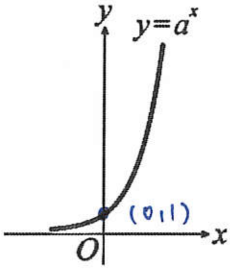
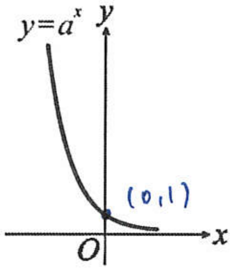
2-1 指數函數

1. 指數函數圖形

設 $a>0$ 且 $a\neq 1$，函數 $f(x)=a^x$ 稱為以 a 為底的的指數函數。

$f(x)=a^x$ 的定義域為 $\{x \mid x\in \mathbb{R}\}$，值域為 $\{y \mid y>0\}$。

	$a>1$	$0<a<1$	特徵
指數 $y=a^x$			(1)必過 (0,1) (2)恆在 x 軸上方 (3)以 x 軸 為漸近線 (4)凹口向 上
	遞增函數： 圖形越往右，函數值越大。 $a^{x_1}>a^{x_2}\Rightarrow x_1>x_2$	遞減函數： 圖形越往右，函數值越小。 $a^{x_1}>a^{x_2}\Rightarrow x_1<x_2$	

2. 指數方程式及不等式

(1)一對一性質：設 $a\neq 1$，若 $a^{x_1}=a^{x_2}$，則 $x_1=x_2$。

(2)遞增(減)性質：設 $a>1$，若 $a^{x_1}>a^{x_2}$，則 $x_1>x_2$；

設 $0<a<1$，若 $a^{x_1}>a^{x_2}$，則 $x_1<x_2$。

EXAMPLE 1

試求出下列方程式的所有實根 x：

(1) $9^{-x}-2\times 3^{1-x}-27=0$

(2) $6^x-8\times 3^x+9\times 2^x-72=0$

答案：(1)－2 (2)3

(1) $(3^{-x})^2-2\times 3^1\times(3^{-x})-27=0$

$(3^{-x}-9)(3^{-x}+3)=0$

$3^{-x}=9$ or -3(不合) $=3^2$

$\therefore x=-2$

(2) $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

$(3^x+9)(2^x-8)=0 \Rightarrow 3^x=-9$(不合) 或 $2^x=8=2^3$

$\therefore x=3$

EXAMPLE 2

設 $f(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$，若 $f(a)=\dfrac{15}{17}$，求 a 值。

答案：2

$\dfrac{2^a-2^{-a}}{2^a+2^{-a}}=\dfrac{15}{17} \Rightarrow 17\cdot(2^a-2^{-a})=15(2^a+2^{-a})$

$2\cdot 2^a-32\cdot 2^{-a}=0$

$\Rightarrow (2^a)^2=16$，$2^a=4$ 或 -4(不合) $=2^2$

$\therefore a=2$

EXAMPLE 3

設$a=\left(\frac{1}{3}\right)^{0.4}$，$b=\frac{1}{\sqrt[6]{9}}$，$c=\sqrt[5]{\frac{1}{27}}$，$d=9^{-\frac{1}{4}}$，

求 a，b，c，d的大小關係。

答：$b>a>d>c$

$a=(3^{-1})^{0.4}=3^{-0.4}$

$b=\frac{1}{3^{\frac{2}{6}}}=3^{-\frac{1}{3}}$

$c=\sqrt[5]{3^{-3}}=3^{\frac{-3}{5}}$

$d=3^{-\frac{2}{4}}=3^{-\frac{1}{2}}$

$-\frac{3}{5}<-\frac{1}{2}<-0.4<-\frac{1}{3}$

$\therefore c<d<a<b$

EXAMPLE 4

下列各數中，哪一個數最小？（單選）

(1) $0.1^{0.1}$ (2) $0.2^{0.2}$ (3) $0.3^{0.3}$ (4) $0.4^{0.4}$ (5) $0.5^{0.5}$

答：(4)

㊟ 比大小：同底（或同次方）

$0.1^{0.1}$

$0.2^{0.2}=(0.04)^{0.1}$

$0.3^{0.3}=(0.027)^{0.1}$

$0.4^{0.4}=(0.0256)^{0.1}$

$0.5^{0.5}=(0.03125)^{0.1}$

選(4)

EXAMPLE 5

解不等式：

(1) $2^{x+2}>4^{11-x}$ (2) $(0.25)^{3x^2}<(0.5)^{10x+4}$ (3) $(\frac{1}{2})^{2x}+3\times(\frac{1}{2})^{x-1}-7>0$

答：(1) $x>\frac{20}{3}$ (2) $x>2$ 或 $x<-\frac{1}{3}$ (3) $x<0$

(1) $2^{x+2}>2^{22-2x}$，$x+2>22-2x$，$3x>20$，$x>\frac{20}{3}$

(2) $(0.5)^{6x^2}<(0.5)^{10x+4}$，$6x^2>10x+4$，$3x^2-5x-2>0$，$(3x+1)(x-2)>0$，

$x>2$ 或 $x<\frac{-1}{3}$

(3) $[(\frac{1}{2})^x]^2+3\times(\frac{1}{2})^{-1}\times(\frac{1}{2})^x-7>0$，$[(\frac{1}{2})^x]^2+6(\frac{1}{2})^x-7>0$，$[(\frac{1}{2})^x+7][(\frac{1}{2})^x-1]>0$，

$(\frac{1}{2})^x>1$ 或 $(\frac{1}{2})^x<-7$（不合），$(\frac{1}{2})^x>(\frac{1}{2})^0$，$x<0$

