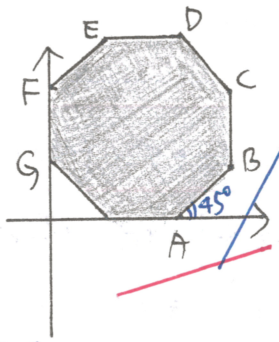
最小

$x=20,\ y=40$

Ex18：一線性規劃問題的可行解區域為正八邊形ABCDEFGH及其內部，如右圖。已知目標函數 $ax+by+3$ 的最大值只發生在B點。試問目標函數改為 $3-bx-ay$ 時，最大值會發生在那一點？

(1) A (2) B (3) C (4) D (5) E

Sol：



$m_{AB}=1=\tan 45°$

∴ $ax+by+3$ 的斜率大於1

右邊有最大值 ⇒ $a>0$

下方有最大值 ⇒ $b<0$

$\left(\frac{-a}{b}>1\right)$

所求 $-bx-ay$ 之斜率 $=\frac{-b}{a}$

∵ $0<\frac{-b}{a}<1=m_{AB}$

x 係數 $(-b)>0$ ⇒ 右方最大 ⇒ A

(1)#

Ex19：已知一線性規劃問題之可行解區域為四邊形ABCD及其內部，其中 $A(4,0), B(8,10), C(6,14), D(2,6)$。若目標函數 $k=ax+by+32$ 在四邊形ABCD的邊界上一點 $(4,10)$ 有最小值18，求 a, b。

Sol：最大、最小值必在頂點

∵在邊上 ⇒ 必為某兩頂點的邊，且整個邊代入皆為最大(小)值

$(4,10)$ 在 CD 邊上

$4a+10b+32=18$

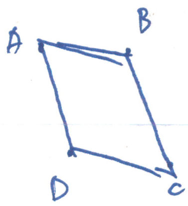
$2a+6b+32=18$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+5b=-7 \\ 2a+6b=-14 \end{cases}$$

∴ $b=-7,\ a=14$ #

Ex20：一線性規劃問題之可行解區域為 $A(0,30), B(18,27), C(20,0), D(2,3)$，所圍成之平行四邊形及其內部。若目標函數 $ax+by$ 在D點有最小值48，則此目標函數在同個可行解區域的最大值為何？

Sol：



由平行線法則知

D有 $\min = 48 = 2a+3b$

$\Rightarrow$ B有 $\max = 18a+27b$

$= 48\times 9 = 432$ #

8、圓 ⇒ ①圓心 ②半徑

(1) 標準式：給定圓心(h,k)，半徑r的圓方程式為 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$。

展開 ↙ ↗ 配方

(2) 一般式：過三點之圓方程式 可假設為 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$。

Ex21：求圓心 $x+2y-3=0$ 上，且通過 $A(5,1)$, $B(3,-1)$ 之圓方程式。

Sol：設圓心$O(3-2t,\ t)$

$\overline{AO}=\overline{BO}$

$\Rightarrow (-2-2t)^2+(t-1)^2=(-2t)^2+(t+1)^2$

$\Rightarrow 4+8t+\cancel{4t^2}+\cancel{t^2}-2t+1=\cancel{4t^2}+\cancel{t^2}+2t+1$

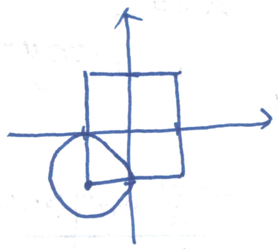
$\therefore 4t=-4 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow O(5,-1)$

$\therefore r=2$

$(x-5)^2+(y+1)^2=4$

Ex22：以$(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$等四個點為頂點的正方形與圓 $x^2+y^2+2x+2y+1=0$ 有幾個交點。

