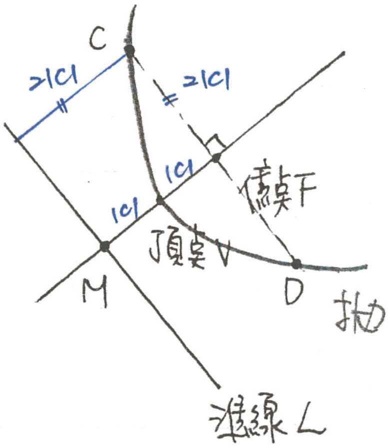
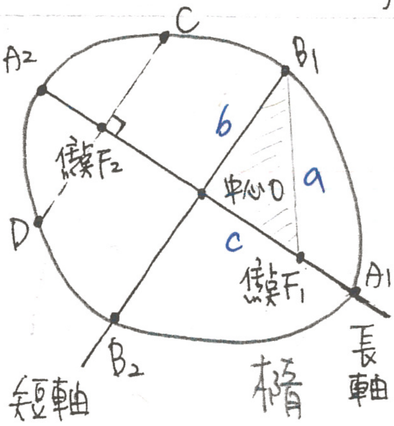
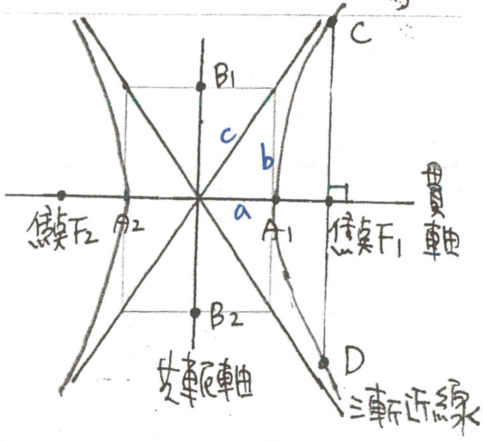
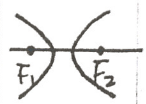
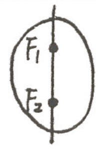
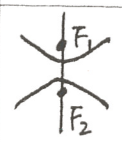
二次曲線

1. 定義及方程式：

	拋物線	橢圓	雙曲線
定義	給定焦點F、準線L，滿足 $\overline{PF}=d(P,L)$、$F\notin L$ 的動點P所成軌跡圖形	給定兩焦點F_1,F_2、定值$2a$，滿足 $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$、$\overline{F_1F_2}<2a$ 的動點P所成軌跡圖形	給定兩焦點F_1,F_2、定值$2a$，滿足 $\lvert\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\rvert=2a$、$\overline{F_1F_2}>2a$ 的動點P所成軌跡圖形
圖形及諸元			
	① 焦距 $\overline{VF}=\lvert c\rvert$ ② 正焦弦長 $\overline{CD}=4\lvert c\rvert$ ③ 頂點 $V=\frac{M+F}{2}$ (M為軸和準線之交點)	① 長軸長 $\overline{A_1A_2}=2a$ 短軸長 $\overline{B_1B_2}=2b$ 焦距 $\overline{F_1F_2}=2c$ ⇒ $a^2=b^2+c^2$ ② 正焦弦長 $\overline{CD}=\frac{2b^2}{a}$ ③ 頂點：A_1,A_2,B_1,B_2	① 貫軸長 $\overline{A_1A_2}=2a$ 共軛軸長 $\overline{B_1B_2}=2b$ 焦距 $\overline{F_1F_2}=2c$ ⇒ $c^2=a^2+b^2$ ② 正焦弦長 $\overline{CD}=\frac{2b^2}{a}$ ③ 頂點：A_1,A_2
標準式	三要素：①方向 ②頂點(h,k) ③c ($c>0$⇒上右；$c<0$⇒下左)	三要素：①方向 ②中心(h,k) ③a,b,c ($a^2=b^2+c^2$)	三要素：①方向 ②中心(h,k) ③a,b,c ($c^2=a^2+b^2$)

	拋物線 圖示	拋物線 方程式	橢圓 圖示	橢圓 方程式	雙曲線 圖示	雙曲線 方程式
左右		$(y-k)^2=4c(x-h)$		$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$		$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$
上下		$(x-h)^2=4c(y-k)$		$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$		$-\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