EXAMPLE 6

設$0\leq x\leq 2$，且$f(x)=4^x-6\cdot 2^x+5$，若$f(x)$的最大值為M、最小值為m，求數對（M，m）。

答案：0；-4

$f(x)=(2^x)^2-6\cdot(2^x)+5$

$=(2^x-3)^2-4$

又 $1=2^0\leq 2^x\leq 2^2=4$

$\therefore$ 當 $2^x=1$ 時，$f(x)$有 $M=1-6+5=0$

$2^x=3$ 時，$f(x)$有 $m=-4$

EXAMPLE 7

$f(x)=4(4^x+4^{-x})-12(2^x+2^{-x})+19$，求$f(x)$的最小值及此時的$x$值。

答案：3；0

令 $t=2^x+2^{-x}\geq 2$

$t^2=4^x+2+4^{-x}$，$4^x+4^{-x}=t^2-2$

$f(x)=4(t^2-2)-12t+19$

$=4t^2-12t+11$

$=4(t-\frac{3}{2})^2+11-9$

當 $t=2$ 時，$f(x)$有 $m=4(4-2)-24+19=3$

此時 $2^x=2^{-x}$，$x=-x$，$x=0$

EXAMPLE 8

已知 $x>0$，$y>0$，$x+2y=12$，試求 3^x+9^y 的最小值。

答：1458

[法一] $\frac{3^x+3^{2y}}{2} \geq \sqrt{3^x \cdot 3^{2y}} = \sqrt{3^{x+2y}} = 3^6$

$\therefore 3^x+3^{2y} \geq 2\times 729 = 1458$

[法二] $3^x+3^{2y} = 3^x+3^{12-x} = 3^x+\frac{3^{12}}{3^x}$

$\frac{3^x+\frac{3^{12}}{3^x}}{2} \geq \sqrt{3^x \cdot \frac{3^{12}}{3^x}} = 3^6$，$3^x+\frac{3^{12}}{3^x} \geq 2\times 729 = 1458$

EXAMPLE ~~9~~ 10

培養皿中有 A 菌及 B 菌兩種細菌，A 細菌每兩天增加為原來的兩倍，B 細菌的半衰期 x 天，一開始 A 菌及 B 菌的數量相同，經過 12 天，A 菌是 B 菌的 1024 倍，求則 x 值。

答案：3

設 A細菌每日增加為原來 a 倍，即 $1\to a$

2日後為 $a^2=2$

設 B細菌每日變為原來 b 倍，即 $1\to b$

x 日後為 $b^x=\frac{1}{2}$

12日後，$\frac{A:\ a^{12}}{B:\ b^{12}} = 1024$，$\frac{2^6}{b^{12}} = 1024$，$b^{12}=\left(\frac{1}{2}\right)^4$

$\therefore b^3=\frac{1}{2}$，$x=3$

EXAMPLE ~~10~~ 9

在養分充足的情況下，細菌的數量會以指數函數的方式成長。假設細菌 A 的數量每兩小時可以成長為三倍。若養分充足且一開始兩種細菌的數量相等，則

(1)A 細菌每小時可以成長為原來的幾倍？

(2)經過幾小時後，細菌 A 會變成原來的 2187 倍。

(1) A 每小時 $1\to a$，$a^2=3$，$a=\sqrt{3}$

(2) $a^t = 2187 = 3^7$，$3^{\frac{t}{2}} = 3^7$，$t=14$

EXAMPLE 11

科學家經過長期的追蹤調查某稀有植物，發現該植物的數量一直符合數學模式

$B(t) = \dfrac{64}{1+9\cdot 3^{-0.1(t+10)}}$，$t\geq 0$（即 t 年後植物的數量有 $B(t)$ 棵）。若已知現有植物 16 棵，未來該植物的數量仍按照這個數學模式成長，則再經過幾年，該植物的數量才會達到 32 棵。

答：10

$B(0)=16 \Rightarrow \frac{64}{1+9\cdot 3^{-1}} = 16$

$\frac{64}{1+9\cdot 3^{-0.1(t+10)}} = 32$，$1+9\cdot 3^{-0.1(t+10)} = 2$

$3^{-0.1(t+10)} = \frac{1}{9} = 3^{-2}$，$t+10=20$，$t=10$

EXAMPLE 12

摩爾定律由 Intel 創始人之一戈登・摩爾所提出：積體電路上可容納的電晶體數目，約每隔 2 年便會增加 1 倍。而 Intel 執行長大衛・豪斯則提出：預計每 18 個月會將晶片的效能提高 1 倍。假設豪斯提出的效能提高也是建立在電晶體數目的加倍上。依照摩爾與豪斯的預估，經過 30 年後，兩者在相同積體電路上可容納的電晶體數目會相差幾倍？

戈登：$1\to a$，$a^2=2$，$a=2^{\frac{1}{2}}$

大衛：$1\to b$，$b^{\frac{3}{2}}=2$，$b=2^{\frac{2}{3}}$

30年，$\frac{a^{30}}{b^{30}} = \frac{(2^{\frac{1}{2}})^{30}}{(2^{\frac{2}{3}})^{30}} = \frac{2^{15}}{2^{20}} = \frac{1}{2^5}$

EXAMPLE 13

小泰高中畢業即將進入大學，小泰的爸爸在考慮是否要申請助學貸款。假設小泰每學期學費為 3 萬元，總共要繳交 8 個學期(4 年)的學費。已知當時的銀行存款銀利率為 2%，以每半年複利計息。

(1)小泰申請助學貸款，並且 4 年後一次還清助學貸款(助學貸款不需要利息)，請問 4 年後小泰需繳多少錢？

(2)小泰入學後的第一學期繳了 3 萬元的學費，若將此 3 萬元存入銀行，經過 4 年後此筆存款的本利和為多少錢？

(3)若小泰將原本每學期要繳交的 3 萬元的學費，改為每半年存入銀行 3 萬元，經過 4 年後，此筆存款的本利和為多少錢？

◎ 本利和 = 本金 $(1+利率)^{期數}$

(1) $3\times 8=24$ 萬

(2) $3\times 1.01^8=3\times 1.08285\cdots\approx 32486$ (元)

(3) $3\times 1.01^8+3\times 1.01^7+3\times 1.01^6+\cdots+3\times 1.01=\dfrac{3\times 1.01(1.01^8-1)}{1.01-1}\approx 251056$ (元)

