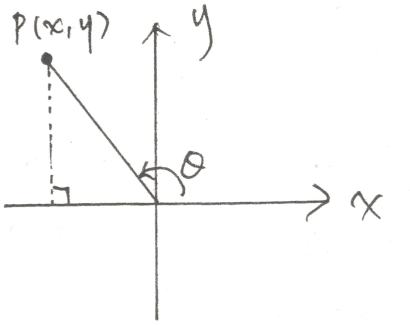
三角函數

1、定義：設 $P(x,y)$ 為標準位置角 θ 終邊上一點

正弦 $\sin\theta=\frac{y}{r}$　餘割 $\csc\theta=\frac{r}{y}$

餘弦 $\cos\theta=\frac{x}{r}$　正割 $\sec\theta=\frac{r}{x}$

正切 $\tan\theta=\frac{y}{x}$　餘切 $\cot\theta=\frac{x}{y}$



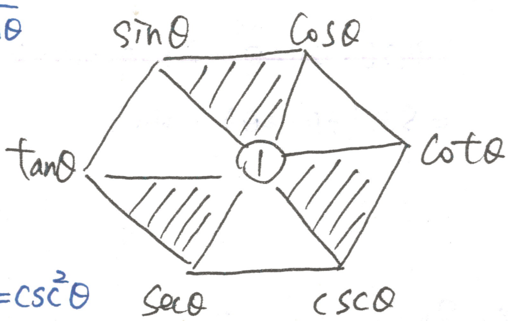
※定義 $r=\sqrt{x^2+y^2}>0$

2、三角函數的性質：

(1) 倒數關係：$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$、$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$，$\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}$

(2) 商數關係：$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

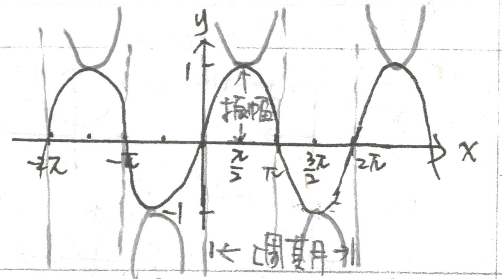
(3) 平方關係：$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$，$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

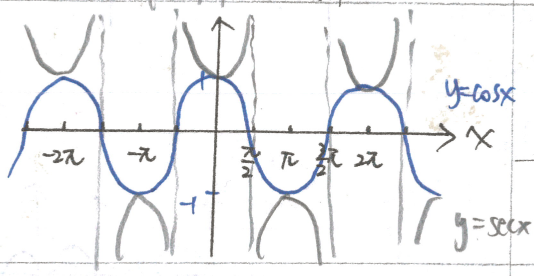


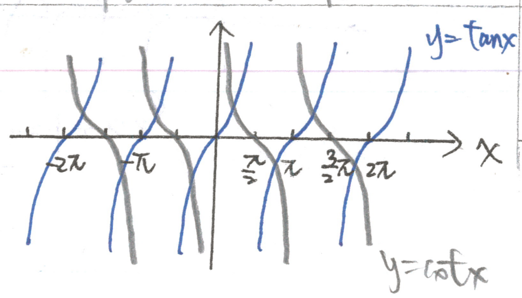
(③倒三角形：上面平方和等於下面平方)

(①②連續三項：兩邊相乘等於中間)

3、三角函數的圖形







鉛直線（極值點）與 x 軸之交點

	週期	振幅	定義域	值域	對稱軸	對稱中心
$y=\sin x$	2π	1	$x\in\mathbb{R}$	$-1\le y\le 1$	$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$	$(k\pi,0)$
$(y=\csc x)$	2π	X	$x\neq k\pi$	$y\ge 1$ or $y\le -1$	$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$	$(k\pi,0)$
$y=\cos x$	2π	1	$x\in\mathbb{R}$	$-1\le y\le 1$	$x=k\pi$	$(\frac{\pi}{2}+k\pi,0)$
$(y=\sec x)$	2π	X	$x\neq\frac{k}{2}+k\pi$	$y\ge 1$ or $y\le -1$	$x=k\pi$	$(\frac{\pi}{2}+k\pi,0)$
$y=\tan x$	π	X	$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$	$y\in\mathbb{R}$	X	$(k\pi,0)$
$(y=\cot x)$	π	X	$x\neq k\pi$	$y\in\mathbb{R}$	X	$(\frac{\pi}{2}+k\pi,0)$

4、函數的伸縮平移：$y=aF(bx+c)+d$，其中F表示sin、cos x、tan、等.

$$y=F(x)\xrightarrow[\text{水平}]{x\to\frac{x}{b}}y=F(bx)\xrightarrow[\text{鉛直}]{y\to\frac{y}{a}}y=aF(bx)\xrightarrow[\text{水平}]{x\to x+\frac{c}{b}}y=aF(\underbrace{bx+c}_{b(x+\frac{c}{b})})\xrightarrow[\text{鉛直}]{y\to y-d}y=aF(bx+c)+d$$