Sol：$(x+1)^2+(y+1)^2=1$



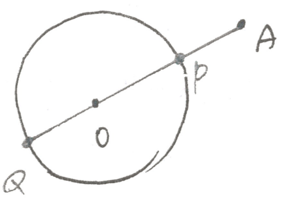
2個 #

9、點和圓的關係

設$A(x_0,y_0)$，圓C：$f(x,y)=x^2+y^2+dx+ey+f=0$

(1) 點在圓上 ⇔ $f(A)=0$；點在圓外 ⇔ $f(A)>0$；點在圓內 ⇔ $f(A)<0$

(2) 最近點(P) 與 最遠點(Q) ⇒ 在 $\overleftrightarrow{AO}$ 上



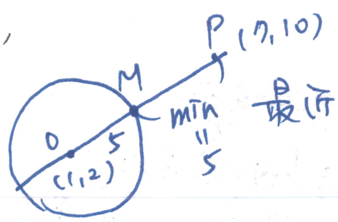
求 P、Q 點坐標 ⇒ 分點公式

Ex22：設 $P(7,10)$，圓C：$x^2+y^2-2x-4y-20=0$，

求(1) P到圓C的最近距離

(2) 此時，圓上最近點坐標

Sol：$(x-1)^2+(y-2)^2=25$

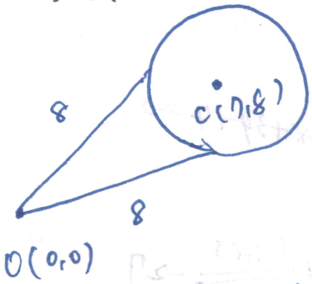


最近距離 $=\sqrt{6^2+8^2}-5$
$=5$

$M=\dfrac{O+P}{2}=(4,6)$

Ex23：坐標平面上，圓 $C:(x-7)^2+(y-8)^2=9$ 上有幾個點與原點的距離是整數？

Sol：



$\overline{OC}=\sqrt{7^2+8^2}=\sqrt{113}$
$=10.\cdots$

最近距 $=7.\cdots$
最遠距 $=13.\cdots$

整數 8, 9, 10, 11, 12, 13

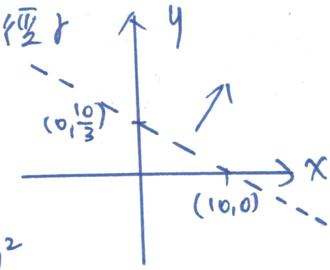
$\therefore\ 6\times 2=\underline{12}$ 個

Ex24：設P為圓，點(0,0)在P的外部，且點(2,6)在P的內部，選出正確選項。

(1) P的圓心不可能在第二象限
(2) P的圓心可能在第三象限且此時半徑大於10
(3) P的圓心可能在第一象限且此時半徑小於10
(4) P的圓心可能在x軸上且圓心x坐標小於10
(5) ✓ P的圓心可能在第四象限且此時半徑大於10

Sol：設圓心 (x,y)，半徑 r

$$\begin{cases} x^2+y^2>r^2 \\ (x-2)^2+(y-6)^2<r^2 \end{cases}$$



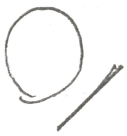
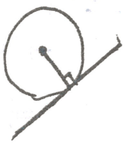
$\Rightarrow x^2+y^2>(x-2)^2+(y-6)^2$

$\Rightarrow 4x+12y>40$

$\Rightarrow x+3y>10$

10、線與圓的關係：

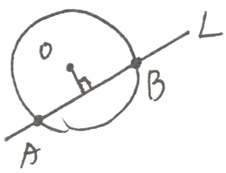
設圓：$x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 的圓心 $O(h,k)$，半徑 r；直線 $L: ax+by+c=0$

		[判別法一] $d(O,L)$	[判別法二] 交點個數（求交點）
		$d(O,L)=\underline{\dfrac{\lvert ah+bk+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}}$	$\begin{cases} x^2+y^2+dx+ey+f=0 \\ ax+by+c=0 \end{cases} \xrightarrow[\text{②代入①}]{} Ax^2+Bx+C=0$
(1) 相離		$d(O,L)>r$	$D=B^2-4AC<0$
有交點 (2) 相切		$d(O,L)=r$	$D=0$
有交點 (3) 相交		$d(O,L)<r$	$D<0$

◎ 切線長 $\overline{AH}=\underline{\sqrt{\overline{AO}^2-r^2}}$

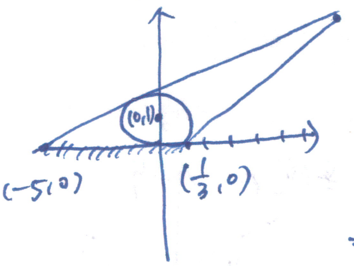
◎ 弦長 $\overline{AB}=\underline{2\sqrt{r^2-d^2}}$