等比，$r=1.01$

◎ $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

EXAMPLE 14

小建因為買房於今年一月初向銀行貸款 800 萬元，以年利率 3 %，每個月複利計算，規則二十年平均攤還本金與利息，求小建每個月月底要還銀行多少元。（請小數點以下無條件捨去計算至整數元，已知 $1.03^{20}\approx 1.806$，$1.0025^{240}\approx 1.821$，$1.0025^{239}\approx 1.816$）

答案：44361

每個月：$1\to 1+\dfrac{3\%}{12}=1.0025$ ． 20年 = 240個月

設每個月還 N 元

第1個月還 第2個月還 最後一個月 欠款

$N(1.0025)^{239}+N(1.0025)^{238}+N(1.0025)^{237}+\cdots+N=800(1.0025)^{240}$

$r=1.0025$

$\dfrac{N(1.0025^{240}-1)}{1.0025-1}=800\times 1.0025^{240}$，$N=\dfrac{800\times 1.821\times 0.0025}{0.821}\approx 4.4361$ (萬)

EXAMPLE 15

點 (a, b) 是指數函數 $y=3^x$ 圖形上的任一點，則下列哪些選項中的點也會在此 $y=3^x$ 的圖形上？

(1) $(3a, 3b)$ (2) $(a+1, 3b)$ (3) $(3a, b+1)$ (4) $(a-2, \frac{b}{9})$ (5) $(\frac{a}{3}, b-1)$

答案：24 $3^a=b$

(1) $3^{3a}=27\cdot 3^a=27b$ (×)

(2) $3^{a+1}=3^1\cdot 3^a=3b$ (○)

(3) $3^{3a}=27\cdot 3^a=27b$ (×)

(4) $3^{a-2}=\frac{3^a}{3^2}=\frac{b}{9}$ (○)

(5) $3^{\frac{a}{3}}=\sqrt[3]{3^a}=\sqrt[3]{b}$ (×)

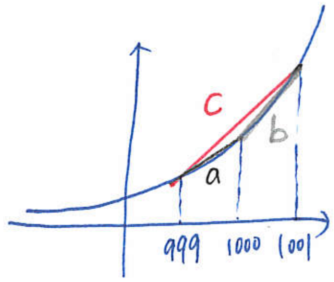
選 (2)(4)

EXAMPLE 16

令 $a=2.5^{1000}-2.5^{999}$，$b=2.5^{1001}-2.5^{1000}$，$c=\dfrac{2.5^{1001}-2.5^{999}}{2}$。請比較三者的大小關係。

答案：$b>c>a$

《概念》 $y=2.5^x$



$b>c>a$

[代數] $a=2.5^{999}(2.5-1)=2.5^{999}\times 1.5$

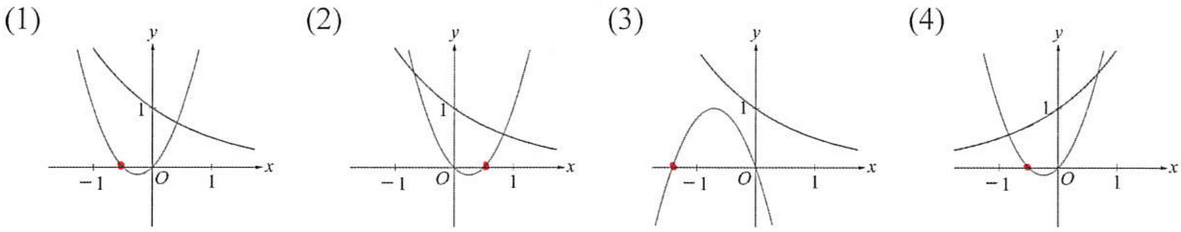
$b=2.5^{999}(2.5^2-2.5)=2.5^{999}\times 4$

$c=2.5^{999}\left(\frac{2.5^2-1}{2}\right)=2.5^{999}\times 2.625$

$\therefore b>c>a$

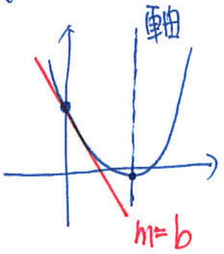
EXAMPLE 17

下列圖形中，二次函數 $y=ax^2+bx$ 與指數函數 $y=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x$ 之圖形可能為



答案：~~(1)(4)~~ (3)(4)

$y=ax^2+bx+c$



a：開口方向

b：y截距之切線斜率

軸：$x=\frac{-b}{2a}$

(1) 由拋物線知 $-\frac{1}{2}<\frac{-b}{2a}<0 \Rightarrow 1>\frac{b}{a}>0$，$\frac{a}{b}>1$ (×)

(2) 〃 ：$0<\frac{-b}{2a}<\frac{1}{2} \Rightarrow 0>\frac{b}{a}>-1$，$-1<\frac{a}{b}<0$ (×)

(3) 〃 ：$-1<\frac{-b}{2a}<\frac{-1}{2} \Rightarrow 2>\frac{b}{a}>1$，$\frac{1}{2}<\frac{a}{b}<1$ (○)

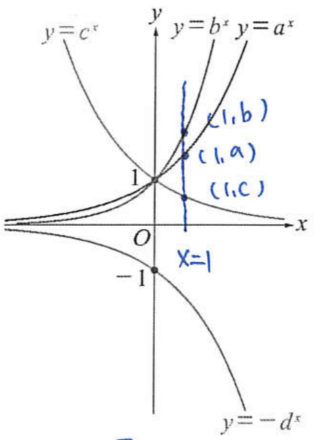
(4) 〃 ：$-\frac{1}{2}<\frac{-b}{2a}<0 \Rightarrow 1>\frac{b}{a}>0$，$\frac{a}{b}>1$ (○)

選 (3)(4)

EXAMPLE 18

下圖是指數函數 $y=a^x$，$y=b^x$，$y=c^x$，$y=-d^x$ 的圖形，已知與 $y=a^x$ 與 $y=-d^x$ 的圖形對稱 x 軸，試比較 a，b，c，d 的大小關係。

答案：$b>a=d>c$



∵ $y=a^x$ 和 $y=-d^x$ 對稱 x 軸，故 $a=d$.

