向量

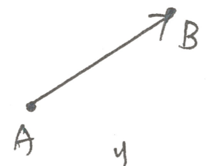
B3 ch3、B4 ch1

1、向量的意義及運算

幾何

$\overrightarrow{AB}$表示 ① 方向：從A到B的方向

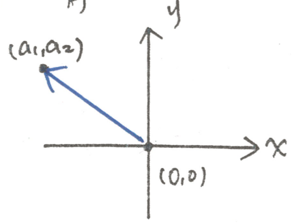
② 大小：A到B的距離，以 $|\overrightarrow{AB}|$ 表示。

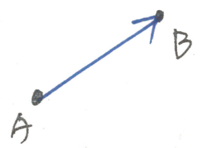
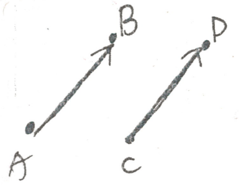
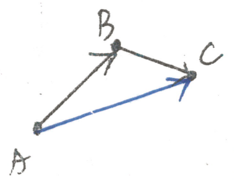
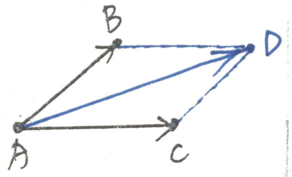
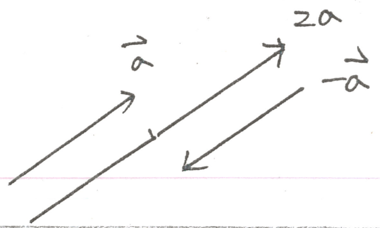
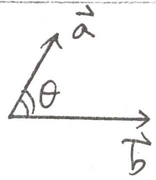


坐標

$\vec{a}=(a_1,a_2)$表示 ① 方向：$(0,0)$ 到 (a_1,a_2) 的方向。

② 大小：$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$



	幾何表示法	平面向量 坐標表示法	空間向量 坐標表示法
定義		設$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ $\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$	設$A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ $\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$
相等	$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Rightarrow$ ① 方向相同 ② 大小相等 	設$\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$ 若$\vec{a}=\vec{b}\Rightarrow a_1=b_1$ 且 $a_2=b_2$	設$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 若$\vec{a}=\vec{b}\Rightarrow a_1=b_1$ 且 $a_2=b_2$ 且 $a_3=b_3$
加法 (減法)	[法一]三角形 $\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}}=\overrightarrow{AC}$ [法二]平行四邊形 $\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}=\overrightarrow{AD}$  	$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$ $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$	$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$ $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3)$
係數積 (平行)		$r\vec{a}=(ra_1,ra_2)$	$r\vec{a}=(ra_1,ra_2,ra_3)$
		◎ $r>0$表 同向	$r<0$表 反向
內積		$\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cdot\cos\theta$ ＝投影長×被投影長 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

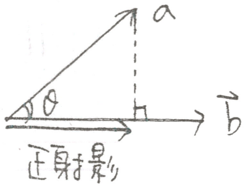
2. 向量的應用　$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$

(1) 平行與垂直：若 $\vec{a}\parallel\vec{b} \Rightarrow \vec{a}=t\vec{b} \Rightarrow \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$

若 $\vec{a}\perp\vec{b} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Rightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$

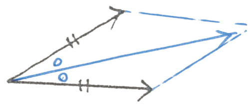
(2) 正射影(長)：$\vec{a}$在$\vec{b}$上之正射影長為 $\left|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\right|$

$\vec{a}$在$\vec{b}$上之正射影為 $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\times\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$



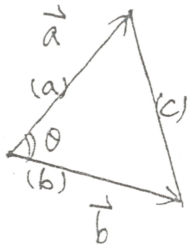
(3) 角平分方向向量：$\vec{a}$、$\vec{b}$之角平分方向向量為 $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

⟶ (等長 向量相加)



(4) 求夾角θ ⇒ $\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

(向量內積) ⇒坐標表示　　(餘弦定理) ⇒已知三邊長



Ex1：已知 $\overrightarrow{AB}=(4,3)$, $\overrightarrow{BC}=(8,-15)$，
求△ABC之周長。

Sol：$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(12,-12)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{4^2+3^2}=5$

$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{8^2+(-15)^2}=17$

$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{12^2+(-12)^2}=12\sqrt{2}$

△ABC周長 $=22+12\sqrt{2}$

Ex2：設 $\vec{a}=(2,1)$, $\vec{b}=(1,-2)$, $\vec{c}=(0,1)$，
若 (1) $t\vec{a}+\vec{b}\parallel\vec{c}$，求 t 值。
(2) $t\vec{a}+\vec{b}\perp\vec{c}$，求 t 值。

Sol：$t\vec{a}+\vec{b}=(2t+1,\ t-2)$

(1) $\frac{2t+1}{0}=\frac{t-2}{1} \Rightarrow 2t+1=0 \Rightarrow t=\frac{-1}{2}$

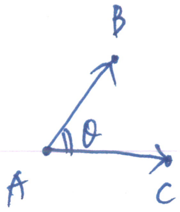
(2) $(2t+1,t-2)\cdot(0,1)=0 \Rightarrow t-2=0 \Rightarrow t=2$

