極限

1. 數列的極限

數列$\langle a_n\rangle$若會趨近某一定值α，則稱數列<u>收斂</u>，記作$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$。
反之，稱為<u>發散</u>。

《例》判斷下列數列的斂散性

(1) $\langle a_n\rangle=\langle \frac{2}{n}\rangle \to 0$ (2) $\langle a_n\rangle=\langle 2n\rangle$ 發散 (3) $\langle a_n\rangle=\langle(-1)^n\rangle$ 發散

(1) 等比型：數列$\langle a_1 r^{n-1}\rangle$收斂條件$\Leftrightarrow$ $-1<r\leq 1$

級數$S=a_1+a_1r+a_1r^2+\cdots+a_1r^{n-1}+\cdots$ 收斂條件$\Leftrightarrow$ $-1<r<1$

若S收斂，則$S=\frac{a_1}{1-r}$

(2) 分式型：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_r n^r+a_{r-1}n^{r-1}+\cdots+a_1 n+a_0}{b_s n^s+b_{s-1}n^{s-1}+\cdots+b_1 n+b_0}=\begin{cases}\text{發散}, & \text{當 } r>s\\ \frac{a_r}{b_s}, & \text{當 } r=s\\ 0, & \text{當 } r<s\end{cases}$

(3) 夾擠定理：若數列$a_n\leq b_n\leq c_n$且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\alpha$，則$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\alpha$。

《偵錯》①若數列$a_n\leq b_n\leq c_n$且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\gamma$，則$\alpha\leq\lim\limits_{n\to\infty}b_n\leq\gamma$。

(×) b_n可能發散

②若數列$a_n<b_n$且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\beta$，則$\alpha<\beta$。

(×) $\alpha\leq\beta$

Ex 1：當$n\in\mathbb{N}$，令$x=a_n, y=b_n, z=c_n$為方程組$\begin{cases}x+y+z=0\\ x+2y+3z=0\\ (-2n)x+ny+3z=8n\end{cases}$之唯一解，求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$。

Sol：$a_n=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}0&1&1\\0&2&3\\8n&n&3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\-2n&n&3\end{vmatrix}}$

$=\frac{24n-16n}{6+n-6n+4n-3n-3}=\frac{8n}{-4n+3}$

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-2$ #

Ex2：設 $n \in \mathbb{N}$ 且 $x^2-2x-n=0$ 的兩根為 a_n 與 b_n，且 $a_n>b_n$。求下列何者正確？

(1) $a_n>0$　(2) $a_n+b_n=2$　(3) $b_{n+1}>b_n$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n a_{n+1}}{n}=1$　(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-b_n}{\sqrt{2}}=2$

Sol：(2) $a_n+b_n=2$（根與係數）

(1) $x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+4n}}{2}=1\pm\sqrt{1+2n}$

$\therefore a_n=1+\sqrt{1+2n}>0$

$b_n=1-\sqrt{1+2n}<0$

(3) $b_{n+1}=1-\sqrt{1+2(n+1)}<b_n$

(4) $\dfrac{a_n a_{n+1}}{n}=\dfrac{(1+\sqrt{1+2n})(1+\sqrt{3+2n})}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n a_{n+1}}{n}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$

(5) $\dfrac{a_n-b_n}{\sqrt{2}}=\dfrac{(1+\sqrt{1+2n})-(1-\sqrt{1+2n})}{\sqrt{2}}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-b_n}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{1+2n}}{\sqrt{2}}=2$

(1)(2)(5)#

Ex3：若首項 a，公比 0.01 的無窮等比級數和等於循環小數 $1.\overline{2}$，求 a 值。

Sol：$\dfrac{a}{1-0.01}=1.\overline{2} \Rightarrow a=0.99\times\dfrac{12-1}{9}$

$\Rightarrow a=0.11\times 11$

$=1.21$#

2. 函數的極限：

(1) 定義：設函數 $f(x)$，當 x 從 a 的左右兩邊趨近 a 時，$f(x)$ 會趨近一定值 L，則稱 $f(x)$ 在 $x=a$ 的極限值為 L，記作 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$。

(2) 左極限：若 x 從 a 的左側趨近 a 時，$f(x)$ 會趨近一定值 L，記作 $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=L$。

右極限：〃　右側　〃　記作 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=L$。

(3) 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$

3. 連續函數：

若 $f(x)$ 在 $x=a$ 連續，則 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$。

Ex4：求下列各極限值。

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2x)$

$=1^2+2\times 1=3$#

(2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-3x+2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cancel{(x-2)}(x-4)}{\cancel{(x-2)}(x-1)}$

$=\dfrac{-2}{1}=-2$#

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|3-3x-x^2|-1}{x-1}$

$\because x=1$ 代入 $3-3x-x^2<0$

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-3-1}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}(x+4)=5$#

(4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{\sqrt{x+1}-2}\times\dfrac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-1)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}(\sqrt{x+1}+2)$

$=2(\sqrt{4}+2)=8$#

Ex5：假設兩地間的通話費，第一個半分鐘5元，之後每半分鐘2元，不滿半分鐘以半分鐘計算，則t分鐘的通話費 $c(t)=5-2[1-2t]$（元），試問下列哪些選項是正確的？