伸縮 $\frac{1}{b}$ 倍（週期 $\frac{1}{b}$ 倍）　伸縮 a 倍（振幅 a 倍）　平移 $\frac{-c}{b}$（向左 $\frac{c}{b}$）　平移 d（向上 d）

Ex1：$\frac{\sin3\theta}{\sec2\theta}-\frac{\cos3\theta}{\csc2\theta}$ 可化簡為

(1) $\sin\theta$ (2) $\cos\theta$ (3) $\tan\theta$ (4) $\cot\theta$

Sol：

$\sin3\theta\cdot\cos2\theta-\cos3\theta\cdot\sin2\theta$

$=\sin(3\theta-2\theta)=\sin\theta$

Ex2：設 $0\le\theta<2\pi$，且方程式 $x^2-a=0$ 之兩根恰為 $\sin\theta$ 與 $\cos\theta$，請選出正確選項。

(1) $\tan\theta=1$ (2) $\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=0$ (3) $\sin2\theta=-1$

(4) $a=\frac{1}{2}$ (5) 滿足題設的 θ 只有1個

Sol：$\because x=\pm\sqrt{a}$

$\therefore \sin\theta=-\cos\theta$

(1) $\therefore \tan\theta=-1$

$\Rightarrow \theta=135^\circ$ or 315°

(2) $\sin(\theta+45^\circ)$

$=\sin180^\circ=\sin360^\circ=0$

(3) $\sin2\theta=\sin270^\circ$

$=\sin630^\circ=-1$

(4) $a=(\sin135^\circ)^2=\frac{1}{2}$

(5) 2解

(2)(3)(4) #

Ex3：設 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$，有關函數 $f(x)=\cos x+\frac{4}{\cos x}$ 的敘述，何者正確？

(1) $f(x)=f(-x)$ (2) $f(x)\ge4$

(3) $f(x)$的最小值是4 (4) $f(x)$有最大值

Sol：(1) $f(-x)=\cos(-x)+\frac{4}{\cos(-x)}=\cos x+\frac{4}{\cos x}=f(x)$

(2) $\frac{\cos x+\frac{4}{\cos x}}{2}\ge\sqrt{(\cos x)(\frac{4}{\cos x})}\Rightarrow\cos x+\frac{4}{\cos x}\ge4$

$\because x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ $\therefore \cos x>0$

(3) 若"="成立

$\cos x=\frac{4}{\cos x}\Rightarrow\cos x=\pm2$（不合）

(4) $x\to\frac{\pi}{2}$，$\cos x\to0$，$\frac{4}{\cos x}\to\infty$ (×)

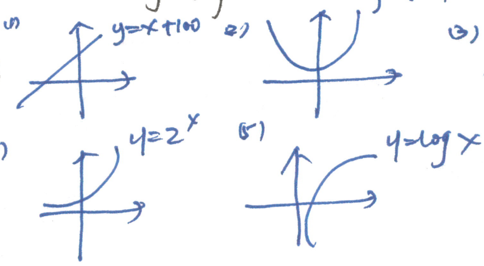
(1)(2) #

Ex4：下列哪些選項中的函數圖形完全落在x軸的上方？

(1) $y=x+100$ (2) $y=x^2+1$ (3) $y=2+\sin x$

(4) $y=2^x$ (5) $y=\log x$

Sol：



(3) $\sin x\ge-1$

$2+\sin x\ge1$

(2)(3)(4) #

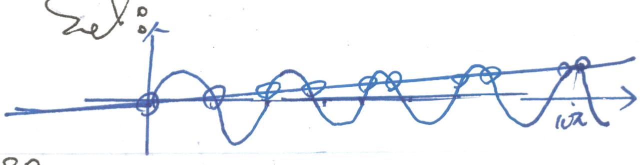
Ex5：坐標平面上 $y=\sin x$ 的圖形和 $y=\frac{x}{10\pi}$ 的圖形之交點個數，下列哪一個選項是正確的？