Ex3：空間中有三點 A(1,2,3), B(3,0,4),
C(2,0,1)，試求：

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

(2) $\cos\angle BAC$

(3) $\overrightarrow{AB}$在$\overrightarrow{AC}$上的正射影



Sol：$\overrightarrow{AB}=(2,-2,1)$, $\overrightarrow{AC}=(1,-2,-2)$

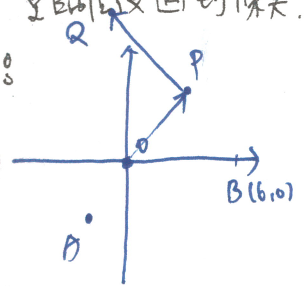
(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2+4-2=4$

(2) $\cos\angle BAC=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{4}{3\times3}=\frac{4}{9}$

(3) $\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|^2}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{4}{9}\cdot(1,-2,-2)=\left(\frac{4}{9},\frac{-8}{9},\frac{-8}{9}\right)$

Ex4：坐標平面上有四點 $O(0,0)$, $A(-3,-5)$, $B(6,0)$, $C(x,y)$。今有一質點在O點沿著 $\overrightarrow{AO}$ 方向前進 $\overline{AO}$ 距離後停在P點，再沿 $\overrightarrow{BP}$ 方向前進 $2\overline{BP}$ 距離後停在Q點。假設此質點繼續沿 $\overrightarrow{CQ}$ 方向前進 $3\overline{CQ}$ 距離後回到原點，求 (x,y)。

Sol：



$P(3,5)$

$\Rightarrow \overrightarrow{BP}=(-3,5)$

$\therefore Q(-3,15)$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{CQ}+Q=0$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{CQ}=(3,-15)$

$\Rightarrow \overrightarrow{CQ}=(1,-5) \Rightarrow C(-4,20)$

Ex5：設 $\vec{a}=(-2,2)$, $\vec{b}=(5,k)$，若 $|\vec{a}+\vec{b}|\le 5$，求 k 的範圍。

(1) $-4\le k\le 6$ (2) $-6\le k\le 4$ (3) $-6\le k\le 2$ (4) $-2\le k\le 6$ (5) $-3\le k\le 6$

Sol：$\vec{a}+\vec{b}=(3,2+k)$

$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{9+(2+k)^2}\le 5$

$\therefore (2+k)^2\le 25-9=16$

$\therefore -4\le 2+k\le 4$

$\therefore -6\le k\le 2$　(3)#

Ex6：設 $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=10$ 且 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 夾角為 60°，求 $|2\vec{a}+\vec{b}|$。

Sol：看到 $|\vec{a}| \Rightarrow \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$　$(\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2)$

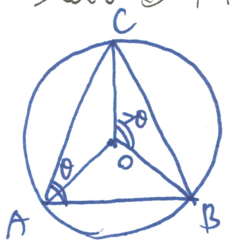
$|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}$

$=\sqrt{4\times16+4\times4\times10\times\cos60^\circ+100}$

$=\sqrt{244}=2\sqrt{61}$

Ex7：$\triangle ABC$ 內接於圓心為O之單位圓。若 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\sqrt{3}\,\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，求 $\angle BAC$ 的度數。

Sol：求角度 $\Rightarrow \cos\theta$



$\angle BOC=2\angle BAC$

$\overrightarrow{OB}+\sqrt{3}\,\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}$

$\Rightarrow |\overrightarrow{OB}|^2+2\sqrt{3}\,\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+3|\overrightarrow{OC}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2$

$\Rightarrow 1+2\sqrt{3}\cdot\cos\angle BOC+3=1$

$\Rightarrow \cos\angle BOC=\frac{-3}{2\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \angle BOC=150^\circ \Rightarrow \angle BAC=75^\circ$

Ex8：空間中有一四面體ABCD。假設 $\overrightarrow{AD}$ 分別與 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 垂直，請選出正確選項。

(1) $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overline{DA}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

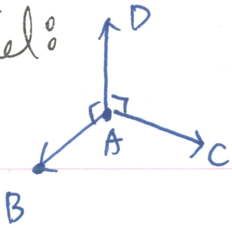
(2) 若 $\angle BAC$ 是直角，則 $\angle BDC$ 是直角

✓(3) 若 $\angle BAC$ 是銳角，則 $\angle BDC$ 是銳角

(4) 若 $\angle BAC$ 是鈍角，則 $\angle BDC$ 是鈍角

✓(5) 若 $\overline{AB}<\overline{DA}$ 且 $\overline{AC}<\overline{DA}$，則 $\angle BDC$ 是銳角

Sol：



(1) $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC})$

$=|\overrightarrow{DA}|^2+0+0+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

(2) 承(1)，$\angle BAC=90^\circ \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \Rightarrow \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=|\overrightarrow{DA}|^2 \Rightarrow \angle BDC<90^\circ$

(3) $<90^\circ \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0 \Rightarrow \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=|\overrightarrow{DA}|^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0 \Rightarrow \angle BDC<90^\circ$