$(d=d(O,L))$



Ex25：在坐標平面上 $(7,5)$ 處有一光源，將圓 $x^2+(y-1)^2=1$ 投射到 x 軸，求 x 軸上的影長。

Sol：



$(7,5)$ 設 $L: y-5=m(x-7)$

$(mx-y+5-7m=0)$

$d(0,L)=r$

$\Rightarrow \dfrac{|-1+5-7m|}{\sqrt{m^2+1}}=1$

$\Rightarrow |4-7m|=\sqrt{m^2+1}$

$\Rightarrow 16-56m+49m^2=m^2+1$

$\Rightarrow 48m^2-56m+15=0$

$\Rightarrow (12m-5)(4m-3)=0$

$\Rightarrow m=\frac{5}{12}$ or $\frac{3}{4}$

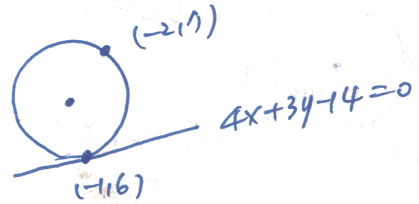
$y-5=\frac{5}{12}(x-7) \underset{y=0}{\Rightarrow} x=-5$

$y-5=\frac{3}{4}(x-7) \underset{y=0}{\Rightarrow} x=\frac{1}{3}$

影長 $=\frac{16}{3}$

Ex26：一圓通過點 $(-2,7)$ 且與直線 $4x+3y-14=0$ 相切於點 $(-1,6)$，若此圓的方程式為 $x^2+y^2+ax+by+c=0$，求 a,b,c 值。

Sol：



圓心在直線 $3x-4y \xlongequal{(-1,6)} -27$

設圓心 $(-1+4t, 6+3t)$

$r=\sqrt{(4t)^2+(3t)^2}=\sqrt{(4t+1)^2+(3t-1)^2}$

$\Rightarrow 0=8t+1-6t+1 \Rightarrow t=-1$

$\therefore$ 圓心 $(-5,3)$，$r=\sqrt{4^2+3^2}=5$

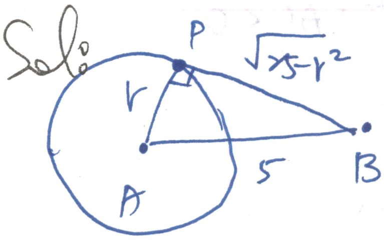
$(x+5)^2+(y-3)^2=5^2$

$x^2+y^2+10x-6y+9=0$

$a=10$
$b=-6$
$c=9$

Ex27：平面上兩點 A, B 之距離為 5，以 A 為圓心作一半徑為 r $(0<r<5)$ 的圓 Γ，過 B 作圓 Γ 的切線，切點(之一)為 P。當 r 變動時，$\triangle PAB$ 的面積最大可能為何？

Sol：



$\triangle PAB$ 面積 $=\frac{1}{2}r\sqrt{25-r^2}$

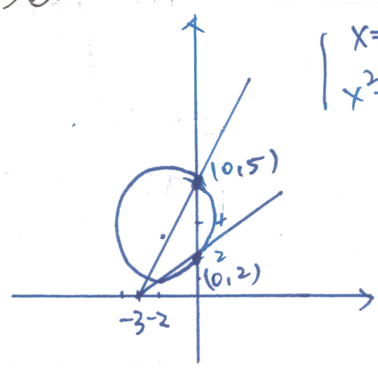
$=\frac{1}{2}\sqrt{-(r^2)^2+25r^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{-\left(r^2-\frac{25}{2}\right)^2+\left(\frac{25}{2}\right)^2}$

$\therefore r=\frac{5}{\sqrt{2}}$ 時有 Max $=\frac{25}{4}$

Ex28：設 m 是實數，若圓 $x^2+y^2+4x-7y+10=0$ 與直線 $y=m(x+3)$ 在坐標平面上的兩個交點位於不同的象限，而滿足此條件的 m 之最大範圍 $a<m<b$，求 a,b 值。

Sol：$(x+2)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=-10+4+\frac{49}{4}=\frac{25}{4}$



$\begin{cases} x=0 \\ x^2+y^2+4x-7y+10=0 \end{cases}$

$\Rightarrow y^2-7y+10=0$

$\Rightarrow y=2$ or 5

$a=\frac{2}{3}$，$b=\frac{5}{3}$