(1) 交點個數是無窮多 (2) 交點個數是奇數且大於20

(3) 交點個數是奇數且小於20 (4) 交點個數是偶數且大於或等於20

(5) 交點個數是偶數且小於20

Sol：



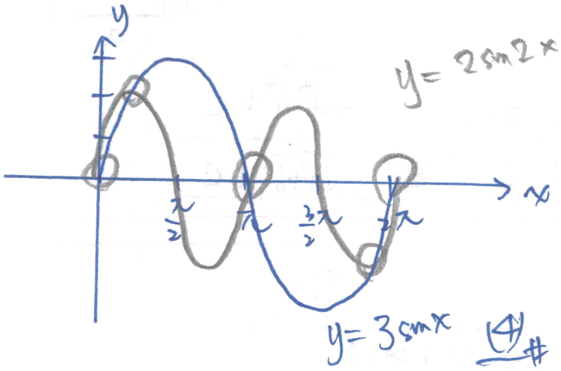
$9\times2+1=19$

(3) #

Ex6：在 $0\le x\le 2\pi$ 的範圍中，$y=3\sin x$ 的圖形和 $y=2\sin 2x$ 的圖形有幾個交點？

(1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 5 (5) 6

Sol：



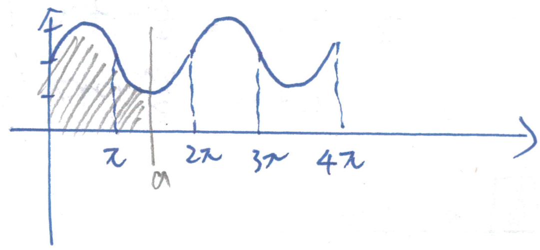
(4)#

Ex7：設 $a>0$，令 $A(a)$ 表示 x軸，y軸，直線 $x=a$ 和函數 $y=2+\sin x$ 的圖形所圍成的面積。下列選項有哪些正確？

(1) $A(a+2\pi)=A(a)$ 恆成立 (2) $A(2\pi)=2A(\pi)$

(3) $A(4\pi)=2A(2\pi)$ (4) $A(3\pi)-A(2\pi)>A(2\pi)-A(\pi)$

Sol：



(3)(4)#

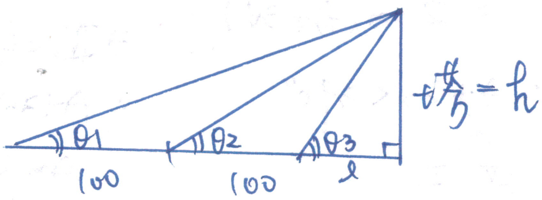
Ex8：在地面某定點測得數公里外高塔塔尖的仰角為 θ_1，朝高塔前進100公尺後，重新測得塔尖仰角為 θ_2，再前進100公尺後，測得仰角為 θ_3。請問下列哪一個選項的數值依序成等差數列？

(1) $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ (2) $\sin\theta_1,\sin\theta_2,\sin\theta_3$

(3) $\cos\theta_1,\cos\theta_2,\cos\theta_3$ (4) $\tan\theta_1,\tan\theta_2,\tan\theta_3$

(5) $\cot\theta_1,\cot\theta_2,\cot\theta_3$.

Sol：



$$\frac{\text{等差}}{\text{不變}} \Rightarrow \frac{\text{鄰}}{h(\text{對})} = \cot\theta$$

$$\cot\theta_1=\frac{200+l}{h},\ \cot\theta_2=\frac{100+l}{h},\ \cot\theta_3=\frac{l}{h}$$

(5)#

Ex9：考慮 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$，$x\in\mathbb{R}$。請選出正確的選項。

(1) $f(-x)=f(x)$ 對所有 x 均成立

(2) $f(x)$ 的最大值為 $\sqrt{2}$

(3) $f(x)$ 的最小值為 0

(4) $f\left(\frac{\pi}{10}\right)>f\left(\frac{\pi}{9}\right)$

(5) $f(x)$ 的(最小正)週期為 π

Sol：(1) $f(x)=|\sin(-x)|+|\cos(-x)|$
$=|-\sin x|+|\cos x|=\sin x+\cos x=f(x)$ (○)

(2) if $\sin x>0$, $\cos x>0$
$f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+45^\circ)$
$\therefore x=45^\circ$，$f(x)$ 有 $Max=\sqrt{2}$ (○)

(3) 若 $\sin x=0 \Rightarrow \cos x=\pm1\ne 0$ (×)

(4) 同(2) $\frac{\pi}{10},\frac{\pi}{9}\in I \Rightarrow \sin x>0$ 且 $\cos x>0$
$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{10}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{10}+45^\circ\right)$
$\wedge$
$f\left(\frac{\pi}{9}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{9}+45^\circ\right)$ (×)

(5) $\frac{\pi}{2}$ (背!!) 畫圖解釋.

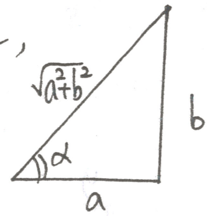
(1)(2)#

5、正餘弦的疊合：

$$f(\theta)=a\sin\theta+b\cos\theta+c$$

[STEP 1] 提出 $\sqrt{a^2+b^2}$ $=\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin\theta\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\cos\theta\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)+c$,

[STEP 2] 和角公式 $=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)+c$ ，其中



當 $\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ 時，$f(\theta)$ 有最大值 $\sqrt{a^2+b^2}+c$

$\theta+\alpha=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ 時，$f(\theta)$ 有最小值 $-\sqrt{a^2+b^2}+c$

6、圓的參數式：

圓 C：$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 的參數式為 $\begin{cases}x=h+r\cos\theta\\ y=k+r\sin\theta\end{cases}$

Ex10：下列哪一個數值最接近 $\sqrt{2}$？

(1) $\sqrt{3}\cos44^\circ+\sin44^\circ$ (2) $\sqrt{3}\cos54^\circ+\sin54^\circ$

(3) $\sqrt{3}\cos64^\circ+\sin64^\circ$ (4) $\sqrt{3}\cos74^\circ+\sin74^\circ$

(5) $\sqrt{3}\cos84^\circ+\sin84^\circ$

Sol：$\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta$

$=2(\sin\theta\cdot\underset{\cos60^\circ}{\frac{1}{2}}+\cos\theta\cdot\underset{\sin60^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2}})$