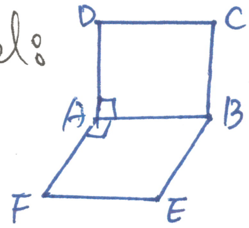
(4) $>90^\circ \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<0 \Rightarrow \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}$ 無法判別正負

(5) 若 $\begin{matrix}\overline{AB}<\overline{DA}\\ \overline{AC}<\overline{DA}\end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<|\overrightarrow{DA}|^2 \Rightarrow \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}>0 \Rightarrow \angle BDC<90^\circ$

(3)(5)#

Ex9：空間中，以 $\overline{AB}$ 為共同邊的兩正方形ABCD、ABEF，其邊長皆為4。已知內積 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF}=11$，求 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}$ 之值。

Sol：



$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}$

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF})$

$=|\overrightarrow{AB}|^2+0+0+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF}$

$=16+11=27$

Ex10：如圖所示，正立方体ABCD-EFGH的稜長等於2（即 $\overline{AB}=2$），K為正方形ABCD的中心，M, N分別為線段 BF, EF的中點，試問下列哪些選項是正確的？

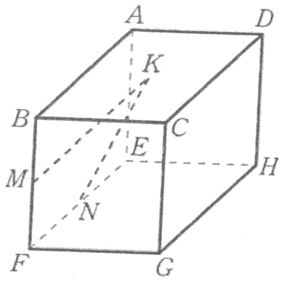
✓ (1) $\overrightarrow{KM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

(2) $\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{AB}=1$

(3) $\overline{KM}=3$

✓ (4) △KMN為直角三角形

(5) △KMN之面積為 $\frac{\sqrt{10}}{2}$



Sol：立方体、長方体 ⇒ 坐標化

設 $A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $D(0,2,0)$, $E(0,0,-2)$

⇒ $K(1,1,0)$, $M=(2,0,-1)$, $N(1,0,-2)$

(1) $\overrightarrow{KM}=(1,-1,-1)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

(2) $(1,-1,-1)\cdot(2,0,0)=2$

(3) $\overline{KM}=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$

$\begin{array}{l} -1\ -1\ \ -1\ -1 \\ -1\ -2\ \ 0\ -1\ -2 \\ \hline 1, 2, -1 \end{array}$

(4) $\overrightarrow{KM}=(1,-1,-1)$
$\overrightarrow{KN}=(0,-1,-2)$ ⇒ $\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{MN}=0$
$\overrightarrow{MN}=(-1,0,-1)$

(5) [法一] $\frac{1}{2}|\overrightarrow{KM}|\times|\overrightarrow{MN}|=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

[法二] $\frac{1}{2}|\overrightarrow{KM}\times\overrightarrow{KN}|=\frac{1}{2}\sqrt{6}$

Ex11：如圖，以M為圓心，$\overline{MA}=8$為半徑畫圓，$\overline{AE}$為該圓的直徑，B, C, D三點皆在圓上，且 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}$。若 $\overrightarrow{MD}=8(\cos(\theta+90^\circ),\sin(\theta+90^\circ))$，請選出正確的選項。

(1) $\overrightarrow{MA}=8(\cos\theta,\sin\theta)$

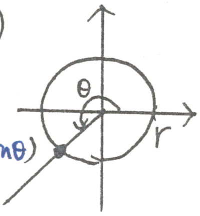
✓ (2) $\overrightarrow{MC}=8(\cos(\theta+45^\circ),\sin(\theta+45^\circ))$

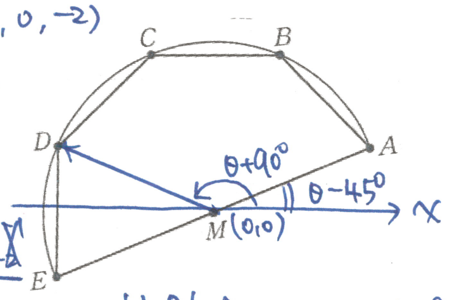
(3) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA}=8$

✓ (4) $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=0$

(5) $\overrightarrow{BD}=(\cos\theta+\cos(\theta+90^\circ),\sin\theta+\sin(\theta+90^\circ))$

Sol：圓參數式（極坐標）





(4) $\overrightarrow{MB}\perp\overrightarrow{MD}$
⇒ $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=0$

(1) $A(8\cos(\theta-45^\circ), 8\sin(\theta-45^\circ))$

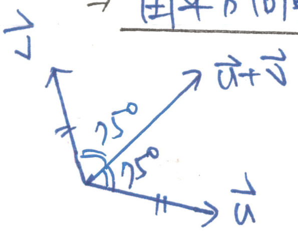
(5) $B(8\cos\theta, 8\sin\theta)$
$D(8\cos(\theta+90^\circ), 8\sin(\theta+90^\circ))$

(2) $C(8\cos(\theta+45^\circ), 8\sin(\theta+45^\circ))$

(3) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA}=|\overrightarrow{MA}|^2=64$