(1) 10分鐘的通話費43元　(2) $t\geq 0$ 時，$[1-2t]=-[2t-1]$

(3) $\lim\limits_{t\to 10.5} C(t)=45$　(4) $\lim\limits_{t\to 11.2} C(t)=49$

Sol：(1) 10分鐘⇒t=10代入⇒ $C(10)=5-2\times(-19)=43$

(2) $t=0.3$ 代入 ⇒ $[1-2\times 0.3]=0$

$-[2\times 0.3-1]=-(-1)=1$

(3) $\lim\limits_{t\to 10.5^+} C(t)=5-2\times(-21)$

$\neq$　∴ $\lim\limits_{t\to 10.5} C(t)$ 不存在

$\lim\limits_{t\to 10.5^-} C(t)=5-2\times(-20)$

(4) $\lim\limits_{t\to 11.2} C(t)=5-2\times(-22)$

$=49$

(1)(4)#

Ex6：$f(x)=x^3-x^2-2x+1$。若 a,b,c 為方程式 $f(x)=0$ 的三個實根，且 $a<b<c$。請選出正確的選項。

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}$ 存在　(2) a,b,c 至少一個在0、1之間

(3) $a,a^2,a^3,\cdots,a^n,\cdots$ 為收斂數列

(4) $b,b^2,b^3,\cdots,b^n,\cdots$ 為收斂數列

(5) $c,c^2,c^3,\cdots,c^n,\cdots$ 為收斂數列

Sol：(2)(3)(4)(5)

$f(-2)=-7$, $f(-1)=1$) $a\in(-2,-1)$

$f(0)=1$, $f(1)=-1$) $b\in(0,1)$

$f(2)=1$) $c\in(1,2)$

$\langle r^n\rangle$ 收斂條件 ⇒ $-1<r\leq 1$

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-2x+1}{x-1}=\dfrac{-1}{0}$（不存在）

(2)(4)#

Ex7：設 $f(x)$ 為非零的實數值函數。已知極限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\dfrac{|x|}{x}$ 存在，

請選出正確的選項。

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{|x|}\right)^2$ 存在　(2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\cdot\dfrac{x}{|x|}$ 存在

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+1)\dfrac{x}{|x|}$ 存在

(4) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(f(x))^2$ 存在

Sol：(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{|x|}\right)^2=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2}=1$

(2) 題目 $=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\cdot\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\cdot\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\dfrac{(-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-} -f(x)$

⇒ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} -f(x)$

所求 $=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\dfrac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-} -f(x)$] 必相等　∴ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\dfrac{x}{|x|}$ 存在.

(3) $\underbrace{\lim\limits_{x\to 0} f(x)\dfrac{x}{|x|}}_{\text{存在}}+\underbrace{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|}}_{\text{不存在}}$ ⇒ 不存在

不存在 ⇒ (∵ $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{|x|}=1$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{|x|}=-1$)

(4) 若 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$ 可滿足題意，但 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}(f(x))^2=\left(-\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\right)^2=\lim\limits_{x\to 0^-}(f(x))^2$

∴ $\lim\limits_{x\to 0}(f(x))^2$ 存在

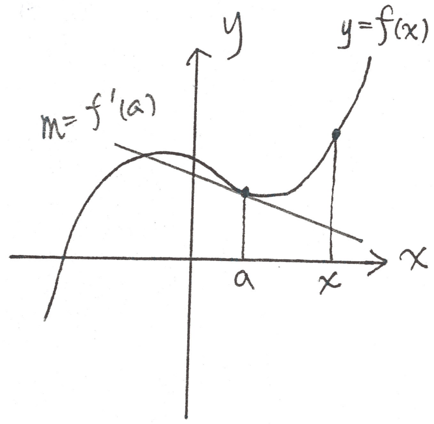
(1)(2)(5)#

微分

1、導數(微分)：

(1) 定義：$f(x)$ 在 $x=a$ 的導數為 $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$。

若導數存在，稱 $f(x)$ 在 $x=a$ 可微分。



(2) 幾何意義：$f'(a)$ 表示 $f(x)$ 在 $x=a$ 的 切線斜率。

◎ $f(x)$ 在 $x=a$ 的切線方程式為 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$。(切點 $(a,f(a))$，$m=f'(a)$)

(3) 導函數：$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$。

◎ $f(x)$ 在 $x=a$ 可微分 $\Rightarrow$ $f(x)$ 在 $x=a$ 連續 (但 $f(x)$ 在 $x=a$ 連續，$f'(a)$ 不一定存在)

2、微分的運算：

(1) 單項式微分 $(x^n)'=nx^{n-1}$。

(2) $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$，$[k\cdot f(x)]'=k\cdot f'(x)$

$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x)$，$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{[g(x)]^2}$