作鉛直線 $x=1$，與 $y=a^x$，$y=b^x$，$y=c^x$ 之交點分別為 $(1,a)$，$(1,b)$，$(1,c)$.

由圖知 $b>a>c$ ∴ $b>a=d>c$

EXAMPLE 19

函數 $y=f(x)=a^{-x+h}-k$ 的部分圖形如下，則下列選項何者正確？

(1) $0<a<1$，$h>0$，$k>0$

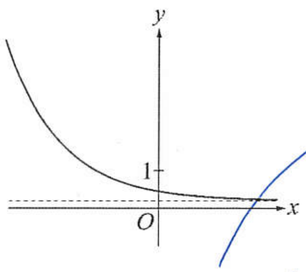
(2) $0<a<1$，$h<0$，$k<0$

(3) $0<a<1$，$h>0$，$k<0$

(4) $a>1$，$h>0$，$k>0$

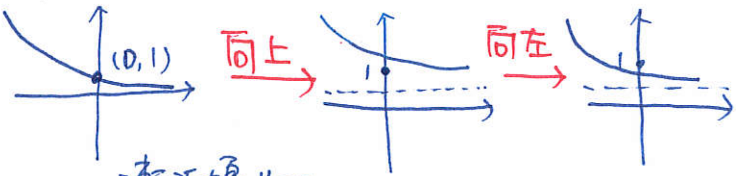
(5) $a>1$，$h<0$，$k<0$。

答案：(5)



$0<\frac{1}{a}<1$，$a>1$

$y=a^{-x}=\left(\frac{1}{a}\right)^x \xrightarrow[\text{向下移}k]{y\to y+k} y=a^{-x}-k \xrightarrow[\text{向右移}h]{x\to x-h} y=a^{-(x-h)}-k$



漸近線 $y=0$ ∴ $k<0$

∴ $h<0$

選(5)#

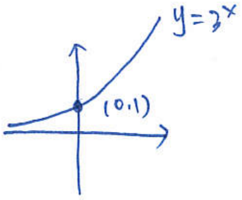
EXAMPLE 20

下列哪一個函數圖形與直線 $x-y=0$ 沒有交點？（單選）

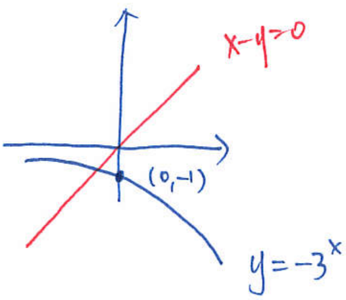
(1) $y=-3^x$ (2) $y=3^{-x}$ (3) $y=3^{x-2}$ (4) $y=3^x-1$ (5) $y=3^{|x|}$

答：(5)

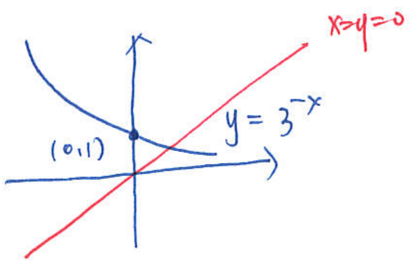
$y=3^x$



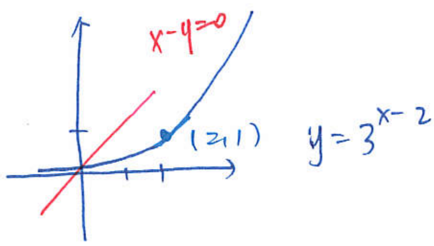
(1) $y\to -y$：對稱 x 軸



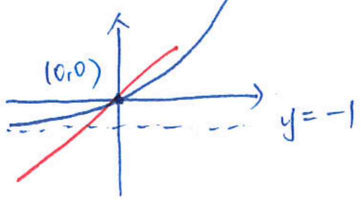
(2) $x\to -x$：對稱 y 軸



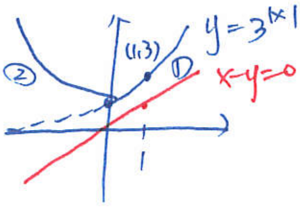
(3) $x\to x-2$：向右移 2



(4) $y\to y+1$：向下移 1



(5) $|x|$：① 先作 $x\geq 0$，$y=3^x$
② 對稱 y 軸



選(5)

2-2 對數與對數律

1. 對數：

設 a,b 為正數，若 b 可以表成 a 的乘冪，即 $a^x=b$，則 $x=\log_a b$。(亦即 $b=a^{\log_a b}$)

2. 對數律：

(1)加：$\log_a x+\log_a y=$ $\underline{\log_a(xy)}$

(2)減：$\log_a x-\log_a y=$ $\underline{\log_a\left(\frac{x}{y}\right)}$

(3)係數積：$\frac{n}{m}\log_a x=$ $\underline{\log_{a^m} x^n}$

(4)乘：$\log_a b\times\log_b c=$ $\underline{\log_a c}$　　倒數關係：$\frac{1}{\log_a b}=$ $\underline{\log_b a}$

(5)除：$\frac{\log_a x}{\log_a y}=$ $\underline{\log_y x}$　　換底公式：$\log_a b=$ $\underline{\frac{\log_c b}{\log_c a}}$

✓(6) 定義：$a^{\log_a b}=b$

$a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$

3. 位數問題：設 $x=10^k$

(1)若 $k>0$，則 x 為 $\underline{[k]+1}$ 位數

(2)若 $k<0$，則 x 在小數點後第 $\underline{|[k]|}$ 位開始不為 0。

EXAMPLE 1

若 x 的值使得對數 $\log_{(6-x)}(-x^2-x+6)$ 有意義，則滿足條件的整數 x 有幾個。

答案：4

$\log_a b$ 有意義：① $a>0$ ② $a\neq 1$ ③ $b>0$

$$\begin{cases}6-x>0\\6-x\neq 1\\-x^2-x+6>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<6\\x\neq 5\\x^2+x-6<0\end{cases}$$