Ex12：設 $\vec{u},\vec{v}$ 為兩個長度皆為1的向量。若 $\vec{u}+\vec{v}$ 與 $\vec{u}$ 的夾角為75°，求 $\vec{u}$ 與 $\vec{v}$ 的內積值。

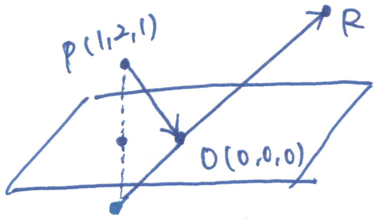
Sol：$\vec{u}+\vec{v}$ ⇒ 等長向量相加
⇒ 角平分向量



$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cdot\cos150^\circ$
$=1\times1\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ex13：在空間坐標中，設 xy 平面為鏡面，有一光線通過 P(1,2,1)，射向鏡面上的點 O(0,0,0)，經鏡面反射後通過R，若 $\overline{OR}=2\overline{OP}$，求 R的坐標。

Sol：反射 ⇒ 對稱



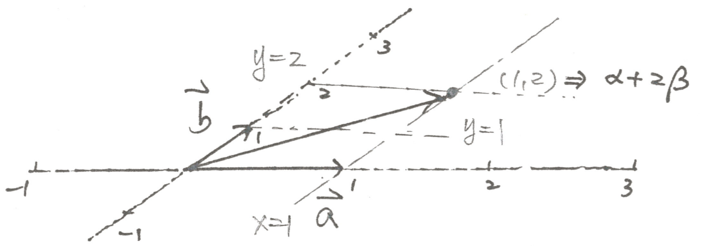
$\overrightarrow{P'O}=(-1,-2,1)$

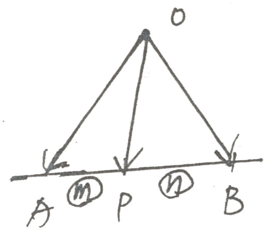
$\overrightarrow{OR}=2\overrightarrow{P'O}=(-2,-4,2)$

∴ $R(-2,-4,2)$

3、線性組合：

<u>平面上</u>，設兩個不平行的非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$，對任意 $\vec{c}$ "存在且唯一" 的實數 α, β，使得 $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$。





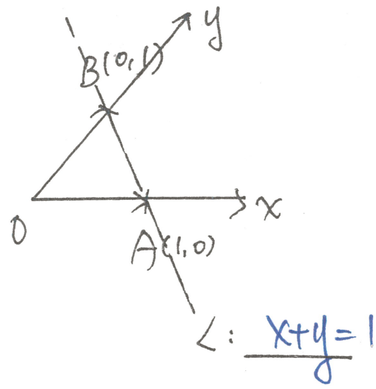
4、分點公式：

設 P 在線段 $\overline{AB}$ 上滿足 $\overline{AP} : \overline{BP} = m : n$，則 $\overrightarrow{OP} = \dfrac{m\cdot\overrightarrow{OB} + n\overrightarrow{OA}}{m+n}$

5、三點共線：A, B, P 共線

[想法一] $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ （係數積）

[想法二] 若 $\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \alpha + \beta = 1$

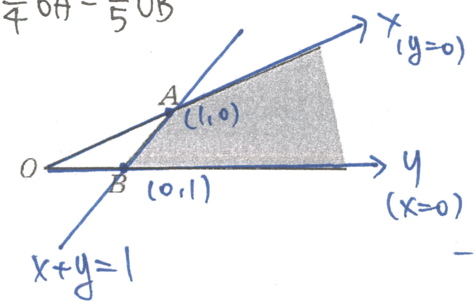


Ex14：如圖，兩射線 OA 與 OB 交於 O 點，試問下列選項中，哪些向量的終點會落在陰影區域內？

(1) $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$ ✓ (2) $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ ✓ (3) $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

(4) $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$ (5) $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$

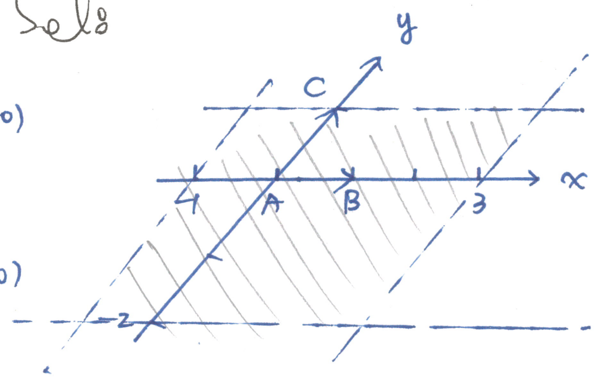
Sol：



$$\begin{cases} x+y \geq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Ex15：設 △ABC 面積為 7，$\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$，$-1 \leq \alpha \leq 3$，$-2 \leq \beta \leq 1$，求 P 點所形成之區域面積。