※焦點連線(長軸)決定方向　　※焦點連線(貫軸)決定方向

Ex 1：求諸元

(1) $y=x^2-6x+6$，求：頂點、焦點、焦距、軸。

Sol：
$y=(x-3)^2-3$

$(x-3)^2=4\cdot\frac{1}{4}(y+3)$

① 上 ② $V(3,-3)$ ③ $c=\frac{1}{4}$

頂 $(3,-3)$

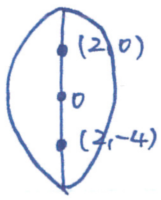
焦 $(3,-\frac{11}{4})$

$|c|=\frac{1}{4}$

軸：$x=3$

(2) $\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y+4)^2}=10$，求：中心、焦點、長軸、短軸、頂點。

Sol：$2a=10$，焦 $(2,0),(2,-4)$



中心 $(2,-2)$

焦點 $(2,0)$ or $(2,-4)$

長軸：$x=2$ $(2a=10)$

短軸：$y=-2$ $(2b=2\sqrt{21})$

$2c=4\Rightarrow b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{21}$

頂點 $(2,-2\pm5)$

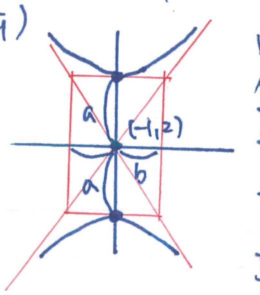
$(2\pm\sqrt{21},-2)$

(3) $4x^2-y^2+8x+4y+4=0$，求：中心、焦點、貫軸、共軛軸、頂點。

Sol：$4x^2+8x-(y^2-4y)=-4$

$4(x+1)^2-(y-2)^2=-4+4\cdot1^2-2^2=-4$

$-\frac{(x+1)^2}{1}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$　　$a=2$，$b=1$，$c=\sqrt{3}$



中心 $(-1,2)$

焦點 $(-1,2\pm\sqrt{3})$

貫軸：$x=-1$ (4)

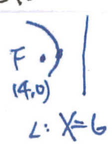
共軛軸：$y=2$ (2)

頂點 $(-1,2\pm2)$

Ex 2：求方程式

(1) 拋物線焦點 $(4,0)$，準線 $x=6$。

Sol：① 左 ② $V(5,0)$ ③ $c=-1$



$y^2=4(-1)(x-5)$

$y^2=-4(x-5)$ #

(2) 拋物線的軸垂直 y 軸，且過點 $(0,1)$、$(4,2)$、$(36,-2)$。

Sol：過三點假設法（一般式）

$\begin{cases}\text{左右}\Rightarrow x=ay^2+by+c\\ \text{上下}\Rightarrow y=ax^2+bx+c\end{cases}$

y 軸 ⇒ 左右

設 $x=ay^2+by+c$

$0=a+b+c\cdots①$

$4=4a+2b+c\cdots②$

$36=4a-2b+c\cdots③$

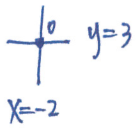
②－③ ⇒ $4b=-32\Rightarrow b=-8$

$\begin{cases}a+c=8\\4a+c=20\end{cases}$　$\therefore a=4$，$c=4$

$x=4y^2-8y+4$ #

(3) 橢圓長軸 $x=-2$，短軸 $y=3$，長軸長是短軸長的 $\frac{5}{3}$ 倍，且兩焦點的距離為 16。

Sol：① 上下 ② $O(-2,3)$ ③ $a=\frac{5}{3}b$，$c=8$



$a^2=b^2+c^2$

$\therefore a=10$，$b=6$

$\frac{(x+2)^2}{36}+\frac{(y-3)^2}{100}=1$ #

(4) 橢圓與 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{2}=1$ 共焦點，且短軸長為 6。

Sol：共焦點 ⇒ 同方向、中心、c 值

$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{2}=1\Rightarrow$ ① 左右 ② 中心 $(0,0)$ ③ $c=\sqrt{3}$

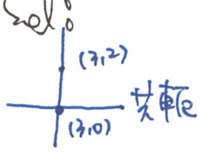
∴ 所求橢圓

① 左右 ② 中心 $(0,0)$ ③ $b=3$，$c=\sqrt{3}\Rightarrow a=\sqrt{12}$

$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$ #

(5) 雙曲線的共軛軸為 x 軸，一焦點 $(3,2)$，且過點 $(6,2)$。

Sol：① 上下 ② $O(3,0)$ ③ $c=2$，$c^2=a^2+b^2$



貫軸 $-\frac{(x-3)^2}{b^2}+\frac{y^2}{4-b^2}=1$　　$\therefore b^2=3$ or 12 (不合)