$\Rightarrow (x+3)(x-2)<0$

$\Rightarrow -3<x<2$

$\Rightarrow x=-2,-1,0,1$

共 4 組解

EXAMPLE 2

若 a,b 均為 1，3，5，7，9 五種數的任一數字（a,b 可相等），則 $\log b-\log a$ 有幾種相異之值。

答案：19

$\log b-\log a=\log\left(\frac{b}{a}\right)$

$$\begin{matrix}\frac{9}{9}&\frac{9}{7}&\frac{9}{5}&\boxed{\frac{9}{3}}&\frac{9}{1}\\\frac{7}{9}&\frac{7}{7}&\frac{7}{5}&\frac{7}{3}&\frac{7}{1}\\\frac{5}{9}&\frac{5}{7}&\frac{5}{5}&\frac{5}{3}&\frac{5}{1}\\\frac{3}{9}&\frac{3}{7}&\frac{3}{5}&\frac{3}{3}&\boxed{\frac{3}{1}}\\\frac{1}{9}&\frac{1}{7}&\frac{1}{5}&\frac{1}{3}&\frac{1}{1}\end{matrix}$$

共 $25-4-1-1=19$ 個

EXAMPLE 3

(是非)下列選項何者為正確？

(1) $\log(3-\pi)^2=2\log(3-\pi)$　(2) $\log_{(-3)}(-27)=3$　(3) $5^{-\log_5 3}=-3$

(4) $\log_2 7=\log_7 2$　(5) $(\log_2 3)^5=5(\log_2 3)$

答案：~~(2)(4)~~ X, X, X, X, X

(1) $3-\pi<0$，$\therefore \log(3-\pi)$ 無意義 (X)

(2) $\log_a b$ 無意義 (X)

(3) $5^{-\log_5 3}=5^{\log_5\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$ (X)

(4) $\log_2 7=\frac{1}{\log_7 2}$ (X)

(5) $\log_2(3^5)=5\log_2 3$ (X)

EXAMPLE 4

試求出下列各小題的值：

(1) $\log_2\pi+\log_{\frac{1}{2}}\frac{\pi}{4}$

(3) $\log_2\sqrt{2}+\log_3\frac{1}{27}-\log_6 36$

(2) $\log_3 54+\log_3 6-2\log_3 2$

4 (~~2~~) $(\log_2 5+\log_4 0.2)(\log_5 2+\log_{25}0.5)$

5 (~~3~~) $\frac{1}{\log_2 10}+\frac{2}{\log_5 10}+\frac{1}{\log_{20}10}$

6 (~~4~~) $\log_2(9^{\log_3 5})+(\log_2 3)(\log_{\frac{1}{3}}25)$

7 (~~5~~) $(\log 3+\log_3 10)^2-(\log 3-\log_3 10)^2$

8 (~~6~~) $5^{\frac{\log_2 6}{\log_2 5}}+4^{\frac{1}{\log_5 4}}+(5\sqrt{5})^{\log_5 4}$

答案：(1)2　(2)$\frac{1}{4}$　(3)3　(4) 0　(5)4　(6)19

◎ 1. 化同底　2. 係數為 1

(1) $\log_2\pi+\log_{2^{-1}}\left(\frac{\pi}{4}\right)$
$=\log_2\pi-\log_2\left(\frac{\pi}{4}\right)=\log_2\frac{\pi}{\frac{\pi}{4}}=\log_2 4=2$

(2) $\log_3 54+\log_3 6-\log_3 2^2$
$=\log_3\frac{54\times 6}{4}=\log_3 81=4$

(3) $\frac{1}{2}+(-3)-2=\frac{-9}{2}$

(4) $\left(\log_2 5+\log_{2^2}\frac{1}{5}\right)\left(\log_5 2+\log_{5^2}\frac{1}{2}\right)$
$=\left(\log_2 5+\frac{-1}{2}\log_2 5\right)\left(\log_5 2+\frac{-1}{2}\log_5 2\right)$
$=\frac{1}{2}\times\log_2 5\times\frac{1}{2}\log_5 2=\frac{1}{4}$

(5) $\log 2+2\log 5+\log 20$
$=\log(2\times 5^2\times 20)=\log 1000=3$

(6) $\log_2(5^{\log_3 9})+(\log_2 3)\times(\log_{3^{-1}}5^2)$
$=\log_2 5^2+(\log_2 3)\times(-2\log_3 5)$
$=2\log_2 5-2\log_2 5=0$

(7) $(\log 3)^2+2(\log 3)(\log_3 10)+(\log_3 10)^2$
$-(\log 3)^2+2(\log 3)(\log_3 10)-(\log_3 10)^2$
$=4(\log_{10}3)(\log_3 10)=4$

(8) $5^{\log_5 6}+4^{\log_4 5}+4^{\log_5 5\sqrt{5}}=6+5+4^{\frac{3}{2}}=19$

EXAMPLE 5

設 a 為一正實數，且滿足 $a^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，則下列何者正確？

(1) $a^2=2$　(2) $a^{4\sqrt{2}}=4$　(3) $a>1$　(4) $a<\sqrt{2}$

(5) $\log_{\sqrt{2}}a=\sqrt{2}$。

答案：(2)(3)(4)

(1) $a^2=(a^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}=2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\neq 2^{\frac{1}{2}}$ (x)

(2) $a^{4\sqrt{2}}=(a^{\sqrt{2}})^4=(\sqrt{2})^4=2^2=4$ (o)

(3) $a=(a^{\sqrt{2}})^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=(\sqrt{2})^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=2^{\frac{1}{2\sqrt{2}}}>2^0=1$ (o)

(4) $a=2^{\frac{1}{2\sqrt{2}}}<2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$ (o)

