矩陣

1、矩陣列運算（非矩陣運算）⇒ 解聯立方程式

方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ 可簡化為 增廣矩陣 $\left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}\right]$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列運算}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{array}\right]$$ 表示 一解 (α,β,γ)

$$\xrightarrow{\text{列運算}} \left[\begin{array}{ccc|c} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$ 表示 無解

$$\xrightarrow{\text{列運算}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$ 表示 無限多解.

☆列運算有以下3個：

(1) 任二列互換

(2) 任一列乘上 k 倍 $(k\neq 0)$

(3) 任一列乘上 k 倍加至另一列（加減消去法）

Ex 1：線性方程組 $\begin{cases} x+2y+3z=0 \cdots ① \\ 2x+y+3z=6 \cdots ② \\ x-y \quad\quad =6 \cdots ③ \\ x-2y-z=8 \cdots ④ \end{cases}$ 經高斯消去法計算後，其增廣矩陣可化簡為 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$，求 a,b,c,d 值。

Sol：[法一] 列運算

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[\times(-1),\ \times(-1)]{\times(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & -4 & -4 & 8 \end{bmatrix} \times(-\tfrac{1}{3}) \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & -4 & -4 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[\times 3,\ \times 4]{\times(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore a=1,\ b=4,\ c=1,\ d=-2$

[法二] 解聯立（消x）

$\begin{cases} ①\times 2-②：3y+3z=-6 \\ ① \quad -③：3y+3z=-6 \\ ① \quad -④：4y+4z=-8 \end{cases}$

$\therefore y=-z-2 \cdots ⑤$

代入③ ⇒ $x=y+6$
$\quad = -z+4$

$\therefore \begin{cases} x+z=4 \\ y+z=-2 \end{cases}$

$a=1,\ b=4,\ c=1,\ d=-2$

[法三] 代入 $\begin{cases} x=-az+b \\ y=-cz+d \end{cases}$

代入①：$(-a-2c+3)z+(b+2d)=0$

②：$(-2a-c+3)z+(2b+d-6)=0$

$\begin{cases} -a-2c=-3 \\ -2a-c=-3 \end{cases} \Rightarrow a=c=1,\ \begin{cases} b+2d=0 \\ 2b+d=6 \end{cases} \Rightarrow b=4,\ d=-2$

Ex2：對矩陣 $\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 9 & a \\ 3 & 7 & b \end{array}\right]$ 作列運算若干次後得到 $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$，求 a, b 值。

Sol：解 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

$\therefore 4\times1+9\times1=a=13$

$3\times1+7\times1=b=10$

Ex3：設 a, b, c 為實數，下列關於方程組

$\begin{cases} x+2y+az=1 \cdots ① \\ 3x+4y+bz=-1 \cdots ② \\ 2x+10y+7z=c \cdots ③ \end{cases}$ 的敘述哪些正確？

(1) 若此方程組有解，則必定恰有一解

(2) 若此方程組有解，則 $11a-3b\neq7$

(3) 若此方程組有解，則 $c=14$

(4) 若此方程組無解，則 $11a-3b=7$ ✓

(5) 若此方程組無解，則 $c\neq14$ ✓

Sol：消 $x \Rightarrow \begin{cases} ①\times3-②：2y+(3a-b)z=4 \\ ①\times2-③：-6y+(2a-7)z=2-c \end{cases}$

(1) 若 $\frac{2}{-6}=\frac{3a-b}{2a-7}=\frac{4}{2-c}$ 有無限多解

$2a-7=-9a+3b \Rightarrow 11a-3b=7$

$2-c=-12 \Rightarrow c=14$ (x)

(2) 若為無限多解 $\Rightarrow 11a-3b=7$ (x)

(3) 若為一組解 $\Rightarrow 11a-3b\neq7$，c為任意值。(x)

(4)(5) 若為無解 $\Rightarrow 11a-3b=7$ 且 $c\neq14$ (o)

Ex4：設 $a_1, a_2, \cdots, a_9$ 為等差數列且 k 為實數。若方程組

$\begin{cases} a_1x-a_2y+2a_3z=k+1 \cdots ① \\ a_4x-a_5y+2a_6z=-k-5 \cdots ② \\ a_7x-a_8y+2a_9z=k+9 \cdots ③ \end{cases}$ 有解，