$(6,2)$ 代入 $\Rightarrow -\frac{9}{b^2}+\frac{4}{4-b^2}=1$

$\therefore b^2(4-b^2)=-9(4-b^2)+4b^2$　　$-\frac{(x-3)^2}{3}+\frac{y^2}{1}=1$ #

$(b^2)^2+9b^2-36=0$

$(b^2+12)(b^2-3)=0$

(6) 雙曲線與 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 共焦點，且過點 $(3,\sqrt{2})$。

Sol：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1\Rightarrow$ ① 左右 ② 中心 $(0,0)$ ③ $a=3$，$b=\sqrt{5}$ $\Rightarrow c=2$

所求雙曲線：① 左右 ② 中心 $(0,0)$ ③ $c=2$ $(c^2=a^2+b^2)$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4-a^2}=1$　　$\therefore a^2=12$ or 3 (不合)

$(3,\sqrt{2})$ 代入 $\Rightarrow \frac{9}{a^2}-\frac{2}{4-a^2}=1$

$9(4-a^2)-2a^2=a^2(4-a^2)$　　$\Rightarrow \frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{1}=1$ #

$36-9a^2-2a^2=4a^2-(a^2)^2$

$(a^2)^2-15a^2+36=0$

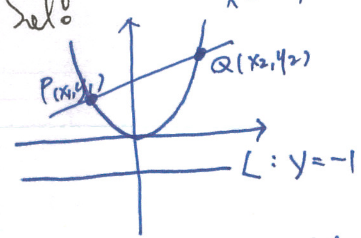
$(a^2-3)(a^2-12)=0$

Ex3：看到 $\overline{PF}$ ⇒ 定義式
（或 $d(P,L)$）

(1) 設直線 $L: y=x+2$ 和拋物線 $\Gamma: x^2=4y$ 相交於 P、Q 二點。若 F 表示拋物線 Γ 的焦點。求 $\overline{PF}+\overline{QF}$ 之值。

Sol：

$x^2=4y \Rightarrow c=1$



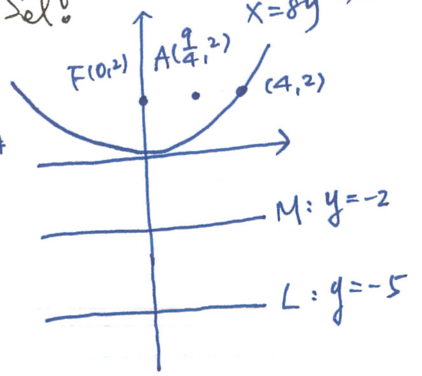
$\overline{PF}+\overline{QF}$
$=d(P,L)+d(Q,L)$
$=(y_1+1)+(y_2+1)=\underline{10}$ #
$(\because y_1+y_2=8)$

$P,Q \begin{cases} y=x+2 \\ x^2=4y \end{cases} \Rightarrow (y-2)^2=4y$
$y^2-4y+4=4y$
$y^2-8y+4=0$

(2) 定點 $A(\frac{9}{4},2)$、直線 $L: y=-5$ 與拋物線 $\Gamma: x^2=8y$。若 P 在 Γ 上變動，求 $|d(P,L)-\overline{AP}|$ 之最大值。

Sol：

$x^2=8y \Rightarrow c=2$

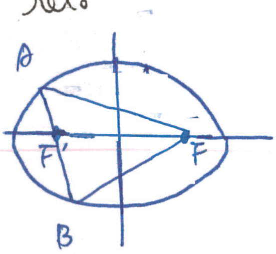


$|d(P,L)-\overline{AP}|$
$=|\overline{PF}+3-\overline{AP}|$
$\geq |\overline{AF}+3|$
$=\underline{\frac{21}{4}}$ #

(3) 橢圓 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 中，兩焦點 F、F'，已知 $\overline{AB}$ 為過 F' 之焦弦，求 $\triangle ABF$ 之周長。

Sol：

$a=5,\ b=4 \Rightarrow c=3$



$\triangle ABF=(\overline{AF'}+\overline{AF})+(\overline{BF'}+\overline{BF})$
$=2a+2a$
$=20$