(5) $\log_{\sqrt{2}}a=\log_{2^{\frac{1}{2}}}2^{\frac{1}{2\sqrt{2}}}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (x)

EXAMPLE 6

設 $x>1$，$f(x)=\log_4(\frac{x^2}{8})+\log_x(\frac{8}{\sqrt{x}})$，則 $f(x)$ 之最小值為 $a+b\sqrt{c}$（最簡根式），a，b，$c\in Z$，求 a,b,c 值。

答案：-2；2；3

$f(x)=\log_4 x^2-\log_4 8+\log_x 8-\log_x\sqrt{x}$
$=2\log_{2^2}x-\log_{2^2}2^3+\log_x 2^3-\log_x x^{\frac{1}{2}}$
$=\log_2 x-\frac{3}{2}+3\log_x 2-\frac{1}{2}$
$=\log_2 x+3\log_x 2-2\geq 2\sqrt{3}-2\Rightarrow a=-2,b=2,c=3$

$\left(\because\ \frac{\log_2 x+3\log_x 2}{2}\geq\sqrt{(\log_2 x)(3\log_x 2)}=\sqrt{3}\right)$

EXAMPLE 7

設 a,b 為正實數，且 $\log_7 a=15$ ， $\log_7 b=17$ ，則 $\log_7(a+b)$ 的值最接近的整數為何？

$a=7^{15}$, $b=7^{17}$

$\log_7(7^{15}+7^{17})=\log_7(7^{15}\times 50)$

$=\log_7 7^{15}+\log_7 50$

$\approx 15+2=\underline{17}$ #

EXAMPLE 8

已知坐標平面上三點（3，log3）、（6，log6）與（12，y）在同一直線上，求 10^y 的值。

答案：24

$\frac{\log 6-\log 3}{6-3}=\frac{y-\log 3}{12-3}$

$\therefore y-\log 3=3\log\frac{6}{3}=3\log 2$

$\therefore y=\log 3+3\log 2=\log 3+\log 2^3=\log 24$.

$10^y=10^{\log 24}=\underline{24}$ #

EXAMPLE 9

設 x 與 y 的關係式為 $y=20\times\log_2\left(\frac{x}{3}\right)^2$ ，且當 $x=x_1,x_2$ 時，其對應的 y 值分別為 y_1,y_2 ，其中 x_1,x_2 皆為正實數。若 $x_1=2x_2$ ，則對於 y_1 與 y_2 的關係，試選出正確的選項。

(1) $y_1=2y_2$　(2) $y_1=20\log_2(y_2+20)$

(3) $y_1=20\log_2(y_2)+\log_2 20$　(4) $y_1=y_2+1$

(5) $y_1=y_2+40$

答案：(5)

$y_1=20\log_2\left(\frac{x_1}{3}\right)^2=20\log_2\left(\frac{2x_2}{3}\right)^2$

$\left[y_2=20\log_2\left(\frac{x_2}{3}\right)^2\right]$

$=20\log_2\left[4\cdot\left(\frac{x_2}{3}\right)^2\right]=20\left[\log_2 4+\log_2\left(\frac{x_2}{3}\right)^2\right]$

$=20\times 2+20\log_2\left(\frac{x_2}{3}\right)^2=40+y_2$，$\underline{選(5)}$

EXAMPLE 10

設 x，y 為兩實數滿足 $\frac{x}{\log_2 10}+\frac{y}{\log_5 10}=2$，請選出正確的選項。

(1) $2^x\times 5^y=\frac{1}{100}$　(2) x 必為正實數　(3) $x+y=4$

(4) y 可能為負實數

(5)在坐標平面上，(x，y) 所形成的圖形與兩坐標軸在第一象限所圍成的區域面積大於 6。

答案：(4)(5)

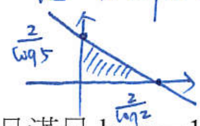
(1) 原式：$x\log 2+y\log 5=2$

$\Rightarrow \log 2^x+\log 5^y=\log 100\Rightarrow 2^x\cdot 5^y=100$

(2)(3) $x=0$, $y=\log_5 100$ (x)

(4) $y=-1$, $x=\log_2 500$ (o)

(5) 由 $x\log 2+y\log 5=2$ 知圖形為一直線



面積 $=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\log 5}\times\frac{2}{\log 2}\approx 9$, … (o)，選(4)(5)

EXAMPLE 11

設 a，b，c 為實數，$\log2\approx 0.3010$，$\log3\approx 0.4771$ 且滿足 $\log a=1.1$，$\log b=2.2$，$\log c=3.3$，則下列何者正確？

(1) $1<a<10$　(2) $1000<c<2000$　(3) $b=2a$　(4) $a+c=2b$　(5) $a\times c=b^2$。

答案：(1)(2)(5)

(1) $a=10^{1.1}=10^{0.1}\times 10^1>10$ (x)

$b=10^{2.2}=10^{0.2}\times 10^2$

(2) $c=10^{3.3}=10^{0.3}\times 10^3<10^{\log 2}\times 10^3=2000$ (o)

(3) $2a=2\times 10^{1.1}\neq b$

(4) $\frac{10^{1.1}+10^{3.3}}{2}>10^3\neq b$

(5) $a\times c=10^{1.1}\times 10^{3.3}=10^{4.4}$

$b^2=(10^{2.2})^2=10^{4.4}$

選(2)(5)

$\log 5 = 1 - \log 2 = 0.6990$

$\log 6 = \log 2 + \log 3 = 0.7781$

EXAMPLE 12

已知 $\log 2 \approx 0.3010$，$\log 3 \approx 0.4771$，$\log 7 \approx 0.8451$，若 $3^{100} \times 2^{50}$ 為 a 位正整數，其首位數字為 b，個位數字為 c，求 $a+b+c$ 值。