求 k 值。

Sol：設公差 d

$② - ① \Rightarrow (3d)x-(3d)y+(6d)z=-2k-6$

$③ - ② \Rightarrow (3d)x-(3d)y+(6d)z=2k+14$

有解 $\Rightarrow -2k-6=2k+14$

$\Rightarrow 4k=-20 \Rightarrow \underline{k=-5}$ #

Ex5：阿德賣 100 公斤的香蕉，第一天每公斤賣 40 元；沒賣完的部分，第二天降價為每公斤 36 元；第三天再降為每公斤 32 元，到第三天全部賣完，三天所得共為 3720 元。假設阿德在第三天賣香蕉的公斤數為 t，可算得第二天賣出香蕉的公斤數為 at+b，求 a, b 值。

Sol：第三天賣 t 公斤

二天賣 at+b 公斤

一天賣 $100-t-(at+b)$ 公斤

$=(-a-1)t+(100-b)$

所得 $=32t+36(at+b)+40[(-a-1)t+(100-b)]=3720$

$\Rightarrow (32+36a-40a-40)t+(36b+4000-40b-3720)=0$

$\Rightarrow (-4a-8)t+(-4b+280)=0$

$\therefore a=-2, b=70$

2、矩陣的定義：

$$M=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=[a_{ij}]_{m\times n}$$ 稱為矩陣。

(1) 矩陣的大小：$m\times n$ 階，記作 $m\times n$。若 $m=n$ 時，稱 M 為方陣。

(2) 矩陣的元：a_{ij} 表示第 i 列第 j 行的元素，記作 (i,j) 元。

3、矩陣的運算：

(1) 加(減)法：需 大小相同

設 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，$B=[b_{ij}]_{m\times n}$ ⇒ $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$（對應元相加）

$A-B=[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$（對應元相減）

(2) 係數積：設 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ ⇒ $rA=[ra_{ij}]_{m\times n}$（所有元都 r 倍）

(3) 乘法：設 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，$B=[b_{ij}]_{p\times q}$

① AB 有意義 ⇒ $n=p$，BA 有意義 ⇒ $q=m$

② 若 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，$B=[b_{ij}]_{n\times q}$，$C=AB=[c_{ij}]_{m\times q}$，

則矩陣 C 的大小為 $m\times q$ 階；矩陣 C 的 (i,j) 元 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$

③ 矩陣 $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$，稱為(乘法)單位矩陣，滿足 $AI=IA=A$

(4) 反方陣：若一個方陣 A 有乘法反元素，記作 A^{-1}，滿足 $AA^{-1}=A^{-1}A=I$

① A^{-1} 存在 ⇔ $\det A\neq 0$

② 設 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 且 $\det A\neq 0$，則 A^{-1} 有兩種求法：

[法一] 矩陣列運算：$\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{列運算}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & A^{-1} \end{array}\right]$

[法二] 公式解：$A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Ex6：設 $A=\begin{bmatrix}1&3\\5&7\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&4\\6&8\end{bmatrix}$，求下列各小題的矩陣。

(1) $A+\frac{1}{2}B$ (2) AB (3) BA (4) A^{-1}

Sol：

(1) $\begin{bmatrix}1&3\\5&7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&5\\8&11\end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix}1&3\\5&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&4\\6&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times2+3\times6&1\times4+3\times8\\5\times2+7\times6&5\times4+7\times8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20&28\\52&76\end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix}2&4\\6&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\5&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22&34\\46&74\end{bmatrix}$

(4) $A^{-1}=\frac{1}{(7-15)}\begin{bmatrix}7&-3\\-5&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-7}{8}&\frac{3}{8}\\\frac{5}{8}&\frac{-1}{8}\end{bmatrix}$

4. 矩陣運算的性質：

(1) 加法具有交換律、結合律、消去律

(2) 乘法具有結合律，

① $\boxed{\text{不具}}$有交換律：$AB=BA$ 不一定成立

⇒ 乘法公式 如：$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 不一定成立

《特例》遇到 $\underline{I}$，乘法有交換律

$AI=IA$、$(A+I)^2=A^2+2A+I^2$、…

② $\boxed{\text{不具}}$有消去律：$AB=AC \Rightarrow B=C$ 不一定成立

$AB=0 \Rightarrow A=0$ or $B=0$

《修正》$AB=AC$ 且 $\underline{\det A\neq0} \Rightarrow B=C$

$AB=0$ 且 $\underline{\det A\neq0} \Rightarrow B=0$

(3) 求解：$AX=B \Rightarrow X=\underline{A^{-1}B}$ $A^{-1}(AX)=A^{-1}B$

$XA=B \Rightarrow X=\underline{BA^{-1}}$ $(XA)A^{-1}=BA^{-1}$

(4) 指數律：$A^m\cdot A^n=A^{m+n}$、$(A^n)^{-1}=\underline{A^{-n}}$、$(AB)^{-1}=\underline{B^{-1}A^{-1}}$