Sol：

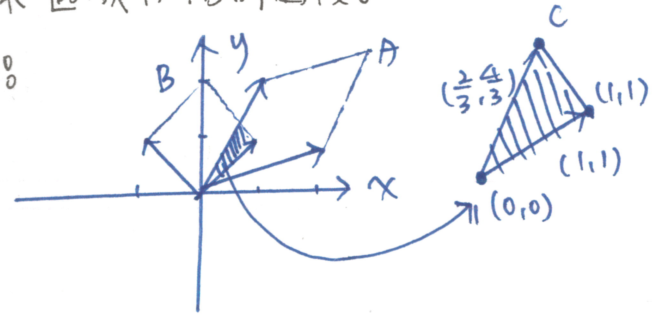


$\square = 4 \times 3 \times (2\triangle ABC)$

$= 24 \times 7 = 168$

Ex16：在坐標平面上，設原點O，向量 $\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(2,1)$，$\vec{c}=(1,1)$，$\vec{d}=(-1,1)$，P為平面上動點，
集合 $A=\{P \mid \overrightarrow{OP}=x\vec{a}+y\vec{b}$ 且 $0\le x\le 1$ 且 $0\le y\le 1\}$
集合 $B=\{P \mid \overrightarrow{OP}=x\vec{c}+y\vec{d}$ 且 $0\le x\le 1$ 且 $0\le y\le 1\}$
求區域 $A\cap B$ 的面積。

Sol：

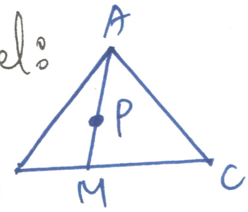


$C\begin{cases} y=2x \\ y-1=-1(x-1)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x \\ x+y=2\end{cases} \Rightarrow \left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$

$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3}\end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

Ex17：在坐標平面上，△ABC內有一點P滿足 $\overrightarrow{AP}=\left(\frac{4}{3},\frac{5}{6}\right)$ 及 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$。若A，P連線交 $\overline{BC}$ 於M，求 $\overrightarrow{AM}$。

Sol：



A、P、M 共線

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AP}$

$=t\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}\right)$

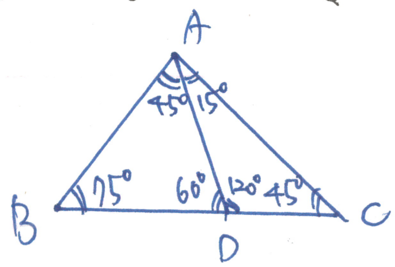
$\therefore \overrightarrow{AM}=\left(\frac{1}{2}t\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{1}{5}t\right)\overrightarrow{AC}$

$\because$ M、B、C 共線 $\therefore \frac{1}{2}t+\frac{1}{5}t=1 \Rightarrow t=\frac{10}{7}$

$\therefore \overrightarrow{AM}=\frac{10}{7}\overrightarrow{AP}=\left(\frac{40}{21},\frac{25}{21}\right)$

Ex18：設D為△ABC中 $\overline{BC}$ 邊上的一點，已知 $\angle ABC=75^\circ$，$\angle ACB=45^\circ$，$\angle ADB=60^\circ$，若 $\overrightarrow{AD}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$，求數對 (s,t)。

Sol：



目標 $\overline{BD}:\overline{CD}$

$\begin{cases} \dfrac{\overline{BD}}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\overline{AD}}{\sin 75^\circ} \\ \dfrac{\overline{CD}}{\sin 15^\circ}=\dfrac{\overline{AD}}{\sin 45^\circ}\end{cases} \Rightarrow \overline{BD}:\overline{CD}=\dfrac{\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ}:\dfrac{\sin 15^\circ}{\sin 45^\circ}$

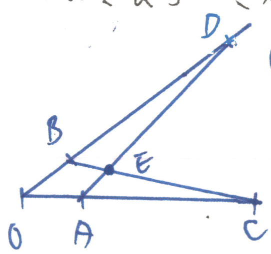
$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2:\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$=\frac{1}{2}:\frac{1}{4}=2:1$

$\therefore \overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Ex19：設O，A，B三點不共線，在 $\overline{OA}$ 的延長線上取一點C，使得 $\overline{OC}=4\overline{OA}$；在 $\overline{OB}$ 延長線上取一點D，使得 $\overline{OD}=5\overline{OB}$，若 $\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 交於E點，且 $\overrightarrow{OE}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，試求x，y值。

Sol：【法一】三點共線



原式 $\Rightarrow \overrightarrow{OE}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OE}=x\overrightarrow{OA}+\left(\frac{1}{5}y\right)\overrightarrow{OD}$

$\because$ E、A、D 共線 $\Rightarrow x+\frac{1}{5}y=1$

原式 $\overrightarrow{OE}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OE}=\left(\frac{1}{4}x\right)\overrightarrow{OC}+y\overrightarrow{OB}$

$\because$ E、B、C 共線 $\Rightarrow \frac{1}{4}x+y=1$

$\begin{cases} x+\frac{1}{5}y=1 \\ \frac{1}{4}x+y=1\end{cases} \Rightarrow x=\frac{16}{19},\ y=\frac{15}{19}$

【法二】斜坐標（線性組合）

A(1,0)，B(0,1)，C(4,0)，D(0,5)