$[(f(x))^n]'=n(f(x))^{n-1}\cdot f'(x)$

《例》求下列各函數之導函數 $f'(x)$

(1) $f(x)=3x^2+2$

$f'(x)=6x$

(2) $f(x)=(2x^2+1)(x+3)$

$f'(x)=4x(x+3)+1\cdot(2x^2+1)$

(3) $f(x)=\frac{x^2+2}{(x-1)}$

$f'(x)=\frac{2x(x-1)-1\cdot(x^2+2)}{(x-1)^2}$

(4) $f(x)=(2x+3)^4$

$f'(x)=4(2x+3)^3\times 2$

《例》求下列各函數在 $x=2$ 的導數值 $f'(2)$

(1) $f(x)=3x^2+2$

$f'(x)=6x$

$f'(2)=12$ #

(2) $f(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{2x+1}$

$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{2x+1}-0}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-3)}{2x+1}=\frac{(1)(-1)}{5}=\frac{-1}{5}$ #

Ex1：已知整係數多項式 $f(x)$ 滿足

$f(2)=f(4)=f(6)=0$，而除了 $x=2,4,6$ 之外，

$f(x)$ 的函數值恆正。下列選項那些必正確？

(1) $f(x)$ 的次數至少為 6　(2) $f(x)$ 的次數為奇數

(3) $f(1)$ 為奇數　(4) $f'(4)=0$

Sol：(1) ∵ 恆正 ∴ 因式必為完全平方式

$\Rightarrow f(x)=(x-2)^2(x-4)^2(x-6)^2\,Q(x)$ 恆正

(2) ∵ $Q(x)$ 恆正 ∴ $Q(x)$ 必為偶數次

(3) $f(1)=(1-2)^2(1-4)^2(1-6)^2\cdot Q(1)$

若 $Q(x)=x^2+1 \Rightarrow Q(1)$ 為偶數

(4) $f'(x)=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-2)^2(x-4)^2(x-6)^2Q(x)-0}{x-4}$

$=\lim\limits_{x\to 4}(x-2)^2(x-4)(x-6)^2Q(x)=0$

Ex2：設 $p(x)$ 為三次實係數多項式，其圖形通過 $(1,3)$，$(-1,5)$ 兩點。若 $p(x)$ 的圖形在點 $(1,3)$ 的切線斜率為 7，而點 $(-1,5)$ 的切線斜率為 -5，試求 $p(x)$。

Sol：設 $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$p'(x)=3ax^2+2bx+c$

過 $(1,3)\Rightarrow 3=a+b+c+d$
$(-1,5)\Rightarrow 5=-a+b-c+d$
相加 $\Rightarrow 8=2(b+d)$　∴ $d=1$

$(1,3)$ 之 $m=7\Rightarrow 7=3a+2b+c$
$(-1,5)$ 之 $m=-5\Rightarrow -5=3a-2b+c$
$\Rightarrow 4b=12,\ b=3$

$b=3, d=1$ 代入 $\begin{cases} a+c=-1 \\ 3a+c=1 \end{cases}$　∴ $a=1, c=-2$

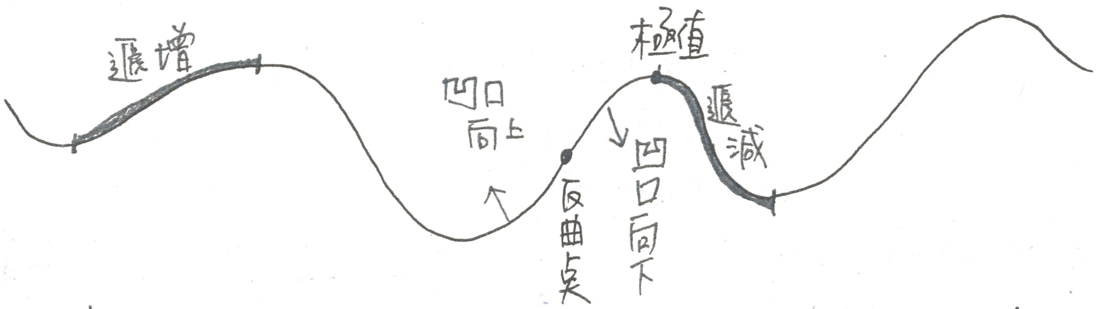
∴ $p(x)=x^3+3x^2-2x+1$

3、一次微分與二次微分的意義：

(1) 一次微分
$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow$ 遞增
$f'(x)\leq 0 \Leftrightarrow$ 遞減
$f'(x)=0 \Rightarrow$ 可能是極值

(2) 二次微分
$f''(x)\geq 0 \Leftrightarrow$ 凹口向上
$f''(x)\leq 0 \Leftrightarrow$ 凹口向下
$f''(x)=0 \Rightarrow$ 可能是反曲點

→ 不是極值就是反曲
不是反曲就是極值

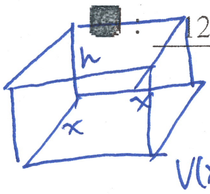


《極值判定》若 $f'(a)=0$ 且 $f'(x)$ 在 $x=a$ 的左右異號 $\Rightarrow x=a$ 必為 $f(x)$ 的極值。

《反曲點判定》若 $f''(a)=0$ 且 $f''(x)$ 在 $x=a$ 的左右異號 $\Rightarrow x=a$ 必為 $f(x)$ 的反曲點。

3. 張師傅想為公司設計底面為正方形且沒有蓋子的一個長方體紙盒，裡面白色，外面灰色。在灰色部分的面積為 432 平方公分的限制之下，為了使紙盒的容積達到最大，試問他應將此無蓋長方體紙盒的底面每邊邊長為多少公分？