答案：72

位數、首位數字 ⇒ 科學記號 (log)
個位數字 ⇒ 找規律

$3^{100} \times 2^{50} = (10^{\log 3})^{100} \times (10^{\log 2})^{50}$

$= 10^{100\log 3 + 50\log 2} \approx 10^{62.76}$

$10^{\log 5} \times 10^{62} \le 10^{0.76} \times 10^{62} \le 10^{\log 6} \times 10^{62}$

$\therefore a = 63,\ b = 5$

$3^1 \Rightarrow 3,\ 3^2 \Rightarrow 9,\ 3^3 \Rightarrow 7,\ 3^4 \Rightarrow 1,\ 3^5 \Rightarrow 3 \cdots$ 4 次 1 循環

$2^1 \Rightarrow 2,\ 2^2 \Rightarrow 4,\ 2^3 \Rightarrow 8,\ 2^4 \Rightarrow 6,\ 2^5 \Rightarrow 2 \cdots$ 4 次 1 循環

$3^{100} \Rightarrow 1,\ 2^{50} \Rightarrow 4$ 個位數 $1 \times 4 = 4 = c$

$a+b+c = 63+5+4 = 72$

$\log 8 \approx 0.9030$

$\log 9 \approx 0.9542$

EXAMPLE 13

已知 $\log 2 \approx 0.3010$，$\log 3 \approx 0.4771$，設 $a = 12^{12}$，$b = 18^{10}$，則下列何者正確？

(1) a 是 12 位數 (2) b 是 13 位數

(3) $a \times b$ 是 25 位數 (4) $a+b$ 是 14 位數

(5) $\frac{b}{a}$ 在小數點後第 1 位開始出現不為 0 的數。

答案：(2)(4)(5)

$a = 12^{12} = (10^{\log 12})^{12} = 10^{12(2\log 2 + \log 3)} \approx 10^{12.95}$

$b = 18^{10} = (10^{\log 18})^{10} = 10^{10(\log 2 + 2\log 3)} \approx 10^{12.55}$

(1) $a = 10^{0.95} \times 10^{12} \approx 10^{\log 8.\cdots} \times 10^{12} = 8.\cdots \times 10^{12}$，是 13 位

(2) $b = 10^{0.55} \times 10^{12} \approx 10^{\log 3.\cdots} \times 10^{12} \approx 3.\cdots \times 10^{12}$，是 13 位

(3) $a \times b \approx 10^{25.5}$，是 26 位

(4) $a + b \approx 1\times.\cdots \times 10^{12} = 1.\cdots \times 10^{13}$，是 14 位

(5) $\frac{b}{a} \approx 10^{-0.4} = 10^{0.6} \times 10^{-1}$，小數點後第 1 位就不為 0

(2)(4)(5)

EXAMPLE 14

芭樂電腦公司研發出一個測螢幕雜訊的方法。假設某螢幕的每平方公分有 n 個雜訊點，則其「雜訊程度」$r(n)$ 定義為 $r(n) = 1 + \frac{1}{5}\log_4 n$ 。現已知 A 螢幕其雜訊程度為 67.3，B 螢幕其雜訊程度為 48.1。若 A 螢幕每平方公分的雜訊點為 B 螢幕的 k 倍，則 k 的整數部分為______位數。

答案：58

$r(n) = 1 + \frac{1}{5}\log_4 n \Rightarrow r(n) - 1 = \frac{1}{5}\log_4 n \Rightarrow 5 \cdot r(n) - 5 = \log_4 n$

$\therefore n = 4^{5 \cdot r(n) - 5}$

$67.3 = 1 + \frac{1}{5}\log_4 n_A \rightarrow n_A = 4^{5 \cdot 67.3 - 5}$

$48.1 = 1 + \frac{1}{5}\log_4 n_B \rightarrow n_B = 4^{5 \cdot 48.1 - 5}$

$\frac{n_A}{n_B} = 4^{96} = (10^{\log 4})^{96} = 10^{96 \times 0.602} = 10^{57.792}$，58 位數

EXAMPLE 15

網際網路梅森素數大搜索（GIMPS）的志願者 Patrick Laroche 於 2018 年發現目前最大質數為 $2^{82589933} - 1$，試問，若要發行一本書僅印製質數 $2^{82589933} - 1$，一頁印約 30000 個數字，印製完成後此書的頁數約為多少頁。

(1)300 頁 (2)600 頁 (3)900 頁 (4)1200 頁 (5)1500 頁

$2^{82589933} = (10^{\log 2})^{82589933} \approx 10^{24859569.833}$，約 24859570 位數

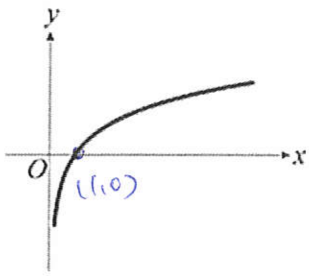
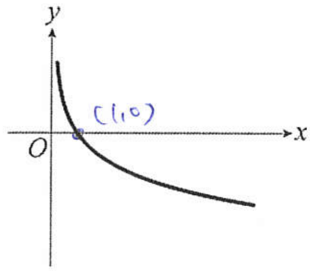
$24859570 \div 30000 \approx 828.\cdots$，選 (3)

2-3 對數函數

1. 對數函數的圖形

設 $a>0$ 且 $a\neq 1$，函數 $f(x)=\log_a x$ 稱為以 a 為底的的對數函數。

$f(x)=\log_a x$ 的定義域為 $\{x \mid x>0\}$，值域為 $\{y \mid y\in\mathbb{R}\}$。

	$a>1$	$0<a<1$	特徵
指數 $y=a^x$			(1)必過 (1,0) (2)恆在 y軸右側 (3)以 y軸 為漸近線 ~~(4)凹口向~~
	(1) 遞增函數： 圖形越往右，函數值越大。 $\log_a x_1>\log_a x_2 \Rightarrow x_1>x_2$ (2) 凹口向下	(1) 遞減函數： 圖形越往右，函數值越小。 $\log_a x_1>\log_a x_2 \Rightarrow x_1<x_2$ (2) 凹口向上	