$\overleftrightarrow{AD}: y=-5x+5$

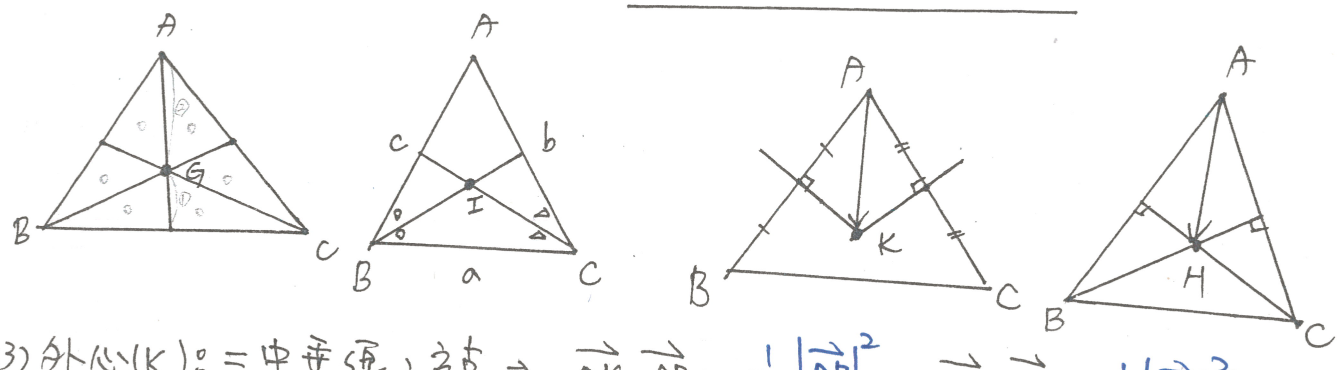
$\overleftrightarrow{BC}: y=\frac{-1}{4}x+1$ $\Rightarrow \frac{19}{4}x=4$

$\begin{cases} x=\frac{16}{19} \\ y=\frac{15}{19}\end{cases}$

6、三角形的四心

(1) 重心(G)：三中線之交點 ⇒ $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ (O為任意點)

(2) 內心(I)：三角平分線之交點 ⇒ $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{a+b+c}(a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC})$

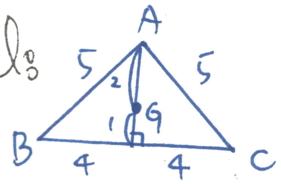


(3) 外心(K)：三中垂線之交點 ⇒ $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2$; $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2$

(4) 垂心(H)：三高(垂線)之交點 ⇒ $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}$

Ex20：設G為△ABC的重心，若 $\overline{AB}=\overline{AC}=5$ 且 $\overline{BC}=8$，求 $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}$ 之值。

Sol：



$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=-\overrightarrow{GC}$

$\Rightarrow |\overrightarrow{GA}|^2+2\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}+|\overrightarrow{GB}|^2=|\overrightarrow{GC}|^2$

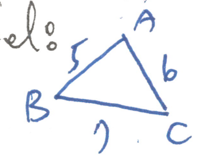
$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ ⇒ $4+2\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=0$

$\overrightarrow{GG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})$ ⇒ $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=-2$

$\Rightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$

Ex21：設△ABC中，$\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=6$, $\overline{BC}=7$，I是△ABC的內心且 $\overrightarrow{AI}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，求數對$(\alpha,\beta)$之值。

Sol：



$\overrightarrow{OI}=\frac{1}{18}(7\overrightarrow{OA}+6\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{OC})$

$\therefore \overrightarrow{AI}=\frac{6}{18}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{18}\overrightarrow{AC}$

Ex22：設K為△ABC的外心，$\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=6$, $\overline{AC}=2\sqrt{7}$,

(1) 若 $\overrightarrow{AK}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求$(x,y)$

(2) $\overleftrightarrow{AK}$ 交 $\overline{BC}$ 於D點且 $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，求$(\alpha,\beta)$

Sol：外心、垂心之線性組合

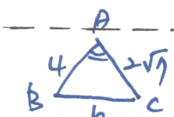
⇒ ①內積$\overrightarrow{AB}$，內積$\overrightarrow{AC}$ ②解聯立

[STEP 1] 內積$\overrightarrow{AB}$，內積$\overrightarrow{AC}$

$$\begin{cases}\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AB}=(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AC}=(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AC}\end{cases}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AB}=x|\overrightarrow{AB}|^2+y\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+y|\overrightarrow{AC}|^2$



$\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\times4^2=8$

$\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(2\sqrt{7})^2=14$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\times2\sqrt{7}\times\frac{4^2+(2\sqrt{7})^2-6^2}{2\cdot4\cdot(2\sqrt{7})}=\frac{16+28-36}{2}=4$

[STEP2] 解聯立

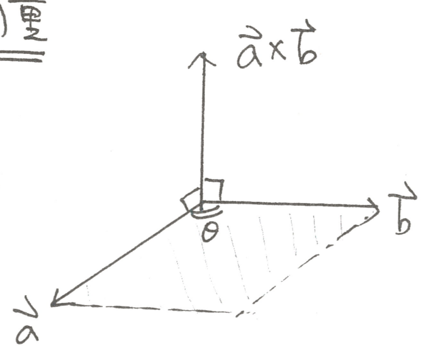
$$\begin{cases}8=16x+4y\\ 14=4x+28y\end{cases}$$

$2=4x+y$

$\therefore 12=27y$

$y=\frac{4}{9}$, $x=\frac{7}{18}$

7、外積：空間向量的運算，運算後仍是向量



幾何 $\vec{a}\times\vec{b}$ { ①方向：符合右手規則且 $(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{a}$，$(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{b}$
②大小：$|\vec{a}\times\vec{b}|=$ ▱面積 $=|\vec{a}||\vec{b}|\cdot\sin\theta$

坐標 設 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$

$$\Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3&a_1\\b_3&b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\right)$$

《記法》去頭去尾

$$\begin{matrix}\cancel{a_1}&a_2&a_3&a_1&a_2&\cancel{a_3}\\\cancel{b_1}&b_2&b_3&b_1&b_2&\cancel{b_3}\end{matrix}$$

(1) $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=0\\a_2x+b_2y+c_2z=0\end{cases}$ 的解為 $(x,y,z)\Rightarrow x:y:z=$ $\begin{vmatrix}b_1&c_1\\b_2&c_2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}c_1&a_1\\c_2&a_2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}$

(2) 行列式 $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=$ $ad-bc$

①某行(列)全為0，其值 0 $\begin{vmatrix}a&b\\0&0\end{vmatrix}=0$

②任二行(列)成比例，其值 0 $\begin{vmatrix}a&b\\ka&kb\end{vmatrix}=0$

③行列互換，其值 不變 $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&c\\b&d\end{vmatrix}$

④任二行(列)互換，其值 變號 $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}c&d\\a&b\end{vmatrix}$

⑤任一行(列)可提出k倍 $\begin{vmatrix}ka&b\\kc&d\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}$

⑥某一行(列)乘上k倍加至另一列 $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&b\\c+ka&d+kb\end{vmatrix}$

8、三角形面積公式：

給定兩向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 所圍成之三角形面積 $=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

(1) 若 $\vec{a}=(a_1,a_2)$，$\vec{b}=(b_1,b_2)$，則三角形面積 $=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\right|$

(2) 若 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，則三角形面積 $=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{1}{2}\sqrt{|\ \ |^2+|\ \ |^2+|\ \ |^2}$

<cf> △面積 $=\frac{1}{2}\times$底$\times$高 $=\frac{1}{2}ab\sin\theta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{abc}{4R}=rs$，其中 $s=\frac{a+b+c}{2}$

(二邊一夾角)　(三邊長)　(R為外接圓半徑)　(r為內切圓半徑)

Ex23：已知空間中三點 A(1,2,3)，B(−1,3,2)，C(3,3,1)，求：

(1) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

(2) △ABC之面積

Sol：$\overrightarrow{AB}=(-2,1,-1)$，$\overrightarrow{AC}=(2,1,-2)$

(1) $$\begin{matrix}\cancel{-2}&1&-1&-2&1&\cancel{-1}\\\cancel{2}&1&-2&2&1&\cancel{-2}\end{matrix}$$

$(-1,-6,-4)$

(2) $\frac{1}{2}\sqrt{1+36+16}=\frac{1}{2}\sqrt{53}$

Ex24：設 $a,b\in\mathbb{Z}$ 且 $\begin{vmatrix}5 & a\\ b & 7\end{vmatrix}=4$，則絕對值 $|a+b|$ 為何？

(1) 16 (2) 31 (3) 32 (4) 39

Sol：$35-ab=4 \Rightarrow ab=31$

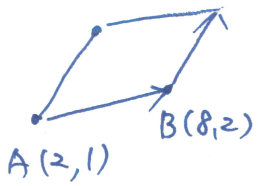
$\because a,b\in\mathbb{Z} \Rightarrow (a,b)=(1,31),(31,1)$
$=(-1,-31),(-31,-1)$

$\Rightarrow |a+b|=32$

(3)#

Ex25：坐標平面上有一平行四邊形ABCD，其中 $A(2,1)$，$B(8,2)$，C在第一象限且知其 x 坐標為12。若平行四邊形的面積等於38平方單位，求D點坐標。

Sol：



$▱=\left|\begin{vmatrix}6 & 1\\ 10 & y-1\end{vmatrix}\right|=38$

$\Rightarrow |6(y-1)-10|=38$

$\Rightarrow 6(y-1)-10=38$ or -38

$\Rightarrow y=9$ or $-\frac{11}{3}$（不合）

$D=B+C-A=(6,8)$

Ex26：設 a,b,c 為 $\triangle ABC$ 的三邊長，滿足 $\begin{cases}5a+2b-5c=0\\ 3a-12b+8c=0\end{cases}$，試求：