■：12公分。【96.指考甲】



灰色 $= x^2+4xh=432 \Rightarrow h=\dfrac{432-x^2}{4x}$

$V(x)$容積 $= x^2h = x^2\,\dfrac{432-x^2}{4x} = \dfrac{432x-x^3}{4}$

$V'(x)=\frac{1}{4}(432-3x^2)=0 \Rightarrow 3x^2=432 \Rightarrow x^2=144$

$\Rightarrow x=12$ #

4. 設 $f'(x)$ 表示實係數多項式函數 $f(x)$ 的導函數，已知 $y=f'(x)$ 的圖形是一個通過點 $(1,0)$ 和點 $(2,0)$ 且開口向上的拋物線。試問下列哪些選項是正確的？

(A) $f(x)$ 一定是三次多項式

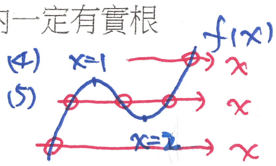
(B) $f(x)$ 在 $1<x<2$ 的範圍內必為遞增

(C) $f(x)$ 一定恰有兩個極值

(D) $f(x)=0$ 一定有三個實根

(E) $f(x)=0$ 在 $1\leq x\leq 2$ 的範圍內一定有實根

■：(A)(C)。【97.指考甲】



(1) $f'(x)=a(x-1)(x-2)$，其中 $a>0$

$\Rightarrow f(x)$ 必為三次式

(2) $f'(x)>0 \Leftrightarrow x>2$ or $x<1 \Leftrightarrow$ 遞增

(1)(3)#

(3) $f'(x)=0 \Rightarrow x=1,2$（三次式 ⇒ 必為2個極值）

5. 設 $y=f(x)$ 是一個實係數四次多項式，其函數圖形在 $(-1,2)$ 和 $(1,2)$ 各有一個反曲點，且知在 $(-1,2)$ 和 $(1,2)$ 此函數圖形切線的斜率分別為 1 和 -1，則下列哪些選項正確？

(A) $x+1$ 是 $f''(x)$ 的因式

(B) $f'(x)$ 的常數項不等於零

(C) $f'(-x)=-f'(x)$

(D) $f(x)$ 的首項係數是 1

■：(A)(C)。【98.指考甲】

(3) $f'(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x$ 是奇函數

(4) $f(x)=\frac{1}{8}x^4-\frac{3}{4}x^2$

(1) ∵ 反曲點 $f''(-1)=f''(1)=0$

$f''(x)=a(x+1)(x-1)=ax^2-a$

(1)(3)#

(2) $f'(x)=\frac{a}{3}x^3-ax+C$

∵ 切線斜率 $f'(-1)=1 \Rightarrow -\frac{a}{3}+a+C=1$

$f'(1)=-1 \Rightarrow \frac{a}{3}-a+C=-1$

∴ $C=0$, $a=\frac{3}{2}$

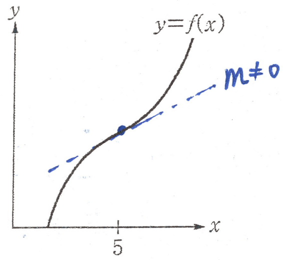
6. 設 $f(x)$ 為實係數三次多項式，右圖所示為函數 $y=f(x)$ 的圖形，其中 $(5, f(5))$ 為反曲點。試問 $f(x)$ 的導函數 $f'(x)$ 可能為下列哪個選項？

(A) $(x-5)^2-1$　(B) $(x-5)^2+1$

(C) $(x-5)^2$　(D) $-(x-5)^2+1$

(E) $-(x-5)^2-1$

■：(B)。【99.指考甲】



$f'(x)$ 表示遞增 $\Rightarrow f'(x)>0$

(減)