(4) 有一橢圓和雙曲線有共同焦點 F_1、F_2，且雙曲線的貫軸長和橢圓的短軸長相等。設 P 為橢圓和雙曲線的一個交點，且 $\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}=64$，求 $\overline{F_1F_2}$ 之值。

Sol：設橢圓長軸長 $=2a$ ⇒ 雙曲線 貫軸長 $=2b$
短軸長 $=2b$
焦距 $\overline{F_1F_2}=2c$　　焦距 $=2c$

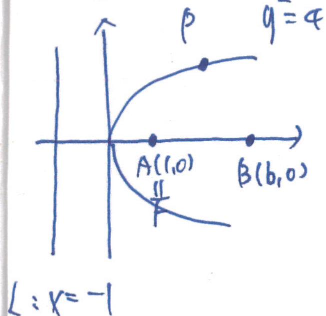
$\because$ P 在橢圓上 ⇒ $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$
雙曲線 ⇒ $|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=2b$

$\Rightarrow \begin{cases} \overline{PF_1}^2+2\overline{PF_1}\,\overline{PF_2}+\overline{PF_2}^2=4a^2 \cdots ① \\ \overline{PF_1}^2-2\overline{PF_1}\,\overline{PF_2}+\overline{PF_2}^2=4b^2 \cdots ② \end{cases}$

① − ② ⇒ $4\overline{PF_1}\,\overline{PF_2}=4(a^2-b^2)$
$\therefore 64=c^2 \Rightarrow c=8$
$\underline{2c=16}$ #

Ex4：$A(1,0)$、$B(b,0)$ 為平面上兩點，且 $b>1$。拋物線 $\Gamma: y^2=4x$ 上有一點 P 使得 $\triangle ABP$ 為正三角形，求 b 值。

Sol：

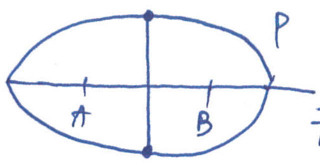


$\overline{PA}=d(P,L)=b-1$
$\therefore P$ 點 x 坐標 $b-2$
又 P 點 x 坐標為 A、B 中點
$\therefore b-2=\frac{b+1}{2}$
$2b-4=b+1 \Rightarrow \underline{b=5}$ #

Ex5：$A(1,3)$ 與 $B(5,6)$ 為平面上兩點，考慮 $S=\{P \mid \triangle PAB$ 面積為 10 且周長為 15$\}$，則下列何者正確？

(1) S 為空集合　(2) S 恰含 2 個點　(3) S 恰含 4 個點 ✓
(4) S 為二線段之聯集　(5) S 為二直線之聯集。

Sol：$\because \overline{AB}=\sqrt{4^2+3^2}=5$
又周長 $=15 \Rightarrow \overline{PA}+\overline{PB}=10$（橢圓）



$\left.\begin{aligned} 2a&=10, \\ 2c&=5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow b=\frac{5}{2}\sqrt{3}=\frac{\sqrt{75}}{2}\approx 4.\cdots$

若 $\triangle PAB$ 面積 $=10$
⇒ 高 $=4$

Ex6: P為橢圓 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 上一點，$A(-4,0)$，$B(0,-3)$ 分別為橢圓長軸及短軸上一頂點，求 $\triangle PAB$ 面積的最大值。

Sol: 設 $P(a,b) \Rightarrow \frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{9}=1$

$\triangle ABP$ 面積 $=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a+4 & b \\ 4 & -3 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|-3a-12-4b|$

$\overrightarrow{AP}=(a+4,b)$

$\overrightarrow{AB}=(4,-3)$

$=\frac{1}{2}|3a+4b+12| \le 6\sqrt{2}+6$ #

$\left(\left(\frac{a}{4}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^2\right)(12^2+12^2) \ge (3a+4b)^2$

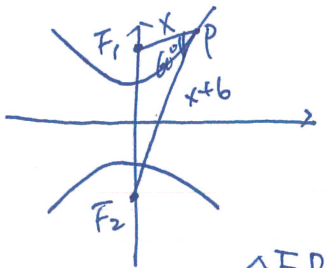
$\therefore |3a+4b| \le 12\sqrt{2}$

Ex7: P為雙曲線 $-\frac{x^2}{28}+\frac{y^2}{9}=1$ 上一點，F_1、F_2 為雙曲線的二個焦點，且 $\angle F_1PF_2=60^\circ$，求 $\triangle F_1PF_2$ 之面積。