$=2\times\sin(\theta+60^\circ)$

$\theta+60^\circ$ 接近 $45^\circ,135^\circ,\dots$ ⇒ (4)#

Ex11：設 $270^\circ<A<360^\circ$ 且

$\sqrt{3}\sin A+\cos A=2\sin2004^\circ$

若 $A=m^\circ$，求 m。

Sol：$\sqrt{3}\sin A+\cos A$

$=2(\sin A\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos A\cdot\frac{1}{2})$

$=2\sin(A+30^\circ)$

$300^\circ<A+30^\circ<390^\circ$

↑

IV、I

$\sin2004^\circ$

$=\sin204^\circ$

$=-\sin24^\circ$

⇒ IV，24° ⇒ 336°

∴ $A+30^\circ=336^\circ$

$A=306^\circ$#

Ex12：下列哪些方程式有實數解？

(1) $x^3+x-1=0$ (2) $2^x+2^{-x}=0$

(3) $\log_2x+\log_x2=1$ (4) $\sin x+\cos2x=3$

(5) $4\sin x+3\cos x=\frac{9}{2}$

Sol：

(1) 三次式必有實根

(2) $2^x+2^{-x}\geq2$ ⇒ 無實數解.

(3) $\dfrac{\log_2x+\log_x2}{2}\geq\sqrt{(\log_2x)(\log_2x)}$

⇒ $\log_2x+\log_x2\geq2$

(當 $\log_2x>0$ 時)

當 $\log_2x<0$ 時 ⇒ $\log_2x+\log_x2\leq-2$

(4) $\sin x\leq1$

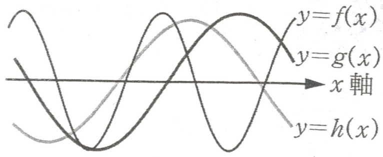
$\cos2x\leq1$

⇒ $\sin x+\cos2x\leq2$

(5) $|4\sin x+3\cos x|\leq5$

(1)(5)#

Ex13: 將函數 $y=3\sin x-\cos x$、$y=\sin(2x)+3\cos(2x)$、$y=2\sin x+2\cos x$ 的圖形繪於同一坐標平面上，其與 x 軸的相關位置如右圖：



試問圖中的圖形 $y=f(x)$、$y=g(x)$、$y=h(x)$ 所代表的函數應為下列哪一個選項？

(1) $f(x)=3\sin x-\cos x$、$g(x)=\sin(2x)+3\cos(2x)$、$h(x)=2\sin x+2\cos x$

(2) $f(x)=3\sin x-\cos x$、$h(x)=\sin(2x)+3\cos(2x)$、$g(x)=2\sin x+2\cos x$

(3) $g(x)=3\sin x-\cos x$、$f(x)=\sin(2x)+3\cos(2x)$、$h(x)=2\sin x+2\cos x$

(4) $g(x)=3\sin x-\cos x$、$h(x)=\sin(2x)+3\cos(2x)$、$f(x)=2\sin x+2\cos x$

(5) $h(x)=3\sin x-\cos x$、$f(x)=\sin(2x)+3\cos(2x)$、$g(x)=2\sin x+2\cos x$

Sol: $y=3\sin x-\cos x$ 振幅 $\sqrt{10}$) 下方 週期為 $\longrightarrow g(x)$

$y=\sin 2x+3\cos(2x)$ 振幅 $\sqrt{10}$) 上方 $\frac{1}{2}$倍 $\longrightarrow f(x)$

$y=2\sin x+2\cos x$ 振幅 $\sqrt{8}$ $\longrightarrow h(x)$

(3) #

Ex14: 試證：當 $\frac{3\pi}{2}\le\theta\le 2\pi$ 時，$3^{\cos\theta}\ge 3^{1+\sin\theta}$

Pf: 想法: $3^{\cos\theta}\ge 3^{1+\sin\theta}$ $\Downarrow$ ∵ 3^x 為遞增

$\Leftrightarrow \cos\theta\ge 1+\sin\theta$

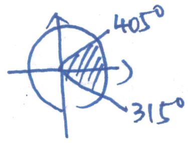
$\Leftrightarrow \cos\theta-\sin\theta\ge 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\cos\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\sin\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ge 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos(\theta+45^\circ)\ge 1$

證: ∵ $\frac{3\pi}{2}\le\theta\le 2\pi$

$315^\circ\le\theta+45^\circ\le 405^\circ$



∴ $\cos(\theta+45^\circ)\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{2}\cos(\theta+45^\circ)\ge 1$

$\Rightarrow \sqrt{2}\left(\cos\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\sin\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ge 1$

$\Rightarrow \cos\theta-\sin\theta\ge 1$

$\Rightarrow \cos\theta\ge 1+\sin\theta$ $\xRightarrow{∵ 3^x 遞增}$ $3^{\cos\theta}\ge 3^{1+\sin\theta}$

Ex15: 已知 $A(0,4)$, $B(3,0)$，若 P 為圓 $x^2+y^2=4$ 上任一點，求 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 之最大值。