(2)#

7. 設 f 為實係數三次多項式函數，已知五個方程式的相異實根個數如表所述：關於 f 的極小值 α，試問下列哪一個選項是正確的？

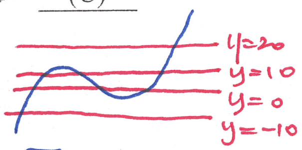
(A) α 不存在　(B) $-20<\alpha<-10$

(C) $-10<\alpha<0$　(D) $0<\alpha<10$

(E) $10<\alpha<20$

方程式	相異實根數
$f(x)-20=0$	1
$f(x)-10=0$	3
$f(x)=0$	3
$f(x)+10=0$	1
$f(x)+20=0$	1

■：(C)。



由圖知 極小值 $-10<\alpha<0$

(3)#

8. 已知一個 n 次實係數多項式 $f(x)$ 滿足下列性質：當 $x<0$ 時，$f'(x)<0$ 且 $f''(x)>0$

當 $0<x<1$ 時，$f'(x)<0$ 且 $f''(x)<0$；

當 $1<x<4$ 時，$f'(x)<0$ 且 $f''(x)>0$；

當 $x>4$ 時，$f'(x)>0$ 且 $f''(x)>0$。

請選出正確的選項。

(A) $f'(2)>f'(3)$　(B) $f(x)$ 在 $x=4$ 時有最小值

(C) $f(x)$ 的圖形只有一個反曲點

(D) n 可能為 3　(E) $f(x)$ 的最高次項係數必為正

■：(B)(E)。【101.指考甲】

x	0	1	4	
$f'(x)$	−	−	−	+
$f''(x)$	+	−	+	+
$f(x)$	↘	↘	↘	↗

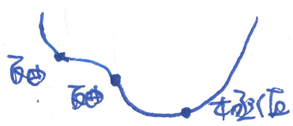
(1) $x=2\to 3$ 斜率變大

(2) $x=4$ 為最小值，如圖

(3) 2個反曲點

(4) $n\geq 4$

(5) 向上



(2)(5)#

P6、

9. 考慮多項式函數 $f(x)=4x^3-11x^2+6x$。請選出正確的選項：

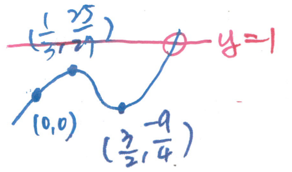
(A)函數 f 的圖形在 $(1,-1)$ 的切線斜率為正
(B) 函數 f 的圖形與直線 $y=1$ 交於三點
(C) 函數 f 的唯一相對極小值為 $\frac{-9}{4}$
(D) $f(\pi)>0$　(E) $f(\cos\frac{4\pi}{7})>0$

■：(C)(D)。【103.指考甲】

(1) $f'(x)=12x^2-22x+6$
$f'(1)=12-22+6=-4<0$

(2)(3) $f'(x)=2(6x^2-11x+3)$
$=2(3x-1)(2x-3)$

x	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$
$f'(x)$	$+$ 0 $-$	0 $+$
$f(x)$	$\nearrow$ $\frac{25}{27}$ $\searrow$	$\frac{-9}{4}$ $\nearrow$



(4) $f(\pi)=4\pi^3-11\pi^2+6\pi$
$>6\pi>0$

(5) $f(0)=0$
$\cos\frac{4\pi}{7}<0 \Rightarrow f(\cos\frac{4\pi}{7})<0$

(3)(4)#

10. 職業棒球季後賽第一輪採五戰三勝制，當參賽甲、乙兩隊中有一隊贏得三場比賽時，就由該隊晉級而賽事結束。每場比賽皆須分出勝負，且每場比賽的勝負皆不受之前已賽結果影響。假設甲隊在任一場贏球的機率為定值 p，以 $f(p)$ 表實際比賽場數的期望值 (其中 $0\le p\le 1$)，請選出正確的選項：

(A) 只比 3 場就晉級的機率為 $p^3+(1-p)^3$
(B) $f(p)$ 是 p 的 5 次多項式
(C) $f(p)$ 的常數項等於 3
(D) 函數 $f(p)$ 在 $p=\frac{1}{2}$ 時有最大值
(E) $f(\frac{1}{4})<f(\frac{4}{5})$

■：(A)(C)(D)。【103.指考甲】

(1)
(2)
(3)

x	3	4	5
P	$p^3+(1-p)^3$	$C^3_1p^3(1-p)+C^3_1(1-p)^3p$	$C^4_2p^3(1-p)^2+C^4_2(1-p)^3p^2$

$f(p)=3[\underbrace{p^3+(1-p)^3}_{\text{常數}}]+4[3p^3(1-p)+3(1-p)^3p]+5\underbrace{(6p^3(1-p)^2+6(1-p)^3p^2)}_{p^5\text{會消掉}}$

(4)(5) 兩隊實力越接近 (p 接近 $\frac{1}{2}$)，就需要越多比賽

(1)(3)(4)#

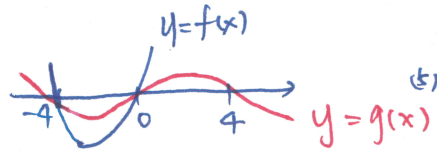
11. 設 $f(x)$ 為實係數二次多項式，$g(x)$ 為實係數三次多項式。已知 $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸交於 $x=-4$ 與 $x=0$，而 $y=g(x)$ 的圖形與 x 軸交於 $x=-4$，$x=0$ 及 $x=4$，且 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的 (相對) 極小值皆發生於 $-4<x<0$。選出正確的選項。

(A) $f(x)$ 與 $g(x)$ 的最高次項係數皆為正
(B) $f(x)$ 的 (相對) 極小值發生於 $x=-2$
(C) $g(x)$ 的 (相對) 極小值發生於 $x=-2$
(D) $g(-1)=g(-3)$　(E) $g(-1)=-g(1)$

■：(B)(E)。【104.指考甲】

(4) $f(-1)=f(-3)$
但 $g(x)$ 不一定
$\because x=-2$ 對稱

(5) $g(x)$ 是奇函數
($\because g(x)=ax(x-4)(x+4)$)



(1) $g(x)$ 的首項係數 <0
(2) $f(x)$ 的極小值必發生於 $x=-2$ (對稱)
(3) $g(x)$ 不一定，如：$g(x)=x(x-4)(x+4)$
$=x^3-16x$
$g'(x)=3x^2-16=0 \Rightarrow x=\pm\frac{4}{\sqrt{3}}$
此時，極小值發生在 $x=-\frac{4}{\sqrt{3}}$