2. 圖形間的對稱

(1) $y=a^x$ 的圖形和 $y=(\frac{1}{a})^x$ 的圖形對稱於 y軸。 $x\to -x$

(2) $y=\log_a x$ 的圖形和 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ 的圖形對稱於 x軸。

(2) $y=a^x$ 的圖形和 $y=\log_a x$ 的圖形對稱於 $y=x$。

3. 對數方程式及不等式(注意：真數>0)

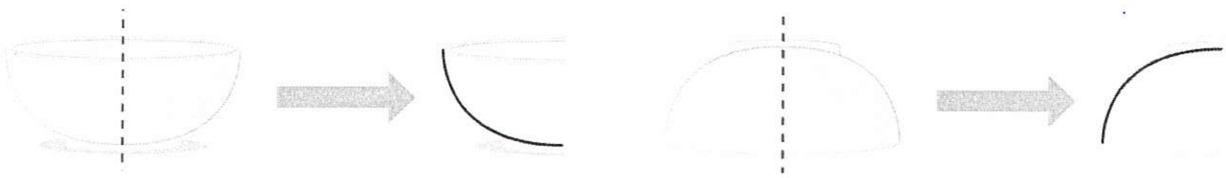
(1)一對一性質：設 $a\neq 1$，若 $\log_a x_1=\log_a x_2$，則 $x_1=x_2$。

(2)遞增(減)性質：設 $a>1$，若 $\log_a x_1>\log_a x_2$，則 $x_1>x_2$；

設 $0<a<1$，若 $\log_a x_1>\log_a x_2$，則 $x_1<x_2$。

4. 凹向性

(1)凹口向上：圖形上任兩點的連線（弦）在圖形上方。(如：指數函數圖形 $y=a^x$)



(2)凹口向下：圖形上任兩點的連線（弦）在圖形下方。(如：常用對數函數 $y=\log_{10} x$)

EXAMPLE 1

解下列方程式

(1) $\log x+\log(x+1)=1+\log 3$　　(2) $\log_2(9^x-13)=\log_2(3^{x+1}-10)+2$

(3) $x+\log_2|2x|+\log_2 48=\log_2|3x|$　　(4) $\begin{cases}3^x-8\cdot 3^y=27\\ \log_2(x+3)-\log_2(y+1)=1\end{cases}$

答案：(1)5　(2)2　(3)-5　(4) 5；3

(1) 真數>0 ⇒ $\begin{cases}x>0\\x+1>0\end{cases}$ ⇒ $x>0$

原式：$\log x(x+1)=\log 10+\log 3$

∴ $x(x+1)=30$, $x^2+x-30=0$.

$(x+6)(x-5)=0$, $x=5$ 或 -6 (不合)

⇒ $x=5$

(3) $\log_2 2^x+\log_2|2x|+\log_2 48=\log_2|3x|$

∴ $2^x\cdot|2x|\cdot 48=|3x|$, $2^x=\frac{1}{32}$

∵ $x\neq 0$

∴ $x=-5$

(2) 真數>0 ⇒ $\begin{cases}9^x-13>0\\3^{x+1}-10>0\end{cases}$

$\log_2(9^x-13)=\log_2(3^{x+1}-10)+\log_2 4$

⇒ $9^x-13=4(3^{x+1}-10)$, $(3^x)^2-12(3^x)+27=0$

⇒ $(3^x-3)(3^x-9)=0$, $x=1$ 或 2 ⇒ $x=2$

(不合)

(4) 真數>0 ⇒ $\begin{cases}x+3>0 \Rightarrow x>-3\\ y+1>0 \Rightarrow y>-1\end{cases}$

$\log_2(x+3)-\log_2(y+1)=\log_2 2 \Rightarrow \frac{x+3}{y+1}=2$

⇒ $x+3=2y+2$, $x=2y-1$

$3^{2y-1}-8\cdot 3^y-27=0$, $(\frac{1}{3})\cdot(3^y)^2-8\cdot(3^y)-27=0$.

$(3^y)^2-24(3^y)-81=0$. $(3^y-27)(3^y+3)=0$.

$3^y=27 \Rightarrow y=3$, $x=5$ (合).

EXAMPLE 2

解下列方程式與不等式：

(1) $\log(2x+3)-\log(x-1)\geq\log(x+5)$　　(2) $-2+\log_3(9x-x^2)\leq\log_3(5-x)$

(3) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 x)>1$　　(4) $(\log_2 x)-7+10\cdot(\log_x 2)\leq 0$

答案：(1)$1<x<2$　(2)$0<x\leq 3$　(3)$1<x<\cancel{9}\sqrt{3}$　(4)$\boxed{4\leq x\leq 32}$ 或 $0<x<1$

(1) 真數>0 $\begin{cases}2x+3>0\\x-1>0\\x+5>0\end{cases}$ ⇒ $x>1$ …①

原式：$\log\frac{2x+3}{x-1}\geq\log(x+5) \Rightarrow \frac{2x+3}{x-1}\geq x+5$

⇒ $(2x+3)\geq(x-1)(x+5)$, $2x+3\geq x^2+4x-5$

⇒ $x^2+2x-8\leq 0$, $(x+4)(x-2)\leq 0$, $-4<x<2$ …②

①、②取交集：$1<x<2$

(2) 真數>0 ⇒ $\begin{cases}9x-x^2>0, & x(x-9)<0\\ 5-x>0, & x<5\end{cases}$

⇒ $0<x<5$ …①

原式：$\log_3 3^{-2}+\log_3(9x-x^2)\leq\log_3(5-x)$

⇒ $\frac{1}{9}(9x-x^2)\leq 5-x$, $9x-x^2\leq 45-9x$

⇒ $x^2-18x+45\geq 0$, $(x-15)(x-3)\geq 0$

⇒ $x\leq 3$ 或 $x\geq 15$ …②

①、②取交集 $0<x\leq 3$

(3) 真數>0 $\begin{cases}x>0\\ \log_3 x>0, & x>1\end{cases}$ ