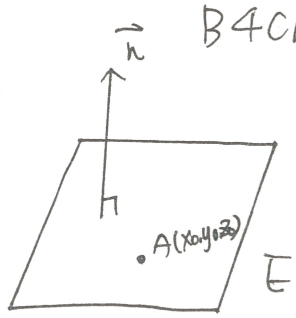
空間中的平面、直線、立体圖形

1、空間中的平面 ⇒ ① 點 ② 法向量

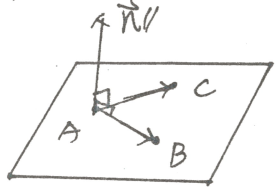


給定平面上一點 $A(x_0,y_0,z_0)$ 及法向量 $\vec{n}=(a,b,c)$，

則平面 E 的方程式為 $ax+by+cz \overset{\text{點}}{=} ax_0+by_0+cz_0$

[空間概念] ① 直線 L 和平面 E 垂直 ⇒ 平面 E 上任意直線均垂直直線 L。

② 在平面 E 上找到 2 條直線 L 垂直 ⇒ 直線 L 和平面 E 垂直。



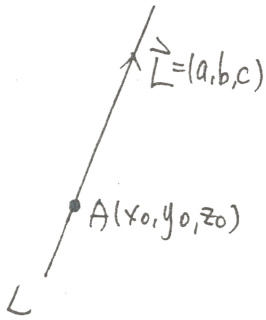
《求平面方程式》

(1) 給定平面 E 上三點 A,B,C ⇒ $\vec{n} \parallel \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

（找不到 $\vec{n}$ ⇒ 找平面上兩向量，再外積）

(2) 給定平面與 x,y,z 軸截距 α,β,γ ⇒ $\dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{y}{\beta}+\dfrac{z}{\gamma}=1$

2、空間中的直線 ⇒ ① 點 ② 方向向量



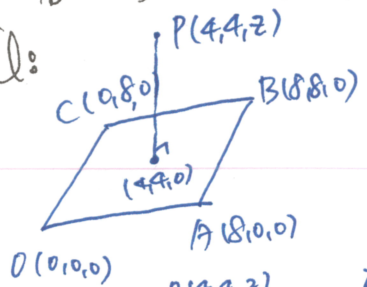
給定直線上一點 $A(x_0,y_0,z_0)$ 及方向向量 $\vec{L}=(a,b,c)$，

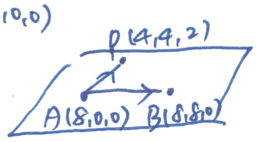
則直線 L 的參數式為 $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$ （常用於假設直線上的點）

比例式為 $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$

Ex1： 坐標空間中 xy 平面上有一正方形，其頂點為 $O(0,0,0)$，$A(8,0,0)$，$B(8,8,0)$，$C(0,8,0)$，另一點 P 在 xy 平面的上方，且與 O,A,B,C 四點的距離皆等於 6。若 $x+by+cz=d$ 通過 A,B,P，求 (b,c,d)。

Sol:





設 $P(4,4,z)$

$\Rightarrow \overline{OP}=6 \Rightarrow z=2\ (z>0)$

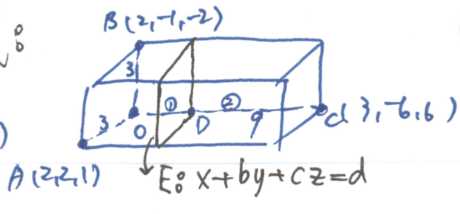
$\overrightarrow{AB}=(0,8,0)$，$\overrightarrow{AP}=(-4,4,2)$

$\vec{n} \parallel (16,0,32) \parallel (1,0,2)$

$x+0\cdot y+2z \underset{(8,0,0)}{=\!=\!=} 8$

Ex2： 設 $O(0,0,0)$ 為空間中某長方体的一個頂點，且知 $(2,2,1)$，$(2,-1,-2)$，$(3,-6,6)$ 為此長方体中與 O 相鄰的三頂點，若平面 $F: x+by+cz=d$ 將長方体截成兩部分，其中包含頂點 O 的是正立方体，求 (b,c,d)。

Sol:



$D=\dfrac{2O+1\cdot C}{3}$
$=(1,-2,2)$

$\vec{n} \parallel \overrightarrow{OC}=(3,-6,6) \parallel (1,-2,2)$

$x-2y+2z \underset{(1,-2,2)}{=\!=\!=} 9$

Ex3：坐標空間中有三直線

$L_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{1}$，$L_2: \begin{cases} x-2y+2z=-4 \\ x+y-4z=5 \end{cases}$

$L_3: \begin{cases} x=-t \\ y=-2-t \\ z=4+4t \end{cases}$，$t\in R$。請選出正確選項。

(1) L_1, L_2 的方向向量互相垂直 $(2,2,1)\cdot(2,2,1)\neq 0$

✓(2) L_1, L_3 的方向向量互相垂直. $(2,2,1)\cdot(-1,-1,4)=0$

✓(3) 有一個平面同時包含 L_1, L_2　$\vec{L_1}\parallel\vec{L_2}$ ⇒ 看是否相多，L_2的點 $(2,3,0)$ 代入 L_1：$\frac{1}{2}\neq\frac{4}{2}$(不合) ⇒ 平行

✓(4) 有一個平面同時包含 L_1、L_3　$\vec{L_1}\nparallel\vec{L_3}$ ⇒ 看是否相交，設相交點 M

(5) 有一個平面同時包含 L_2, L_3

M在L_1上 ⇒ 設 $M(1+2t, -1+2t, t)$
M在L_3上 ⇒ 設 $M(-s, -2-s, 4+4s)$ ⇒ 不可相同參數 ⇒ 相交

$\begin{cases} 1+2t=-s \\ -1+2t=-2-s \\ t=4+4s \end{cases}$ ⇒ $-1=8+9s$，$s=-1, t=0$

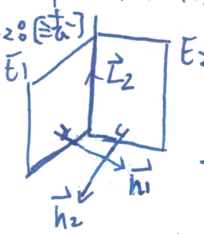
Sol：234 [空間概念]　歪斜 ~~(L_1,L_3相交, $L_2\parallel L_1$)~~

① 二直線的關係 ⇒ 平行、重合、相交、歪斜

② 有一平面包含二直線 ⇒ 兩線 平行、重合、相交
(平面上二線關係)

4：
$L_1\parallel(2,2,1)$，點 $(1,-1,0)$

L_2：[法一]



$\vec{L_2}\parallel\vec{n_1}\times\vec{n_2}$

$\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 & -4 \end{array}$
$(6,6,3)$

$\therefore \vec{L_2}\parallel(2,2,1)$

點 $z=0 \Rightarrow \begin{cases} x-2y=-4 \\ x+y=5 \end{cases}$
$y=3, x=2 \Rightarrow (2,3,0)$

[法二] 令 $z=t$

$\begin{cases} x-2y=-4-2t \\ x+y=5+4t \end{cases}$ ⇒ $3y=9+6t$
$y=3+2t$
$\therefore x=2+2t$

$(2+2t, 3+2t, t)$ ⇒ $\vec{L_2}\parallel(2,2,1)$，點 $(2,3,0)$

L_3：$\vec{L_3}=(-1,-1,4)$
點 $(0,-2,4)$

Ex4：下列各直線，請選出和 z 軸互為歪斜線的選項

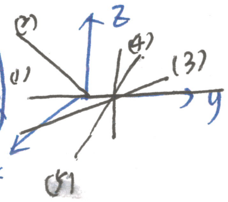
(1) $L_1: \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$　(2) $L_2: \begin{cases} y=0 \\ x+z=1 \end{cases}$　✓(3) $L_3: \begin{cases} z=0 \\ x+y=1 \end{cases}$

(4) $L_4: \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$　✓(5) $L_5: \begin{cases} y=1 \\ z=1 \end{cases}$

Sol：[法一] z軸 $(0,0,z)$，$\vec{z}=(0,0,1)$

找交點 (1) $(0,0,0)$ (2) $(1,0,0)$
(3) 不合 (4) 平行 (5) 不合

[法二] 圖示



Ex5：坐標空間中，直線 $L: \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z}{-1}$，

平面 $E_1: 2x-3y-z=0$，平面 $E_2: x+y-z=0$，

試選出正確的選項。

(1) 點 $(3,0,-1)$ 在直線 L 上

(2) 點 $(1,2,3)$ 在平面 E_1 上

✓(3) 直線 L 與平面 E_1 垂直.

(4) 直線 L 在平面 E_2 上

(5) 平面 E_1 和 E_2 交於一線

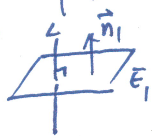
Sol：35 [空間概念]　$\vec{n}\perp\vec{L_2}$　$\vec{n}\nparallel\vec{L}$

直線與平面關係：平行、重合、相交

(1) $\frac{3-1}{2}\neq\frac{0-2}{-3}$

(2) $2\times1-3\times2-3\neq0$

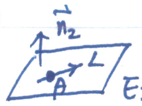
(3)



$\vec{L}=(2,-3,-1)$
$\vec{n_1}=(2,-3,-1)$

$\vec{L}\parallel\vec{n}$ ⇒ $L\perp E$

(4)



$\vec{L}=(2,-3,-1)$
$\vec{n_2}=(1,1,-1)$

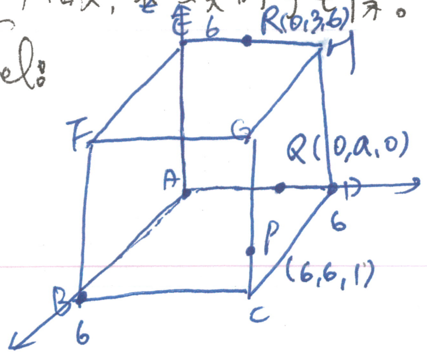
$\vec{L}\cdot\vec{n_2}=2-3+1=0$

A $(1,2,0)$ 代入 E_2
$1+2-0\neq0$　(×)

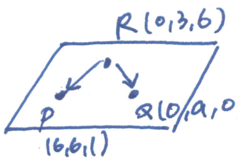
(5) $E_1\nparallel E_2$
⇒ E_1, E_2 交一線

Ex6：如圖，A、B、C、D、E、F、G、H 為正立方體的八個頂點，其中 A$(0,0,0)$，B$(6,0,0)$，D$(0,6,0)$，E$(0,0,6)$。P在$\overline{CG}$上且 $\overline{CP}:\overline{PG}=1:5$，R在$\overline{EH}$上且 $\overline{ER}:\overline{RH}=1:1$，Q在$\overline{AD}$上。若通過 P、Q、R 三點的平面與直線AG不相交，求Q點的y坐標。

Sol：



$\vec{AG}=(6,6,6)\parallel(1,1,1)$



$\vec{RP}=(6,3,-5)$

$\vec{RQ}=(0,a-3,-6)$

$\begin{array}{cccccc} 6 & 3 & -5 & 6 & 3 & -5 \\ 0 & a-3 & -6 & 0 & a-3 & -6 \end{array}$

$\vec{n}\parallel(-18+5a-15, 36, 6(a-3))$

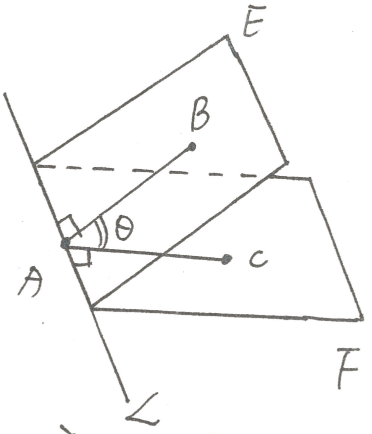
∵不相交 ∴ $\vec{n}\perp\vec{AG}$

⇒ $-33+5a+36+6(a-3)=0$

⇒ $11a-15=0$　⇒ $a=\frac{15}{11}$ #

3、夾角問題 ⇒ $\cos\theta = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

（已知三邊）　（坐標 or 向量）



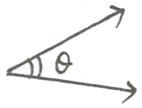
[空間概念] ① 二平面關係：平行、重合、相交

② 二面角：平面 E、F 交於一直線 L，點 A 在 L 上

且 $\overline{BA}\perp L$，$\overline{CA}\perp L$（B 在 E 上，C 在 F 上），

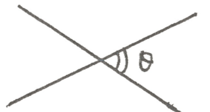
則稱 ∠BAC 為二平面 E、F 之二面角。

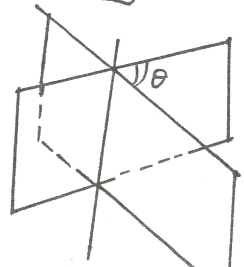
向量夾角 ⇒ 唯一解 θ



二直線夾角 ⇒ 有二解 θ，180°−θ

二平面夾角

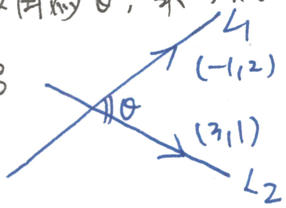




Ex7：兩直線 L_1：$\begin{cases} x=1-t \\ y=3+2t \end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$，

L_2：$x-3y=2$。若二直線 L_1，L_2 的夾角為 θ，求 $\sin\theta$ 之值。

Sol：



$\therefore \sin\theta = \dfrac{7}{5\sqrt{2}}$ #

$\cos\theta = \dfrac{(-1,2)\cdot(3,1)}{\sqrt{5}\,\sqrt{10}} = \dfrac{-1}{5\sqrt{2}}$

Ex9：如圖，ABCD 為四面體，已知 $\overline{AD}$ 垂直於平面 BCD，$\overline{BC}\perp\overline{BD}$，$\overline{AD}=15$，$\overline{CD}=20$，$\overline{AB}=24$。若平面 ADB 與平面 ADC 的夾角 θ，求 $\sin\theta$ 之值。

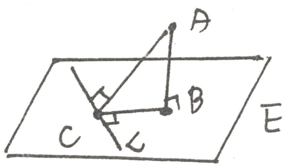
Sol：[空間概念] 三垂線定理

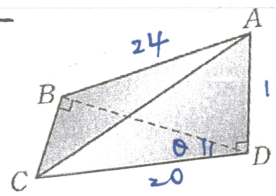
空間中一點 A 在平面 E 之投影點 B，

L 在平面 E 上，C 在直線 L 上

① $\overline{AB}\perp E$ 且 $\overline{BC}\perp L$ ⇒ $\overline{AC}\perp L$

② $\overline{AB}\perp E$ 且 $\overline{AC}\perp L$ ⇒ $\overline{BC}\perp L$





$\theta = \angle BDC$

⇒ $\overline{AC}=25$，$\overline{BC}=7$

$\therefore \sin\theta = \dfrac{7}{20}$

Ex8：坐標空間中，平面 $ax+by+cz=0$ 與平面 $x=0$，$x+\sqrt{3}y=0$ 的夾角（介於 0° 到 90° 間）都是 60° 且 $a^2+b^2+c^2=12$，求序對 (a^2,b^2,c^2)。

Sol：$\cos 60° = \dfrac{(a,b,c)\cdot(1,0,0)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\sqrt{1}} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{12}} \Rightarrow a=\sqrt{3}$

$\cos 60° = \dfrac{(a,b,c)(1,\sqrt{3},0)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}+b\sqrt{3}}{\sqrt{12}\cdot 2} \Rightarrow b=1$

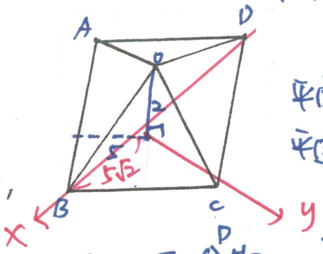
$\therefore a^2=3,\ b^2=1,\ c^2=8$

Ex10：在空間中，一個斜面「坡度」定義為與水平面夾角 θ 的正切值 $\tan\theta$。若一金字塔（底部為正方形，四個斜面為等腰三角形）的每一個斜面的坡度皆為 $\frac{2}{5}$，如圖。求相鄰斜面的夾角的餘弦的絕對值。

Sol：

[法一] 坐標化　O (0,0,2)，B $(5\sqrt{2},0,0)$

C $(0,5\sqrt{2},0)$，D $(-5\sqrt{2},0,0)$

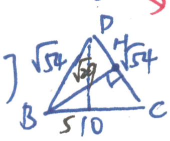


平面 OBC　$\dfrac{x}{5\sqrt{2}}+\dfrac{y}{5\sqrt{2}}+\dfrac{z}{2}=1$

平面 OCD　$\dfrac{x}{-5\sqrt{2}}+\dfrac{y}{5\sqrt{2}}+\dfrac{z}{2}=1$

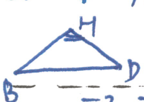
$\cos\theta = \dfrac{\left(\frac{1}{5\sqrt{2}},\frac{1}{5\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{5\sqrt{2}},\frac{1}{5\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{50}+\frac{1}{50}+\frac{1}{4}}\,\sqrt{\frac{1}{50}+\frac{1}{50}+\frac{1}{4}}} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{29}{100}} = \dfrac{25}{29}$

[法二]



$10\times\sqrt{29} = \sqrt{54}\times\overline{BH}$

$\overline{BH} = \dfrac{10\sqrt{29}}{\sqrt{54}}$，$\overline{BD}=10\sqrt{2}$



$\cos\theta = \dfrac{\overline{HB}^2+\overline{HD}^2-\overline{BD}^2}{2\cdot\overline{HB}\,\overline{HD}}$

$= \dfrac{\frac{100}{54}\times 29\times 2-200}{2\cdot\frac{100}{54}\times 29}$

$= \dfrac{29-54}{29} = \dfrac{-25}{29}$

4. 距離問題：

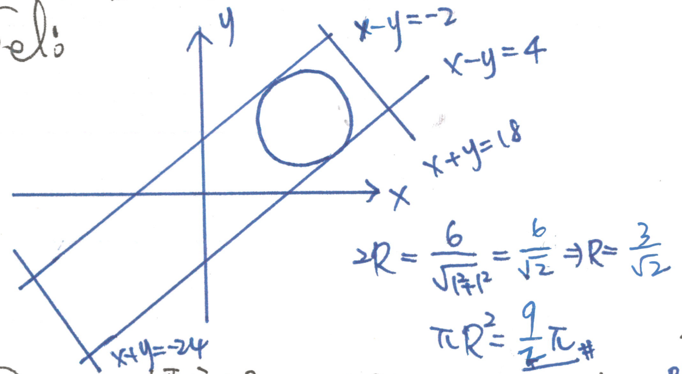
	二點	點線 v.s 點面	二平行線 v.s 二平行面
平面	$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ $\Rightarrow \overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$	$A(x_1,y_1)$, $L: ax+by+c=0$ $\Rightarrow d(A,L)=\frac{\lvert ax_1+by_1+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$L_1: ax+by+c_1=0$, $L_2: ax+by+c_2=0$ $\Rightarrow d(L_1,L_2)=\frac{\lvert c_1-c_2\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$
空間	$A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ $\Rightarrow \overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$	$A(x_1,y_1,z_1)$, $E: ax+by+cz+d=0$ $\Rightarrow d(A,E)=\frac{\lvert ax_1+by_1+cz_1+d\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$	$E_1: ax+by+cz+d_1=0$, $E_2: ax+by+cz+d_2=0$ $\Rightarrow d(E_1,E_2)=\frac{\lvert d_1-d_2\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Ex11：坐標平面上，圓Γ落在四個不等式：

$x-y\le 4$, $x+y\le 18$, $x-y\ge -2$, $x+y\ge -24$

所圍成的區域內。求Γ最大可能面積。

Sol：



$2R=\frac{6}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt2}\Rightarrow R=\frac{3}{\sqrt2}$

$\pi R^2=\frac{9}{2}\pi$ #

Ex12：坐標平面上有相異兩點P, Q，其中P點坐標(s,t)。已知線段PQ的中垂線L的方程式為3x−4y=0，試問下列那些是正確的？

(1) 向量$\overrightarrow{PQ}$與向量(3,−4)平行 ✓

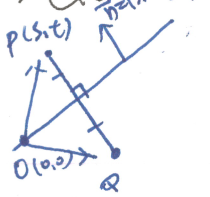
(2) 線段PQ的長度等於$\frac{\lvert 6s-8t\rvert}{5}$ ✓

(3) Q點坐標為(t,s)

(4) 過Q點與直線L平行之直線必過點(−s,−t) ✓

(5) 若O表示原點，則$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$與$\overrightarrow{PQ}$的內積必為0 ✓

Sol：



(1) $\overrightarrow{PQ}\parallel\vec n=(3,-4)$

(2) $|\overrightarrow{PQ}|=2\cdot d(P,L)=2\cdot\frac{\lvert 3s-4t\rvert}{5}$

(3) $P(s,t)\longleftrightarrow Q(t,s)$ 對稱 $y=x$ (×)

(4) 過P平行L：$3x-4y=3s-4t$

[法一] L：$3x-4y=0$

過Q平行L：$3x-4y=-(3s-4t)$

[法二] $(s,t)\longleftrightarrow(-s,-t)$ 對稱原點

∵(0,0)在L上 ∴正確

(5) $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}\parallel L$

Ex13：坐標空間中，平面E: ax+by+cz=1 滿足以下三條件：

(1) 平面E和平面F: x+y+z=1有一夾角為30°

(2) 點A(1,1,1)到平面E的距離等於3

(3) a+b+c>0，

求a+b+c之值。

Sol：(1) $\cos30^\circ=\left|\frac{(a,b,c)\cdot(1,1,1)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right|\Rightarrow\left|\frac{a+b+c}{\sqrt3\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|=\frac{\sqrt3}{2}$ …①

(2) $d(A,L)=\frac{\lvert a+b+c-1\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=3$ …②

$\frac{①}{②}\Rightarrow\frac{a+b+c}{\lvert a+b+c-1\rvert}=\frac12\Rightarrow 2t=\lvert t-1\rvert$

$2t=\pm(t-1)$ ∴ $t=-1$ or $\frac13$ ∴ $a+b+c=\frac13$ (取正)

Ex14：空間中，點P(2,2,1)是平面E上距離原點O(0,0,0)的最近點。請選出正確的選項。

(1) $\vec v=(1,-1,0)$是平面E的法向量

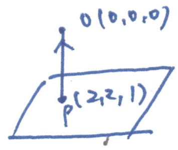
(2) P也是平面E上距離點(4,4,2)最近的點 ✓

(3) 點(0,0,9)在平面E上 ✓

(4) 點(2,2,−8)到平面E的距離為9

(5) 通過原點和點(2,2,−8)的直線會與平面E相交

Sol：



(1) $\vec n\parallel\overrightarrow{OP}=(2,2,1)$

(2) Q(4,4,2)

$\overrightarrow{PQ}\parallel\vec n\Rightarrow$ P是E上，Q的最近點 ($\overrightarrow{PQ}\perp E$)

(3) E: $2x+2y+z=9$ (代入(2,2,1))

(0,0,9)代入 ⇒ 9=9 (○)

(4) $d(R,E)=\frac{\lvert 4+4-8-9\rvert}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=3$

(5) $\overrightarrow{OR}=(2,2,-8)$

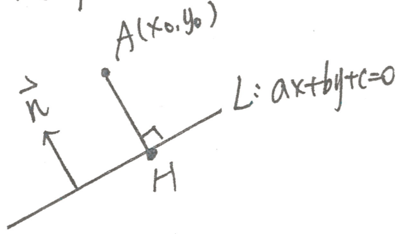
$\overrightarrow{OR}\cdot\vec n=4+4-8=0$ ∴ $\overrightarrow{OR}\parallel E$ (且O不在E上)

5、交點、投影點、對稱點：

1) 求點坐標 | STEP 1：利用直線參數式，設點坐標。
STEP 2：依題目條件，解參數。

2) 投影點：同 1)。

例如：求點 $A(x_0, y_0)$ 在直線 $L: ax+by+c=0$ 的投影點 H。



STEP 1：H 在直線 $\overleftrightarrow{AH}$ 上（① 過 $A(x_0,y_0)$ ② $\overrightarrow{AH} \parallel \vec{n}=(a,b)$）

設 $H(x_0+at,\ y_0+bt)$

STEP 2：H 在 $ax+by+c=0$ 上 ⇒ 代入求 t.

3) 對稱點 ⇒ 先求投影點。

Ex15：設點 $A(-2,2)$, $B(4,8)$ 為坐標平面上兩點，且 C 在 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的圖形上變動。當 C 點的 x 坐標為___時，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 有最小值___。

Sol：設 $C(t, \frac{1}{2}t^2)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (6,6)\cdot(t+2, \frac{1}{2}t^2-2)$

$= 6(t+2)+6(\frac{1}{2}t^2-2)$

$= 3t^2+6t$

$= 3(t+1)^2-3$

$\therefore t=-1$ 有 $\min=-3$
$(x=-1)$

Ex16：坐標空間中有四點 $A(2,0,0)$, $B(3,4,2)$, $C(-2,4,0)$, $D(-1,3,1)$。若 P 在直線 CD 上變動，求 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 之最小可能值。

Sol：$\overrightarrow{CD}=(1,-1,1) \Rightarrow \overleftrightarrow{CD}: \begin{cases} x=-2+t \\ y=4-t \\ z=t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$

設 $P(-2+t, 4-t, t)$

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB} = (t-4, 4-t, t)\cdot(t-5, -t, t-2)$

$= t^2-9t+20-4t+t^2+t^2-2t$

$= 3t^2-15t+20$

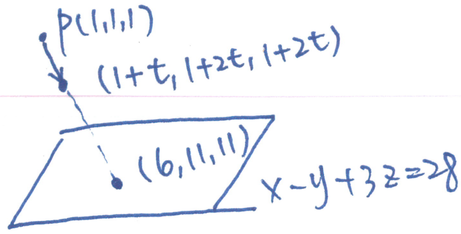
$= 3(t^2-5t)+20$

$= 3(t-\frac{5}{2})^2+20-3\cdot\frac{25}{4}$

$= 3(t-\frac{5}{2})^2+\frac{5}{4}$ $\therefore \min=\frac{5}{4}$

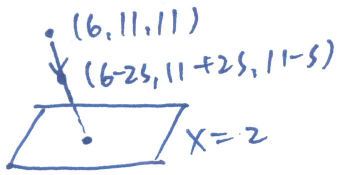
Ex17：坐標空間中一質點自點 $P(1,1,1)$ 沿著方向 $\vec{a}=(1,2,2)$ 等速直線前進，經過 5 秒後剛好到達平面 $x-y+3z=28$ 上，立即轉向沿著 $\vec{b}=(-2,2,-1)$ 依同樣的速率等速直線前進。請問再經過幾秒此質點剛好到達平面 $x=2$ 上。

Sol：



$(1+t)-(1+2t)+3(1+2t)=28$

$3+5t=28 \Rightarrow t=5$



$|\vec{a}|=|\vec{b}|=3$

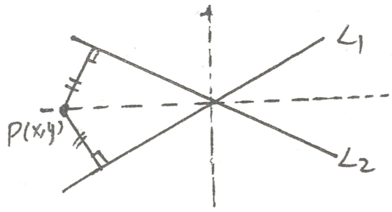
$\therefore 6-2s=2 \Rightarrow s=2$

$\therefore$ 2 秒

6、角平分線、角平分面：

[平面]① = 直線之角平分線 ⇒ $d(p,L_1)=d(p,L_2)$

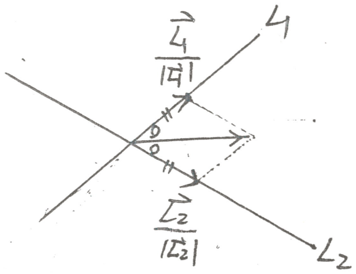
◎ 銳(鈍)角角平分線之判定：畫圖，看斜率



[空間]① = 平面之角平分面 ⇒ $d(p,E_1)=d(p,E_2)$

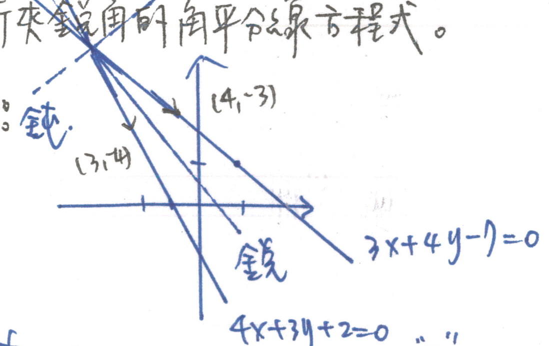
② = 直線之角平分線 ⇒ ① 方向：$\frac{\vec{L_1}}{|\vec{L_1}|} \pm \frac{\vec{L_2}}{|\vec{L_2}|}$

(只有參數式) ② 點：L_1, L_2 之交點



Ex18：求二直線 $3x+4y-7=0$ 及 $4x+3y+2=0$ 所夾銳角的角平分線方程式。

Sol：



[法一] 設 $P(x,y)$

$d(p,L_1)=d(p,L_2)$

$\frac{|3x+4y-7|}{5} = \frac{|4x+3y+2|}{5}$

$\Rightarrow 3x+4y-7 = \pm(4x+3y+2)$

$\Rightarrow 7x+7y-5=0$ (銳) ✓

or $x-y-9=0$ (鈍)

[法二] 銳角平分方向向量 $(4,-3)+(3,-4)$
$=(7,-7)$

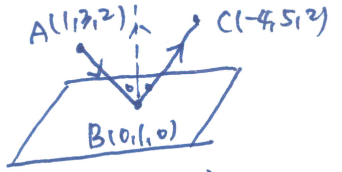
點 $\begin{cases} 3x+4y=7 \\ 4x+3y=-2 \end{cases}$

$\therefore -7x=29,\ x=-\frac{29}{7},\ y=\frac{34}{7}$

$\therefore 7x+7y=5$ #

Ex19：空間坐標中，有一平面鏡 E，今有一雷射光線經過點 A(1,3,2) 射向鏡面 E 上的點 B(0,1,0)，反射後經點 C(−4,5,2)，求平面 E 之方程式。

Sol：



$\vec{BA}=(1,2,2)$，$\vec{BC}=(-4,4,2)$
$\quad // (-2,2,1)$

$\therefore \vec{n} // \vec{BA}+(-2,2,1)$
$=(-1,4,3) // (1,-4,-3)$

$x-4y-3z \overset{(0,1,0)}{=} -4$

7、空間、立體圖形的問題：

Ex20：有關空間的敘述，下列哪些是正確的？

(1) 垂直於同一直線的兩相異直線必互相平行

(2) 兩歪斜線在同一個平面之正射影必為兩相交直線

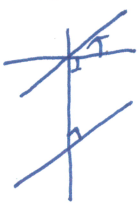
(3) ✓ 兩相異平面 E、F 交於一線 L，若 L 垂直平面 G，則 E、F 均垂直 G

(4) ✓ 過已知直線外一點，恰有一平面垂直此直線

(5) 兩相異直線 L、M 均平行平面 E，則 L 平行 M。

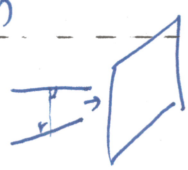
Sol：

(1)



也可以相交 or 歪斜

(2)



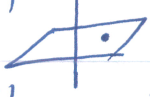
= 平行線 or 一線及線外一點.

(3) $\vec{L} // \vec{n_f} \times \vec{n_e} // \vec{n_g}$

$\therefore \vec{n_g} \perp \vec{n_f}$ 且 $\vec{n_g} \perp \vec{n_e}$

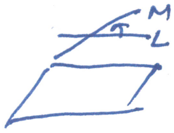
$\therefore G \perp F$ 且 $G \perp E$

(4)



$\vec{L} // \vec{n}$

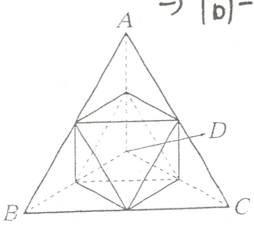
(5) 可以相交 or 歪斜



Ex21：將一個正四面体的四個面上的各邊中点用線段連接，可得四個小正四面体及一個正八面体，如圖。如果原四面体ABCD的体積為12，求正八面体的体積。

Sol：◎ 正四面体，設邊長為 a

⇒ 高 $=\frac{\sqrt6}{3}a$，体積 $=\frac{\sqrt2}{12}a^3$，二面角 $\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac13$



$$\text{八面体} = \underbrace{\text{大四面体}}_{\text{邊長 } a} - 4\times(\underbrace{\text{小四面体}}_{\text{邊長 } \frac12 a})$$

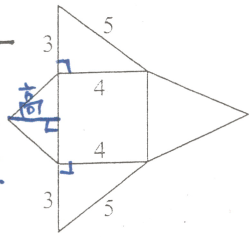
$$= 12-4\times\left(12\times\left(\tfrac12\right)^3\right)$$

$$= 12-6 = \underline{6}\ \#$$

Ex22：有一底面為正方形的四角錐，其展開圖如圖所示，其中兩側面的三角形邊長為3,4,5，求此角錐的体積。

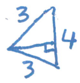
Sol：◎ 柱体体積 = 底面積 × 高

錐体体積 = $\frac13$ × 底面積 × 高.



底 ⇒ 正方形 $=4^2=16$

高 ⇒



的高 $=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt5$

∴ 錐体体積 $=\frac13\times16\times\sqrt5$

$=\underline{\frac{16}{3}\sqrt5}\ \#$

Ex23：如圖，在正立方体上有兩質点分別自頂点A，C同時出發，各自以等速直線運動分別向頂点B，D前進，且在1秒後分別同時到達B、D。請選出這段時間兩質点距離關係的正確選項。

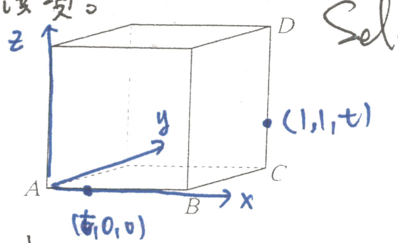
(1) 兩質点的距離固定不變

(2) 兩質点的距離越來越小

(3) 兩質点的距離越來越大

(4) 在 $\frac12$ 秒時，兩質点距離最小

(5) 在 $\frac12$ 秒時，兩質点距離最大



Sol：

$$2\text{質点距}=\sqrt{(t-1)^2+1^2+t^2}$$

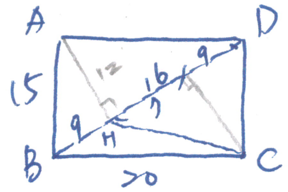
$$=\sqrt{2t^2-2t+2}$$

$$=\sqrt{2\left(t-\tfrac12\right)^2+\tfrac32}$$

∴ $t=\frac12$ 時 有 $\min=\sqrt{\frac32}$

Ex24：將一塊邊長 $\overline{AB}=15$ 公分，$\overline{BC}=20$ 公分的長方形鐵片ABCD沿對角線BD對摺後豎立，使得平面ABD與平面CBD垂直，求A、C兩点(在空間)的距離 $\overline{AC}$。

Sol：

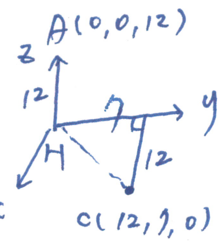


$\overline{CH}=\sqrt{12^2+7^2}$

$\overline{AC}=\sqrt{12^2+\overline{CH}^2}$

$=\sqrt{337}$

[法二]



$\sqrt{12^2+7^2+12^2}$

$=\sqrt{337}$