Ex7：設 A,B,C 皆為 3×3 矩陣，則下列敘述那些正確？

(1) $AB=BA$ 恆成立

(2) $(AB)C=A(BC)$

(3) 若 $AB=0 \Rightarrow A=0$ 或 $B=0$

(4) 若 $\det(A)\neq 0$ 且 $AB=AC \Rightarrow B=C$

(5) $(A+B)^2 \overset{?}{=} A^2+2AB+B^2$ 恆成立

Sol：

(1) 不具交換律 (×)

(5)

(3) $AB=0$ 不具消去律 (×)

(4) $\det A\neq 0 \Leftrightarrow A^{-1}$ 存在

Ex8：下列那一個選項中，矩陣乘積等於 $\begin{bmatrix}2a & 3b\\ 2c & 3d\end{bmatrix}$？

(1) $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$

Sol： (1) $\begin{bmatrix}2a+3b\\ 2c+3d\end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix}2a & 2b\\ 3c & 3d\end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix}2a+3c & 2b+3d\end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix}2a & 3b\\ 2c & 3d\end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix}2a+3c & 2b+3d\\ 2a+3c & 2b+3d\end{bmatrix}$

(5) #

Ex9：設 a,b,c,d,e,x,y,z 皆為實數，

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 5 & 7\\ -4 & 6 & e\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & x & 7\\ 0 & y & 7\\ -11 & z & 23\end{bmatrix},$$

求 y 值。

Sol：

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 5 & 7\\ -4 & 6 & e\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3a-4b & 5a+6b & 7a+be\\ -3c-4d & 5c+6d & 7c+de\\ -11 & 17 & 7+2e\end{bmatrix}$$

由 (3,3) 元知：$7+2e=23 \Rightarrow 2e=16 \Rightarrow e=8$

由 (2,1) 元、(2,3) 元知 $\begin{cases}-3c-4d=0 \cdots ①\\ 7c+8d=7 \cdots ②\end{cases} \Rightarrow ①\times 2+② \Rightarrow c=7$

$\therefore d=\frac{-21}{4}$

$y=5c+6d=35+\frac{-63}{2}=\frac{7}{2}$ #

Ex10：設實係數二階方陣 A 滿足

$A\begin{bmatrix}7\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}9\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 5\end{bmatrix}$。

若 $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}$，求 a,b,c,d 值。

Sol：[法一] $A\left[\begin{array}{c|c}7 & 9\\ 3 & 4\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c}2 & 1\\ 1 & 5\end{array}\right]$

$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 9\\ 3 & 4\end{bmatrix}^{-1}$

$\therefore \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}4 & -9\\ -3 & 7\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}a=4,\ c=-9\\ b=-3,\ d=7\end{matrix}$

[法二] 設 $A=\begin{bmatrix}x & y\\ z & u\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}x & y\\ z & u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7x+3y\\ 7z+3u\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}7x+3y=2\\ 7z+3u=1\end{cases}$

$\begin{bmatrix}x & y\\ z & u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9x+4y\\ 9z+4u\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}9x+4y=1\\ 9z+4u=5\end{cases}$

$\begin{cases}7x+3y=2\\ 9x+4y=1\end{cases} \Rightarrow x=5,\ y=-11 \Rightarrow \begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 5\end{bmatrix}^{-1}A$

$=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}5 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -11\\ -11 & 26\end{bmatrix}$

$\begin{cases}7z+3u=1\\ 9z+4u=5\end{cases} \Rightarrow z=-11,\ u=26$

$=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}36 & -81\\ -27 & 63\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -9\\ -3 & 7\end{bmatrix}$

Ex11：設 P、Q、R 皆為二階方陣

$PQ=\begin{bmatrix}2&0\\12&0\end{bmatrix}$、$PR=\begin{bmatrix}1&3\\4&12\end{bmatrix}$ 且

$Q+R=\begin{bmatrix}1&0\\3&3\end{bmatrix}$，求矩陣 P。

Sol：$PQ+PR=P(Q+R)$

$$\begin{bmatrix}2&0\\12&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&3\\4&12\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}1&0\\3&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&3\\16&12\end{bmatrix}$$

$$\therefore P=\begin{bmatrix}3&3\\16&12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\3&3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}3&3\\16&12\end{bmatrix}\times\frac{1}{3}\begin{bmatrix}3&0\\-3&1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0&3\\12&12\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&1\\4&4\end{bmatrix}$$ #

Ex12：矩陣 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&-a\end{bmatrix}$，其中 a, b, c 是實數且行列式 $\det(A)=1$，求行列式 $\det(A-A^{-1})$ 之值為何？

(1) 0　(2) 1　(3) 2　(4) 4　(5) 16

Sol：

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix}-a&-b\\-c&a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a&-b\\-c&a\end{bmatrix}$$

$$A-A^{-1}=\begin{bmatrix}2a&2b\\2c&-2a\end{bmatrix}$$

$$\det(A-A^{-1})=\begin{vmatrix}2a&2b\\2c&-2a\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}a&b\\c&-a\end{vmatrix}=\underline{4}$$ #

Ex13：設 n 為正整數，$\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}^n$ 代表矩陣 $\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}$ 自乘 n 次。令 $\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}a_n&b_n\\c_n&d_n\end{bmatrix}$，請選出正確選項。

✓(1) $a_2=1$　✓(2) a_1,a_2,a_3 為等比數列

✓(3) d_1,d_2,d_3 為等比數列　(4) b_1,b_2,b_3 為等差數列

✓(5) c_1,c_2,c_3 為等差數列

Sol：◎ n次方 ⇒ 找規律

$$\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3\\0&4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}1&3\\0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&7\\0&8\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}^4=\begin{bmatrix}1&7\\0&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&15\\0&16\end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}1&2^n-1\\0&2^n\end{bmatrix}$$

Ex14：已知二階方陣 $A=\begin{bmatrix}3&3\\-1&-1\end{bmatrix}$，試求 $A+A^2+A^3+\cdots+A^9$。

Sol：

$$A^2=\begin{bmatrix}3&3\\-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&3\\-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&6\\-2&-2\end{bmatrix}=2A$$

$$A^3=(2A)\cdot A=2A^2=2(2A)=4A$$

$$\vdots$$

$$A^n=2^{n-1}\cdot A$$

$$\Rightarrow A+A^2+A^3+\cdots+A^9$$

$$=A+2A+4A+\cdots+256A$$

$$=511A=\begin{bmatrix}1533&1533\\-511&-511\end{bmatrix}$$ #

5、轉移矩陣：

n階方陣 A 滿足下列二條件：

① $a_{ij} \geq 0$（每個元均 非負 ）

② $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$（每直行和均為 1 ）

，則 A 稱為轉移矩陣。

6、轉移矩陣的應用：

設一個試驗有 S_1, S_2, S_3 三種不同狀態，且初始狀態 $S_1、S_2、S_3$ 的機率分別為 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$；而由狀態 $S_j \to S_i$ 的機率為 P_{ij}，則

$$\text{轉移矩陣 } A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & S_3\ (\text{原}) \end{array} \\ \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ (\text{新}) \end{array}, \quad \text{起始矩陣 } X_0 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array}$$

① 經過 n 次變換後 S_1, S_2, S_3 的機率矩陣 $X_n =$ $A^n X_0$

② 長期而言，S_1, S_2, S_3 的機率會呈現穩定，矩陣 $X =$ AX

Ex15：已知 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 是一個轉移矩陣，並且其行列式(值)為 $\frac{5}{8}$，求 $a+d$。

Sol：$\begin{cases} a+c=1 \Rightarrow c=1-a \\ b+d=1 \Rightarrow b=1-d \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} a & 1-d \\ 1-a & d \end{vmatrix} = \frac{5}{8}$$

$\Rightarrow ad-(1-a)(1-d) = \frac{5}{8}$

$\Rightarrow ad-1+a+d-ad = \frac{5}{8}$

$\Rightarrow a+d = \frac{13}{8}$ #

Ex16：所謂「轉移矩陣」必須滿足下列兩條件

(甲) 該矩陣的每個位置都是非負實數

(乙) 該矩陣的每行的數字相加都等於 1

以 2×2 矩陣為例，$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.8 & 0.7 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 0.9 & 0.6 \\ 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$

滿足(甲)(乙)兩條件，都是轉移矩陣。

設 A, B 都是 n×n 的轉移矩陣，則下列哪些矩陣也是轉移矩陣。

✓(1) A^2 ✓(2) AB ✓(3) $\frac{1}{2}(A+B)$ (4) $\frac{1}{4}(A^2+B^2)$

Sol：

$\frac{1}{2}(A^2+B^2)$ 才是轉移矩陣。

Ex17：某縣政府每週五對全縣居民發放甲乙兩種彩券，每位居民均可憑身分証免費選擇領取甲券一張或乙券一張。根據長期統計，上週選擇甲券的民眾會有85%在本週維持選擇甲券；15%改選乙券；而選擇乙券的民眾會有35%在本週改選甲券；65%維持乙券。所謂穩定狀態，係指領取甲券和乙券的民眾比例在每週均保持不變。試問領取甲券和乙券民眾各占全縣居民百分比多少時，會形成穩定狀態。

Sol：[法一]

$$\begin{array}{cc} & \text{甲} \quad \text{乙 (原)} \\ \begin{array}{c}\text{甲}\\ \text{乙 (新)}\end{array} & \begin{bmatrix} 0.85 & 0.35 \\ 0.15 & 0.65 \end{bmatrix} \end{array}$$

設穩定狀態甲券佔 x
乙券佔 $(1-x)$

$$\begin{bmatrix} 0.85 & 0.35 \\ 0.15 & 0.65 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix}$$

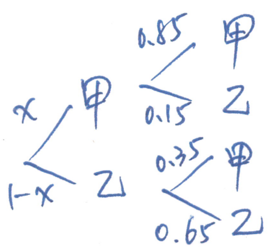
$\Rightarrow 0.85x+0.35-0.35x=x$

$\Rightarrow 0.5x=0.35 \Rightarrow x=0.7=70\%$

甲券：70%

乙券：30%

[法二]



甲：$0.85x+0.35(1-x)=x$

Ex18：設有A、B兩支大瓶子，開始時，A瓶裝有a公升酒精，B瓶裝有b公升的礦泉水。每一輪操作都是都是先將A瓶的溶液倒出一半到B瓶，然後再將B瓶的溶液倒出一半到A瓶。(不考慮酒精與水混合後體積的縮小) 設n輪操作後，A瓶有a_n公升的溶液，B瓶有b_n公升的溶液。已知二階方陣 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 滿足 $\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^n\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

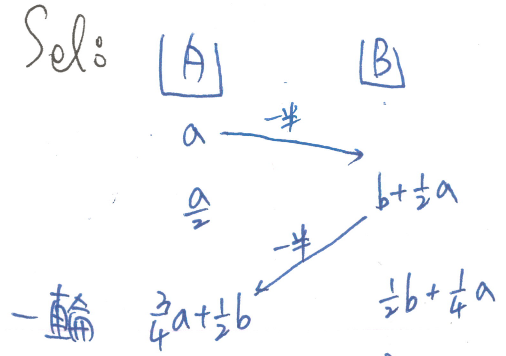
(1) 求二階方陣 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

(2) 當 $a=\frac{2}{3}$，$b=\frac{1}{3}$ 時，求 a_{100} 及 b_{100}。

(3) 當 $a=\frac{2}{3}$，$b=\frac{1}{3}$ 時，在第二輪操作後，A瓶的溶液有百分之多少的酒精？

Sol：

(1)



$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3}{4}a+\frac{1}{2}b \\ \frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b \end{bmatrix}\underline{\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}} \#$$

(2) $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{8}{12} \\ \frac{4}{12} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^n\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ $\therefore a_{100}=\frac{2}{3}$，$b_{100}=\frac{1}{3}$

(3) 二輪後，A溶液有 $\frac{2}{3}$公升

酒精 $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^2\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{4} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{11}{24} \\ \frac{5}{24} \end{bmatrix}$

$\therefore$ 二輪後，A溶液有 $\frac{11}{24}$ 公升酒精

$\therefore \dfrac{\frac{11}{24}}{\frac{2}{3}}=\frac{11}{16}=0.6875=68.75\%$