(1) $\sin A:\sin B:\sin C$

(2) 最大內角的餘弦值．

Sol：

(1)
$$\begin{array}{cccccc} \cancel{5} & 2 & -5 & 5 & 2 & \cancel{-5} \\ \cancel{3} & -12 & 8 & 3 & -12 & \cancel{8} \end{array}$$
$$-44,\ -55,\ -66$$

$\therefore \sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$
$=4:5:6$

(2) 最大內角對最大邊 $\Rightarrow \angle C$

$\cos C=\dfrac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot4\cdot5}=\dfrac{5}{2\cdot4\cdot5}=\dfrac{1}{8}$

Ex27：設 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 是空間中三個相異非零向量，求下列敘述哪些是正確的。

(1) 若 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$，則 $\vec{a}\parallel\vec{b}$

(2) 若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，則 $\vec{a}\perp\vec{b}$

(3) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}$

(4) 若 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$，則 $\vec{b}=\vec{c}$

(5) 若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$，則 $\vec{b}=\vec{c}$

(6) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}=0$

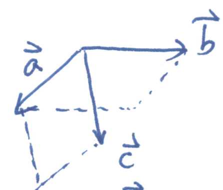
Sol：

(1) $|\vec{a}\times\vec{b}|=\vec{a},\vec{b}$ 所夾▱面積 $=0 \Rightarrow \vec{a}\parallel\vec{b}$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Rightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$

(3) $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$

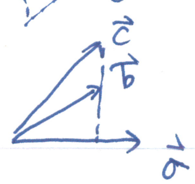
(4) 若



若 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 在同一平面，且 $\vec{a},\vec{b}$ 所圍▱ $=\vec{a},\vec{c}$ 所圍▱

如圖 $\Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$

(5)



如圖，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$

(6) $(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{a}$ 且 $(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{b} \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{a}=0$

9. 柯西不等式：

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cdot\cos\theta \Rightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\ge|\vec{a}\cdot\vec{b}|$

(1) 當 $\vec{a}=(a_1,a_2)$，$\vec{b}=(b_1,b_2) \Rightarrow (a_1^2+a_2^2)\cdot(b_1^2+b_2^2)\ge(a_1b_1+a_2b_2)^2$

(2) 當 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3) \Rightarrow (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\ge(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$

"=" 成立時

$\vec{a}\parallel\vec{b}$

$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$

$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$

[題型一] (二次)( ) ≥ (一次)^2

[題型二] $\underbrace{(\quad)(\quad)}_{倒數}\ge(\quad)^2$

<cf> 求最大最小值.

① 配方法 $\xrightarrow{使用時機}$ 二次函數：$a(x-h)^2+k$，當 $x=h$ 時，有最大(小)值.

② 算幾不等式 $\xrightarrow{使用時機}$ 相加、相乘：$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$，當 $a=b$ 時，有最大(小)值.

③ 柯西不等式 $\xrightarrow{使用時機}$ 相加、相加：$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\ge(ac+bd)^2$，當 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ 時，有最大(小)值.

④ 線性規畫 $\xrightarrow{使用時機}$ 可行解區域：，當 (x,y) 為頂點 時，有最大(小)值.
(平行線 or 頂點法)

Ex28：設 $2x^2+3y^2=20$，求 $2x+3y$ 的最大值。並求出此時 (x,y) 值。

Sol：

$\underbrace{((\sqrt{2}x)^2+(\sqrt{3}y)^2)}_{二次}((\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2)\ge\underbrace{(2x+3y)}_{一次}^2$

$\Rightarrow 20\times5\ge(2x+3y)^2$

$\Rightarrow -10\le 2x+3y\le10$ Max

"=" 成立 $\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}y}{\sqrt{3}}\Rightarrow x=y=2$

Ex29：設 x,y,z 均為正數，且 $x+y+z=1$，求 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}$ 的最小值，並求出此時序對 (x,y,z)。

Sol：

$[(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2+(\sqrt{z})^2][(\frac{1}{\sqrt{x}})^2+(\frac{2}{\sqrt{y}})^2+(\frac{3}{\sqrt{z}})^2]\ge(1+2+3)^2$

$\Rightarrow 1\times(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z})\ge36$ min

"=" 成立 $\frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt{y}}{\frac{2}{\sqrt{y}}}=\frac{\sqrt{z}}{\frac{3}{\sqrt{z}}}\Rightarrow x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}=\frac{1}{6}$

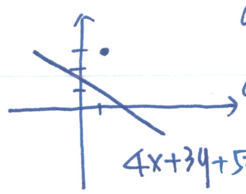
$(x,y,z)=(\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{2})$

Ex30：設 $P(x,y)$ 為直線 $L: 4x+3y+5=0$ 上的動點，求 $(x+1)^2+(y-3)^2$ 的最小值。

Sol：[法一] $[(x+1)^2+(y-3)^2](4^2+3^2)\ge(\overbrace{4x+3y-5}^{4x+4+3y-9})^2$

$(x+1)^2+(y-3)^2\ge\frac{(-10)^2}{25}=4$

[法二] 幾何



$d=\frac{|-4+9+5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$

$d^2=2^2=4$

$(x+1)^2+(y-3)^2$ 想成 (x,y) 到 $(-1,3)$ 的距離，再平方