(2)(5)#

12. 設實係數三次多項式 $f(x)$ 的首項係數為正。已知 $y=f(x)$ 的圖形和直線 $y=g(x)$ 在 $x=1$ 相切，且兩圖形只有一個交點。試選出正確的選項。

(A) $f(1)=g(1)$　(B) $f'(1)=g'(1)$　(C) $f''(1)=0$
(D) 存在實數 $a\ne 1$ 使得 $f'(a)=g'(a)$
(E) 存在實數 $a\ne 1$ 使得 $f''(a)=g''(a)$

■：(A)(B)(C)。【106.指考甲】

亦即 $g(x)$ 為 $f(x)$ 在 $x=1$ 的切線
$\therefore g(x)=mx+k$，其中 $m=f'(1)$
(1) $f(x)$ 在 $x=1$ 和 $g(x)$ 在 $x=1$ 相交
$\therefore f(1)=g(1)$
(2) $m=g'(x) \Rightarrow g'(1)=f'(1)$
(3) 兩圖形只有一交點，
亦即 $f(x)-g(x)=0$ 在 $x=1$ 只有一解
且相切
$\Rightarrow f(x)-g(x)=a(x-1)^3$
(4) $f'(x)-g'(x)=3a(x-1)^2$
(5) $f''(x)-g''(x)=6a(x-1)$

(4) $f'(x)-g'(x)=0 \Rightarrow x=1$
(5) $f''(x)-g''(x)=0 \Rightarrow x=1$
(1)(2)(3)#

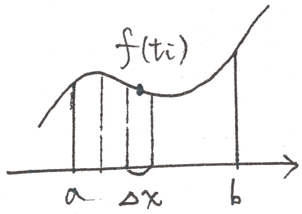
$\because g(x)$ 是一次式 $\therefore g''(x)=0$
$\therefore f''(x)=6a(x-1)$
$\therefore f''(1)=0$

積分

1、定積分：

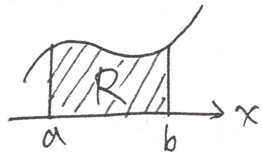
設 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 連續，將 $[a,b]$ 分成 n 等分，每等分 $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$，

定積分 $\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x}$。

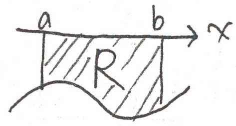


◎ 定積分的意義 ⇒ \underline{面積}

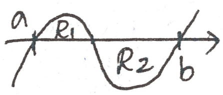
(1) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 恆正，則 $\int_a^b f(x)\,dx = \underline{R}$。



(2) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 恆負，則 $\int_a^b f(x)\,dx = \underline{-R}$。



《例》求 $\int_a^b f(x) = \underline{R_1 - R_2}$。



2、微積分基本定理：

設 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續且 $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$，$a<x<b$，

則 $g'(x) = \underline{f(x)}$。

$$\begin{tikzcd} \boxed{g(x) = \int_a^x f(t)\,dt} \arrow[r, bend left, "g'(x)", "\text{微分}"'] & \boxed{f(x)} \arrow[l, bend left, "\text{積分}"', "\int f(x)\,dx"] \end{tikzcd}$$

《例》求下列定積分與不定積分

(1) $\int (x^2+2x)\,dx$

$= \dfrac{x^3}{3} + x^2 + C$

(2) $\int_1^3 (x^2+3)\,dx$

$= \left(\dfrac{x^3}{3} + 3x\right)\Big|_1^3$

$= (9+9) - \left(\dfrac{1}{3}+3\right) = \dfrac{44}{3}$

(3) $\int x^n\,dx$

$= \dfrac{1}{n+1} x^{n+1} + C$

3、積分運算性質：

(1) $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

(2) $\int_a^a f(x)\,dx = \underline{0}$

(3) $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \underline{\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx}$

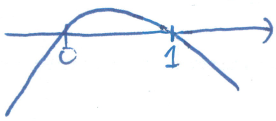
(4) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \underline{\int_a^c f(x)\,dx}$

1. 設四次多項式 $f(x)=x(1-x)(1+x^2)$。

(1) 選取積分區間 $a\le x\le b$，使得定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 達到最大值，並求此最大值。

：$[0,1]$，$\frac{13}{60}$。【98.指考甲】

畫 $f(x)=x(1-x)(1+x^2)$ 圖形



∵積分最大，即 x 軸上方面積最大

$\Rightarrow$ 取 $[a,b]=[0,1]$

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(-x^4+x^3-x^2+x)dx$

$=\frac{13}{60}$#

2. 已知多項式 $f(x)$ 滿足 $f''(x)=8x+11$，且 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 有局部極值，求 $f'(0)$。

：$\underline{\ -15\ }$。【99.指考甲】

$f'(x)=\int f''(x)\,dx$

$=4x^2+11x+C$

又 $f'(1)=0 \Rightarrow 4+11+C=0 \Rightarrow C=-15$

∴ $f'(x)=4x^2+11x-15 \Rightarrow f'(0)=-15$#

3. 已知實係數三次多項式函數 $y=f(x)$ 的最高次項係數為 12，其圖形與水平線 $y=25$ 交於相異的三點 $(0,25)$，$(1,25)$ 及 $(2,25)$

(1) 試求曲線 $y=f(x)$ 圖形上的反曲點坐標。

(2) 試求定積分 $\int_0^2 f(x)\,dx$ 之值。

：$\underline{(1)\,(1,25)\,;\,(2)\,50}$。【100.指考甲】

(1)

$f(x)-25=12x(x-1)(x-2)$

$f(x)=12(x^3-3x^2+2x)+25$

$=12x^3-36x^2+24x+25$

$f'(x)=36x^2-72x+24$

$f''(x)=72x-72$ ∴ $x=1$ 為反曲點 $(1,25)$#

x		1	
$f''(x)$	$-$	0	$+$

(2) $\int_0^2 f(x)\,dx$

$=(3x^4-12x^3+12x^2+25x)\Big|_0^2$

$=48-96+48+50$

$=50$#

4. 令 $f(x)=x(x-1)(x^3-2)$，試問有多少個實數 a 滿足 $\int_0^a f'(x)\,dx=0$？【101.指考甲】

：$\underline{\ 3\ }$。

$\int_0^a f'(x)dx=f(x)\Big|_0^a=f(a)-f(0)$

$=a(a-1)(a^3-2)-0=0$

∴ $a=0,1,\sqrt[3]{2}$ 及另外2個虛根

3#

5. 設 a，b 為實數，$f(x)$ 為 5 次實係數多項式且其最高次項係數為 a。若 $f(x)$ 滿足

$$\int_b^x f(t)\,dt=\frac{3}{2}(x^2+4x+5)^3-\frac{3}{2},$$

則 $a=\underline{\ 9\ }$，$b=\underline{\ -2\ }$。【104.指考甲】

$\int_b^b f(t)dt=0 \Rightarrow \frac32(b^2+4b+5)^3-\frac32=0$

∴ $b^2+4b+5=1 \Rightarrow b=-2$#

$\frac32(x^2+4x+5)^3-\frac32=\frac32x^6+\cdots\cdots$

↓微分

∴ $f(x)$ 最高項為 $9x^5+\cdots\cdots$ $\Rightarrow a=9$#

6. 已知一實係數三次多項式 $f(x)$ 在 $x=1$ 有極大值 3，且圖形 $y=f(x)$ 在 $(4,f(4))$ 之切線方程式為 $y-f(4)+5(x-4)=0$，$\Rightarrow y-f(4)=\underbrace{-5}_{m}(x-4)$

試問 $\int_1^4 f''(x)\,dx$ 之值為下列哪一選項？

(A) -5 (B) -3 (C) 0 (D) 3 (D) 5

：$\underline{\ (A)\ }$。【106.指考甲】

$f'(1)=0$，$f(1)=3$，$f'(4)=-5$

$\int_1^4 f''(x)\,dx=f(x)\Big|_1^4=f'(4)-f'(1)$

$=-5-0=-5$#

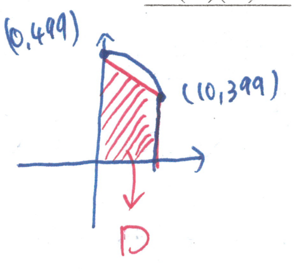
7. 設 $f(x)=-x^2+499$，且

$A=\int_0^{10} f(x)\,dx$、$B=\sum_{n=0}^{9} f(n)$、$C=\sum_{n=1}^{10} f(n)$、$D=\sum_{n=0}^{9}\frac{f(n)+f(n+1)}{2}$，試選出正確的選項。

(A) A 表示在坐標平面上函數 $y=-x^2+499$ 的圖形與直線 $y=0$、$x=0$、$x=10$ 所圍成的有界區域的面積

(B) $B<C$ (C) $B<A$ (D) $C<D$ (E) $A<D$

：$\underline{\ (A)(D)\ }$。【107.指考甲】



B表示上和

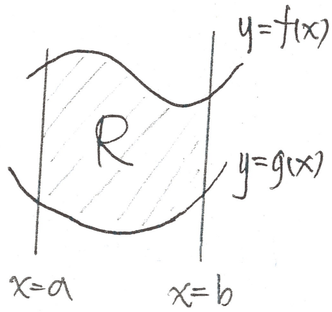
C表示下和

D表示梯形面積

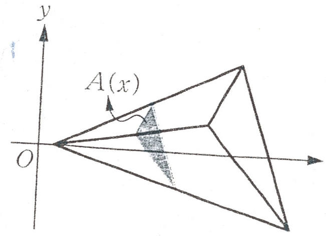
∴ $B>A>D>C$ (1)(4)#

4、積分的應用：

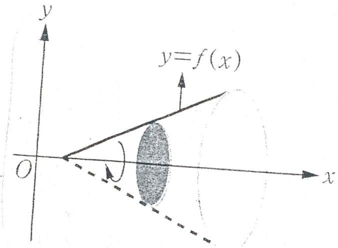
(1) 曲線面積：設 $f(x) \geq g(x)$，在 $[a,b]$，則 $f(x)$，$g(x)$ 和直線 $x=a$，$x=b$，所圍區域面積 $R = \underline{\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx}$。