Sol: 設 $P(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$

$=(-2\cos\theta, 4-2\sin\theta)\cdot(3-2\cos\theta, -2\sin\theta)$

$=-6\cos\theta+4\cos^2\theta-8\sin\theta+4\sin^2\theta$

$=-6\cos\theta-8\sin\theta+4\le 10+4=14$ #

Ex16: 下列哪些函數的最小正週期為 π？

(1) $\sin x+\cos x$ (2) $\sin x-\cos x$

(3) $|\sin x+\cos x|$ (4) $|\sin x-\cos x|$

(5) $|\sin x|+|\cos x|$

Sol: (1) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+45^\circ)\Rightarrow 2\pi$

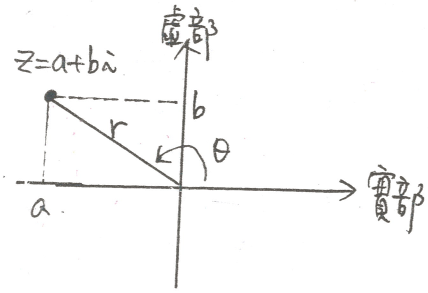
(2) $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-45^\circ)\Rightarrow 2\pi$

(3) $|\sqrt{2}\sin(x+45^\circ)|\Rightarrow\pi$

(4) $|\sqrt{2}\sin(x-45^\circ)|\Rightarrow\pi$

(5) $|\sin x|+|\cos x|\Rightarrow\frac{\pi}{2}$ (Ex9:)

7. 複數平面與極式：



$z = a+bi$ 　化極式 ⇒ 提出 $\sqrt{a^2+b^2}$

$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$

(1) 定義 $|z| = r = \sqrt{a^2+b^2}$　　(補) $|z|$的性質：① $|z_1\cdot z_2| = |z_1||z_2|$　② $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$　③ $|z^n| = |z|^n$

(2) $Arg(z)=\theta$，稱 θ 為 z 的主幅角 ⇒ $0 \le Arg(z) < 2\pi$

8. 複數極式的運算：

設 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$、$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$，則

(1) $z_1\cdot z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$　⇒(棣美弗定理) $(z_1)^n = r^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$

(2) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$

Ex17：設 z 為一複數，且 $\frac{z-2}{z+2} = i$，求 $|z|$。

Sol：$z-2 = i(z+2)$

$\Rightarrow (1-i)z = 2+2i$

$\Rightarrow z = \frac{2+2i}{1-i}$

$|z| = \frac{|2+2i|}{|1-i|} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = 2$ #

Ex18：在所有滿足 $z - \bar{z} = -3i$ 的複數 z 中，求 $|\sqrt{7}+8i-z|$ 的最小值。

Sol：$z = a+bi$，$\bar{z} = a-bi \Rightarrow z-\bar{z} = 2bi = -3i$

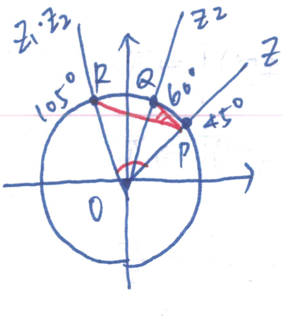
$z = a - \frac{3}{2}i$

$|\sqrt{7}+8i-z| = \left|(\sqrt{7}-a) + \frac{19}{2}i\right| \le \frac{19}{2}$ #

Ex19：複數 $z_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$，$z_2 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$，與 $z_1\cdot z_2$ 在複數平面對應的點分別為P.Q.R，求∠QPR為下列哪一個選項？

(1) $\frac{\pi}{12}$　(2) $\frac{\pi}{10}$　(3) $\frac{\pi}{9}$　(4) $\frac{\pi}{8}$　(5) $\frac{\pi}{6}$

Sol：



$\angle QPR = \frac{1}{2}\angle ROQ$

$= \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4}$

(4) #

Ex20：設 $z = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}$，求 $|1-z|$ 為下列哪一個選項？

(1) $2\sin\frac{\pi}{7}$　(2) $\sin\frac{2\pi}{7}$　(3) $\sqrt{2}\sin\frac{2\pi}{7}$

(4) $\sqrt{2}(1-\cos\frac{2\pi}{7})$　(5) $\sqrt{1-\cos\frac{2\pi}{7}}$

Sol：$1-z = (1-\cos\frac{2\pi}{7}) + i(-\sin\frac{2\pi}{7})$

$= 2\sin^2\frac{\pi}{7} + i(-2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7})$

$= 2\sin\frac{\pi}{7}(\sin\frac{\pi}{7} + i(-\cos\frac{\pi}{7}))$

$= 2\sin\frac{\pi}{7}(\cos(\frac{-5\pi}{14}) + i\sin(\frac{-5\pi}{14}))$　(1) #

Ex21：已知複數 z 滿足 $z^n+z^{-n}+2=0$，其中 n 為正整數，將 z 用極式表示為 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 且 $r>0$。請選出正確的選項。

(1) $r=1$ (2) n不能是偶數 (3) 對給定的 n，恰有 2n 個不同的複數 z 滿足題設。

(4) θ 可能是 $\frac{3\pi}{7}$ (5) θ 可能是 $\frac{4}{7}\pi$

Sol：設 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta) \Rightarrow z^n=r^n[\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)]$

$z^{-n}=r^{-n}[\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)]$

$=r^{-n}[\cos(n\theta)-i\sin(n\theta)]$

$\therefore z^n+z^{-n}=(r^n+r^{-n})(\cos(n\theta))+i(r^n-r^{-n})(\sin(n\theta))=-2$

$$\therefore \begin{cases}(r^n+r^{-n})\cdot\cos(n\theta)=-2\\(r^n-r^{-n})\cdot\sin(n\theta)=0\end{cases}$$

case1: $\Rightarrow r^n-r^{-n}=0 \Rightarrow r=1$

$\therefore \cos(n\theta)=-1$

$n\theta=\pi+2k\pi \Rightarrow \theta=\frac{(2k+1)}{n}\pi$

其中 $k=0,1,2,\cdots,n-1$

case2: $\sin(n\theta)=0 \Rightarrow \cos(n\theta)=\pm1$

$\because r^n+r^{-n}>0 \Rightarrow \cos n\theta=-1$

$\therefore r^n+r^{-n}=2 \Rightarrow r^n=r^{-n}=1$

(同 case1)

(1) $r=1$ (○)

(2) n 可以是任意數 (×)

(3) n個解 (×)

(4) 取 $n=7$、$k=1$ (○)

(5) 無法

(1)(4)#

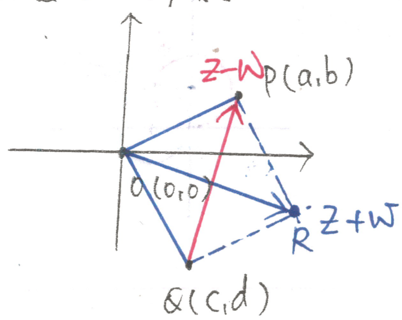
9. 複數運算的幾何意義：

(1) 加、減法：向量的加減法

設複數 $z=a+bi$，$w=c+di$ 在複數平面表示 $P(a,b)$ 及 $Q(c,d)$，則

(a) $z+w=(a+c)+(b+d)i$ 表示 $\overrightarrow{OR}$

(b) $z-w=(a-c)+(b-d)i$ 表示 $\overrightarrow{QP}$



(2) 乘、除法：伸縮、旋轉

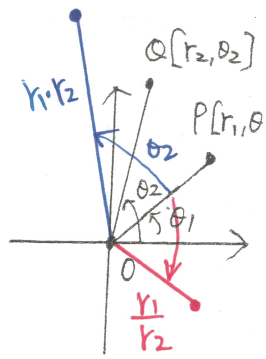
設複數 $z=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$w=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ 在複數平面表示 $P[r_1,\theta_1]$ 及 $Q[r_2,\theta_2]$，則

(a) $z\cdot w=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$ 表示 ①長度 r_1r_2、角度 $\theta_1+\theta_2$

② P点長度 r_2 倍，旋轉 θ_2 角

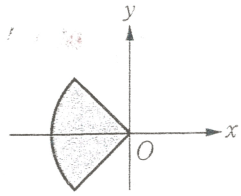
(b) $\frac{z}{w}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$ 表示 ①長度 r_1r_2，角度 $\theta_1-\theta_2$

② P点長度 $\frac{1}{r_2}$ 倍，旋轉 $(-\theta_2)$ 角



(c) $z^n=r_1^n[\cos(n\theta_1)+i\sin(n\theta_1)]$ 表示 長度 n次方，角度 n倍

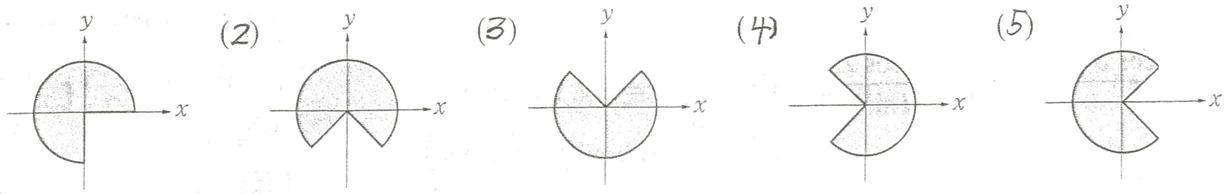
Ex22：如右圖陰影部分所示為複數平面區域



$A=\{z \mid z=r(\cos\theta+i\sin\theta),\ 0\le r\le 1,\ \frac{3\pi}{4}\le\theta\le\frac{5\pi}{4}\}$ 之略圖。

令 $D=\{w \mid w=z^3,\ z\in A\}$，試問下列選項何者與區域D最接近？

(1) (2) (3) (4) (5)



Sol：

$w=r^3(\cos3\theta+i\sin3\theta)$

$0\le r^3\le 1$

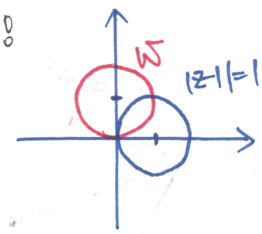
$\frac{9\pi}{4}\le 3\theta\le\frac{15\pi}{4}$

(5)#

Ex23：設 $T=\{z \mid z$ 為複數且 $|z-1|=1\}$，則下列哪些點會落在 $\Omega=\{w \mid w=iz,\ z\in T\}$ 上？

(1) $2i$ (2) $-2i$ (3) $1+i$ (4) $1-i$ (5) $-1+i$

Sol：



$w=iz$
$=(\cos90^\circ+i\sin90^\circ)\cdot z$

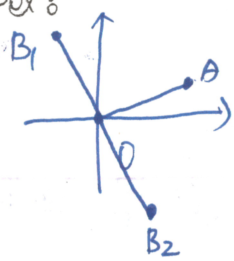
⇒ z旋轉90°角

(1)(3)(5)#

Ex24：設O為複數平面上的原點，並令點A、B分別為非零複數z、w。若∠AOB=90°，則下列哪些選項必為負實數？

(1) $\frac{z}{w}$ (2) zw (3) $(zw)^2$ (4) $\frac{z^2}{w^2}$ (5) $(z\overline{w})^2$

Sol：



⇒ $w=iz$ or $-i\cdot z$

⇒ $w=\pm iz$

$\overline{w}=\overline{\pm iz}=\mp i\cdot\overline{z}$

(1) $\frac{z}{w}=\pm i$ (2) $z\cdot w=z\cdot(\pm iz)$
$=\pm i(z)^2$

(3) $(z\cdot w)^2=-(z)^4$

(4) $\left(\frac{z}{w}\right)^2=-1$ (○)

(5) $z\overline{w}=z(\mp i\overline{z})$
$=\pm i(z\cdot\overline{z})=\pm i|z|^2$
$(z\overline{w})^2=(\pm i|z|^2)^2=-|z|^4$ (○)

(4)(5)#

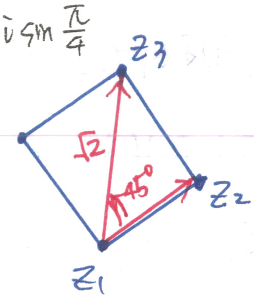
Ex25：設複數平面上的相異四點 z_1, z_2, z_3, z_4 依序且依逆時針方向可連成一個正方形。下列哪一個選項為 $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$ 之值？

(1) $\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4})+\sqrt{2}\,i\sin(\frac{\pi}{4})$ (2) $\sqrt{2}\cos(\frac{-\pi}{4})+\sqrt{2}\,i\sin(\frac{-\pi}{4})$

(3) $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\frac{\pi}{4})+\frac{1}{\sqrt{2}}i\sin(\frac{\pi}{4})$ (4) $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\frac{-\pi}{4})+\frac{1}{\sqrt{2}}i\sin(\frac{-\pi}{4})$

(5) $\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$

Sol：

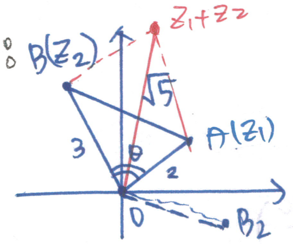


(4)#

Ex26：設O為複數平面上的原點，並令A、B分別代表複數 z_1、z_2 且滿足 $|z_1|=2$，$|z_2|=3$，$|z_1-z_2|=\sqrt{5}$。若 $\frac{z_2}{z_1}=a+bi$，其中 $a,b\in\mathbb{R}$，請選出正確的選項。

(1) $\cos\angle AOB=\frac{2}{3}$ (2) $|z_2+z_1|=\sqrt{23}$ (3) $a>0$ (4) $b>0$ (5) 設C代表 $\frac{z_2}{z_1}$，則 $\angle BOC$ 可能為 $\frac{\pi}{2}$。

Sol：



(1) $\cos\theta=\frac{2^2+3^2-(\sqrt{5})^2}{2\cdot 2\cdot 3}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$

(3)(4) $B=A(\cos\theta+i\sin\theta)$ or $A(\cos\theta-i\sin\theta)$

$\Rightarrow a>0$

b 可能正or負

(2) 平行四邊形定理知

$|z_1+z_2|^2+(\sqrt{5})^2=2(3^2+2^2)$

$\Rightarrow |z_1+z_2|=\sqrt{21}$

(5) C點固定，B點可以是任意點

$\therefore \angle BOC$ 可能 $\frac{\pi}{2}$

(1)(3)(5)#

10、1的n次方根：

(1) 方程式 $x^n=1$ 的n個根為

[表示法一]

$x=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$，其中 $k=0,1,2,\cdots,n-1$。

[表示法二]

令 $\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$，n個根為 $\underset{\omega^0}{1},\omega,\omega^2,\cdots,\omega^{n-1}$。

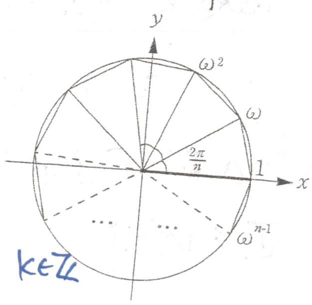
ω的性質：

1) $\omega^n=1$ （ω是 $x^n=1$ 的解）

2) $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1}=0$ （所有解之和為0）

3) $x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=(x-\omega)(x-\omega^2)\cdots(x-\omega^{n-1})$ （因式分解）

4) n個根在複數平面上共圓且形成 正n邊形。



[說明] 設 $x=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$\Rightarrow x^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=1+0i=1\cdot(\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi)$，$k\in\mathbb{Z}$

$\therefore \begin{cases} r^n=1\ (r\in\mathbb{R}^+) & \Rightarrow r=1 \\ n\theta=2k\pi & \Rightarrow \theta=\frac{2k\pi}{n},\ k=0,1,2,\cdots,n-1,\ \text{(其餘為同界角)} \end{cases}$

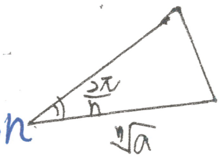
$\therefore x=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k$，亦即 $x^n-1=0$ 的解為 $1,\omega,\omega^2,\cdots,\omega^{n-1}$

$\Rightarrow x^n-1=(x-1)\underbrace{(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}=(x-1)\underbrace{(x-\omega)(x-\omega^2)\cdots(x-\omega^{n-1})}$

(2) 方程式 $x^n=a$ 的n個根在複數平面上共圓（半徑為 $\sqrt[n]{a}$），

且形成 正n邊形，其面積 $=\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\right)\times n$

周長 $=\sqrt[n]{a}\left(\sqrt{1+1-2\cdot 1\cdot 1\cdot\cos\frac{2\pi}{n}}\right)\times n$



Ex27：設方程式 $x^5=1$ 的五根為 $1,\omega,\omega^2,\omega^3,\omega^4$，則

$(3-\omega)(3-\omega^2)(3-\omega^3)(3-\omega^4)=$

(1) 81 (2) 162 (3) 121 (4) 242

Sol：$(x-\omega)(x-\omega^2)(x-\omega^3)(x-\omega^4)=1+x+x^2+x^3+x^4$

$x=3 \Rightarrow (3-\omega)(3-\omega^2)(3-\omega^3)(3-\omega^4)=1+3+9+27+81$

$=121$

$\underline{(3)}$ #

Ex29：設 a 為一複數且 $1+2i$ 為 a 的一個六次方根，選出正確的選項。

(1) $1-2i$ 也是 a 的一個六次方根

(2) $(1+2i)(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$ 也是 a 的一個六次方根

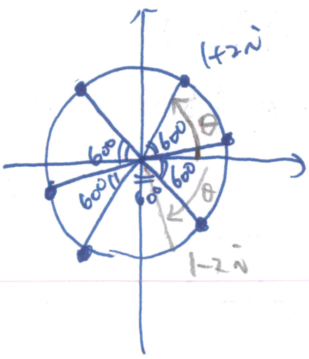
(3) $|a|=\sqrt{5}$

(4) 複數平面上以 a 的六次方根為頂點的六邊形，其面積為 $\frac{15}{2}\sqrt{3}$

Sol：依題意 $\sqrt[6]{a}=1+2i$（其中一根）

$\Rightarrow a=(1+2i)^6$

$x^6=a$ 的六根在複數平面上是正六邊形。



(1) $1-2i$ 和 $1+2i$ 差不會是 $60°$ 的倍數

(2) $(1+2i)(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$

$=(1+2i)(\cos120°+i\sin120°)$

$\Rightarrow$ 旋轉 $120°$ 仍是 $x^6=a$ 的根

(3) $|a|=|(1+2i)^6|=(\sqrt{5})^6=125$

(4) $(\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\sin60°)\times6=\underline{\frac{15}{2}\sqrt{3}}$ #

Ex28：設 $\omega=\cos\frac{2\pi}{6}+i\sin\frac{2\pi}{6}$，下列何者正確？

(1) $\omega^6=1$ (2) $\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots+\omega^{120}=0$

(3) $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^3)(1+\omega^4)(1+\omega^5)=1$

(4) $|1-\omega^2|=\sqrt{3}$

(5) $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$ 之五根為 $1,\omega,\omega^2,\omega^3,\omega^4$

Sol：$n=6$ $(\frac{2\pi}{6})$

(1) $\therefore\ \omega^6=1$

(2) $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5=0$（連6項和為0）

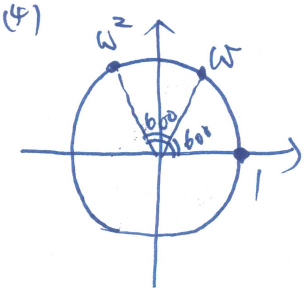
$\therefore$ 120項 = 20組 × 6項 = 0

(3) $(x-\omega)(x-\omega^2)(x-\omega^3)(x-\omega^4)(x-\omega^5)=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$

$x=-1 \Rightarrow (-1-\omega)(-1-\omega^2)(-1-\omega^3)(-1-\omega^4)(-1-\omega^5)=0$

$\therefore (1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^3)(1+\omega^4)(1+\omega^5)=0$

(4)



$|1-\omega|=\sqrt{1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos120°}$

$=\sqrt{3}$

(5) 應為 $\omega,\omega^2,\omega^3,\omega^4,\omega^5$