Sol: $a=9 \Rightarrow c=\sqrt{37}$

$b=\sqrt{28}$

$\overline{PF_1}-\overline{PF_2}=6$



$\cos 60^\circ = \frac{x^2+(x+6)^2-(2\sqrt{37})^2}{2\cdot x(x+6)}$

$\therefore x^2+6x = x^2+x^2+12x+36-148$

$\therefore x^2+6x-112=0$

$(x+14)(x-8)=0$

$\therefore x=8$

$\triangle F_1PF_2=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 14\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=28\sqrt{3}$ #

2、雙曲線的漸近線：必過 中心

(1) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的漸近線為 $\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=1$ ⇒ 漸近線斜率 $m=\pm\frac{b}{a}$。(左右)

$-\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ 的漸近線為 $\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=1$ ⇒ 漸近線斜率 $m=\pm\frac{a}{b}$。(上下)

(2) 設雙曲線 Γ 的二漸近線為 $L_1=0$ 和 $L_2=0$，則雙曲線方程式為 $L_1\times L_2=k$。

3、特殊雙曲線

(1) 等軸雙曲線：① 定義：貫軸長 = 共軛軸長

② 性質：兩漸近線 互相垂直。

③ 若軸平行坐標軸(標準式) ⇒ 漸近線斜率 = ± 1。

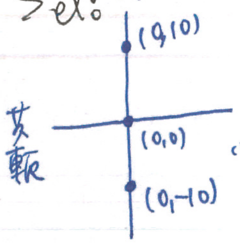
(2) 共軛雙曲線：① 定義：雙曲線 Γ 之貫軸、共軛軸分別為雙曲線 Γ' 之共軛軸、貫軸，則 Γ 和 Γ' 互為共軛雙曲線。

② 性質：同中心、漸近線、四個焦點共圓。

③ 方程式：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \xleftrightarrow[\text{雙曲線}]{\text{共軛}} \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$

Exp: 設 y軸為雙曲線Γ的貫軸，且Γ中心(0,0)，焦點(0,±10)，漸近線斜率為±$\frac{3}{4}$，求雙曲線(1)及漸近線(2)方程式。

Sol: 貫



① 上下 ② 中心(0,0) ③ $c=10$, $\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$

$\therefore a=6,\ b=8$

(1) 雙曲線：$-\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$

(2) 漸：$\frac{x}{8}\pm\frac{y}{6}=0$

Exp: 等軸雙曲線Γ的中心(2,-1)，一漸近線 $x+y-1=0$ 且過點(4,-2)，求(1)Γ的方程式 (2)Γ的共軛雙曲線。

Sol: ∵ 等軸雙曲線 ∴ 漸近線互相垂直

⇒ 另一漸近線：$x-y\overset{(2,-1)}{=\!=}3$

(1) Γ：$(x+y-1)(x-y-3)\overset{(4,-2)}{=\!=}3$

(2) 共軛雙曲線：$(x+y-1)(x-y-3)=-3$

4、二元二次方程式的討論

$$ax^2+cy^2+dx+ey+f=0 \underset{乘開}{\overset{配方}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases}\frac{(x-h)^2}{A}+\frac{(y-k)^2}{B}=1\\ \frac{(x-h)^2}{A}+\frac{(y-k)^2}{B}=0\end{cases}$$

case 1：$\frac{(x-h)^2}{A}+\frac{(y-k)^2}{B}=1$

① $A=B>0$ ⟺ 圓（圓心 (h,k)，半徑 $\sqrt{A}$）

② $A>0, B>0, A\neq B$ ⟺ 橢圓

- $A>B>0$ ⟺ 左右橢
- $B>A>0$ ⟺ 上下橢

③ $A\times B<0$ ⟺ 雙曲線

- $A>0, B<0$ ⟺ 左右雙
- $A<0, B>0$ ⟺ 上下雙

④ $A<0, B<0$ ⟺ 無圖形

case 2：$\frac{(x-h)^2}{A}+\frac{(y-k)^2}{B}=0$

① $A\times B>0$ ⟺ 點(0,0)

② $A\times B<0$ ⟺ 兩直線 $\frac{x-h}{\sqrt{|A|}}\pm\frac{y-k}{\sqrt{|B|}}=0$

Ex10：方程式 $\left(\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}\right)\left(\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}\right)=0$，

的点(x,y)所構成的圖形為何？

(1)只有原点　(2)橢圓及原点　✓(3)二相異直線

(4)橢圓及雙曲線　(5)雙曲線及原点

Sol：$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=0$ 或 $\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}=0$

$\Rightarrow$ 点(0,0) 或二直線 $\frac{x}{3}\pm\frac{y}{4}=0$

(包含(0,0))

Ex11：雙曲線 $\frac{x^2}{k^2-50}+\frac{y^2}{k+2}=1$ 和 $\frac{x^2}{55}+\frac{y^2}{77}=1$ 共焦点，求k值。

Sol：∵共焦点 ⇒ 共中心 (0,0)，同方向 (上下)，共c值 ($c=\sqrt{22}$)

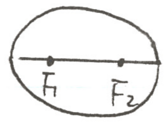
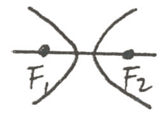
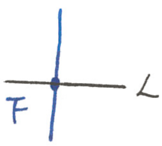
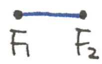
∴上下雙 ⇒ $\begin{cases} k+2>0 \\ k^2-50<0 \end{cases}$

∵雙：$a^2=k+2,\ b^2=50-k^2$

又 $c^2=a^2+b^2=-k^2+k+52=22$

∴ $k^2-k-30=0 \Rightarrow k=6$ or -5 (不合)

5、定義式的退化：

	拋	橢	雙
定義	① $PF=d(P,L)$ ② $F\notin L$ ⇒ 	① $PF_1+PF_2=2a$ ② $2a>2c$ ⇒ 	① $\lvert PF_1-PF_2\rvert=2a$ ② $2a<2c$ ⇒ 
退化	① $PF=d(P,L)$ ② $F\in L$ ⇒ 	① $PF_1+PF_2=2a$ ② $2a=2c$ ⇒ 	① $\lvert PF_1-PF_2\rvert=2a$ ② $2a=2c$ ⇒ 
	P所成軌跡為一直線。	P所成軌跡為一線段。	P所成軌跡為兩射線。
		① $PF_1+PF_2=2a$ ② $2a<2c$ ⇒ 無圖形	① $\lvert PF_1-PF_2\rvert=2a$ ② $2a>2c$ ⇒ 無圖形

Ex12：平面上二点 F_1,F_2 滿足 $\overline{F_1F_2}=4$。

Γ表示 $\lvert PF_1-PF_2\rvert=d$ 的所有P点所成的圖形。設C表示以 F_1 為圓心，6為半徑的圓。試問下列那些正確？

✓(1) d=0時，Γ為直線

✓(2) d=1時，Γ為雙曲線

(3) d=2時，Γ與圓C交於二点

(4) d=4時，Γ與圓C交於四点

✓(5) d=8時，Γ不存在

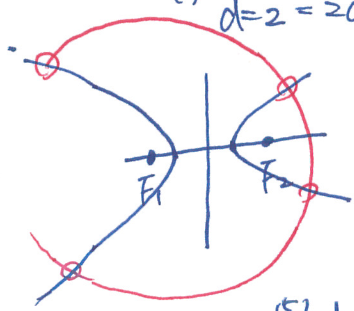
Sol：(1) $\lvert PF_1-PF_2\rvert=0 \Rightarrow PF_1=PF_2$

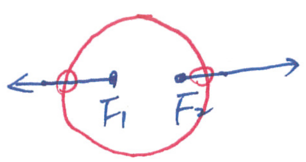
P表示 $\overline{F_1F_2}$ 的中垂線

(2) $d=1=2a<2c=4 \Rightarrow$ 雙曲線

(3) $d=2=2a \Rightarrow$ 如下圖，4個交点

(4) $d=4=2a=2c \Rightarrow$ 如圖，2個交点



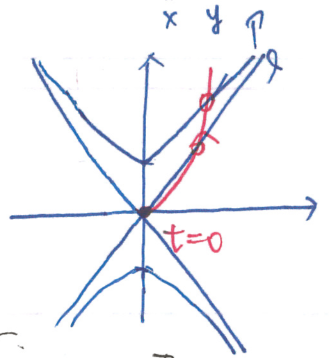


(5) $d=8=2a>2c \Rightarrow$ 無圖形

Ex13: Γ: $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ 為一雙曲線，且Γ的第一象限的漸近線為 ℓ。考慮動點 (t,t^2)，從時間 $t=0$ 時出發。當 $t>0$ 時，請選正確選項。