(2) 立体圖形体積：設立体圖形 S 位於平面 $x=a$，$x=b$ 之間。若垂直 x 軸於 $(x,0,0)$ 的平面 E_x 與立体 S 的截面積為 $A(x)$，則立体 S 的体積 $= \underline{\int_a^b A(x)\,dx}$。



(3) 旋轉体体積：設 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 恆正，則 $y=f(x)$ 與直線 $x=a$，$x=b$ 及 x 軸圍成的區域，繞 x 軸旋轉所形成的旋轉体体積 $= \underline{\int_a^b \pi (f(x))^2\,dx}$。



8. 坐標平面上，已知函數 $f(x)=4x^3+x-2$ 的圖形以 $A(1,3)$ 為切點的切線為 L，則以切線 L 及曲線 $y=f(x)$ 為界所圍成區域的面積為 $\underline{\quad 27 \quad}$。【100.指考甲】

$f'(x)=12x^2+1$

$f'(1)=13$

$L:\ y-3=13(x-1)$

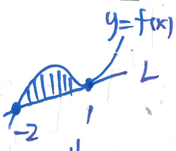
$\Rightarrow y=13x-10$

$\begin{cases} y=4x^3+x-2 \\ y=13x-10 \end{cases}$

$\Rightarrow 4x^3+x-2=13x-10$

$\Rightarrow 4x^3-12x+8=0$

$\Rightarrow x^3-3x+2=0 \Rightarrow (x-1)^2(x+2)=0$



$R=\int_{-2}^{1}(4x^3-12x+8)\,dx$

$=(x^4-6x^2+8x)\Big|_{-2}^{1}$

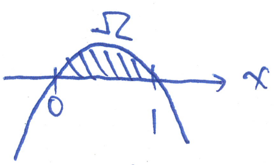
$=(1-6+8)-(16-24-16)$

$=3+24=27$ #

9. 在坐標平面上以 Ω 表曲線 $y=x-x^2$ 與直線 $y=0$ 所圍的有界區域。
(1) 試求 Ω 的面積。 (2) 若直線 $y=cx$ 將 Ω 分成面積相等的兩塊區域，試求 c 之值。

答：(1) $\frac{1}{6}$；(2) $1-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$。【103.指考甲】

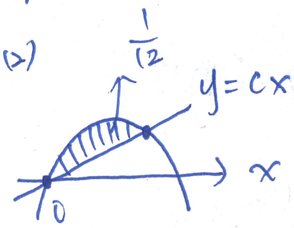
(1) $y=x-x^2=-(x^2-x)=-x(x-1)$



$\Omega=\int_0^1 (x-x^2)\,dx$

$=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{6}$ #

(2)



$\begin{cases} y=x-x^2 \\ y=cx \end{cases} \Rightarrow x-x^2=cx \Rightarrow x^2+(c-1)x=0 \Rightarrow x=1-c$

$\int_0^{1-c}[(x-x^2)-cx]\,dx=\frac{1}{12}$

$\Rightarrow \left[-\frac{x^3}{3}+\left(\frac{1-c}{2}\right)x^2\right]\Big|_0^{1-c}=\frac{1}{12}$

$\Rightarrow -\frac{(1-c)^3}{3}+\frac{(1-c)^3}{2}=\frac{1}{12} \Rightarrow \frac{(1-c)^3}{6}=\frac{1}{12}$

$(1-c)^3=\frac{1}{2}$

$1-c=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

$\therefore c=1-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ #

10. 設 $p(x)$ 為一實係數多項式，其各項係數均大於或等於 0。已知對所有的 $t\geq 1$，函數 $y=p(x)$、$y=-1-x^2$ 的圖形與直線 $x=1$、$x=t$ 所圍成有界區域的面積為 $t^4+t^3+t^2+t+C$。
(1)說明 $p(x)>-1-x^2$ 對所有的 $x\geq 1$ 均成立。
(2)設 $t\geq 1$，試求 $\int_1^t (-1-x^2)\,dx$。
(3)試求 C。
(4)試求 $p(x)$。【102.指考甲】

答：(2) $-\frac{1}{3}t^3-t+\frac{4}{3}$ (3) -4 (4) $4x^3+2x^2+2x$

(1) ∵ $p(x)$ 各項係數均非負 ∴ $p(x)>0$，當 $x\geq 1$

$-1-x^2<0$，當 $x>1 \Rightarrow p(x)>-1-x^2$ 當 $x\geq 1$

(2) $\int_1^t(-1-x^2)\,dx=\left(-x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^t$

$=-t-\frac{t^3}{3}-\left(-1-\frac{1}{3}\right)=\underline{-\frac{t^3}{3}-t+\frac{4}{3}}$ #

(3) $\int_1^t[p(x)-(-1-x^2)]\,dx=t^4+t^3+t^2+t+C$

$\Rightarrow \int_1^1[p(x)-(-1-x^2)]\,dx=0=4+C$

$\therefore C=-4$ #

(4) 由(3)知（微分）

$p(x)-(-1-x^2)=4x^3+3x^2+2x+1$

$\therefore p(x)=4x^3+2x^2+2x$ #