(1) 此動點不會碰到Γ，也不會碰到ℓ。
(2) 此動點會碰到Γ，但不會碰到ℓ。
(3) 此動點會碰到ℓ，但不會碰到Γ。
(4) 此動點會先碰到Γ，再碰到ℓ。
✓(5) 此動點會先碰到ℓ，再碰到Γ。

Sol: $(t, t^2) \Rightarrow y=x^2$ 的點參數式
$\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\; x \;\;\; y$



雙: ① 上下 ② 中心 $(0,0)$
↳ 圖形像 = 右邊

(5)#

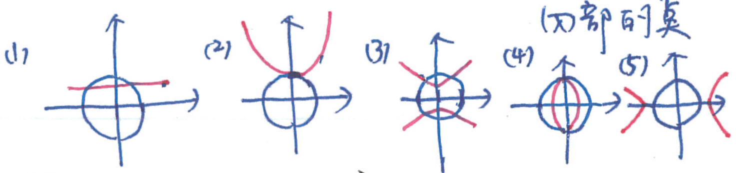
Ex14: 考慮二點 $Q_1(1,0)$, $Q_2(-1,0)$，在下列各方程式的圖形中，請選出其上至少有一點 P 滿足 $\overrightarrow{PQ_1}\cdot\overrightarrow{PQ_2}<0$ 的選項。

✓(1) $y=\frac{1}{2}$ (2) $y=x^2+1$ ✓(3) $-x^2+2y^2=1$
✓(4) $4x^2+y^2=1$ (5) $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$

Sol: [想法一] $\overrightarrow{PQ_1}\cdot\overrightarrow{PQ_2}=0 \Rightarrow \overrightarrow{PQ_1}\perp\overrightarrow{PQ_2}$
$\overrightarrow{PQ_1}\cdot\overrightarrow{PQ_2}<0 \Rightarrow \angle Q_1PQ_2>90^\circ$

[想法二] 設 $P(x,y)$
$\Rightarrow (1-x,-y)\cdot(-1-x,-y)<0$
$\Rightarrow x^2-1+y^2<0 \Rightarrow x^2+y^2<1$

可由[想法一] or [想法二]得知 P 表示單位圓(內)部的點



Ex15: 軌跡問題 ⇒ ① 設動點 $P(x,y)$ ② 依題目條件列式，寫出 x, y 的關係式

(1) 設一動圓與直線 $L: x=0$ 相切；與 $(x-2)^2+y^2=1$ 外切，求此動圓的圓心軌跡方程式。

Sol: 設動圓圓心 $P(x,y)$，半徑 r

外切: $\overline{PO}=r+1$ $\;\;(O(2,0))$

相切: $d(P,L)=r$

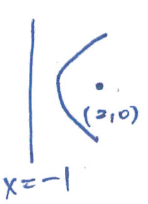
設 $M: x=-1$

$\Rightarrow d(P,M)=r+1$

$\therefore \overline{PO}=d(P,M)$

以 $(2,0)$ 為焦點，$x=-1$ 為準線

① 右 ② $V(\frac{1}{2},0)$ ③ $c=\frac{3}{2}$



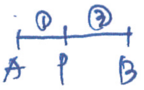
$y^2=4(\frac{3}{2})(x-\frac{1}{2})$

$y^2=6x-3$

(2) 設 A 是 x 軸上動點，B 是 y 軸上動點，且 $\overline{AB}$ 長為定值 8。又 P 在 $\overline{AB}$ 上且 $\overline{PA}=2$，求動點 P 所成之軌跡方程式。

Sol: 設 $A(a,0)$
$B(0,b)$

$\overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2}=8 \;\cdots(*)$



$P=\frac{B+3A}{4}$

$(x,y)=(\frac{3}{4}a,\frac{1}{4}b)$

代入(*)

$(\frac{4}{3}x)^2+(4y)^2=8^2$

$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$ #

(3) 給定一點 $F(3,0)$，及一直線 $x=0$，動點 P 滿足 $\overline{PF}=2\cdot d(P,L)$，求該動點 P 所求之軌跡方程式。

Sol: 設 $P(x,y)$

$\sqrt{(x-3)^2+y^2}=2\frac{|x|}{\sqrt{1}}$

$x^2-6x+9+y^2=4x^2$

$\Rightarrow 3x^2+6x-y^2=9$

$\Rightarrow 3(x+1)^2-y^2=9+3$

$\Rightarrow \frac{(x+1)^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$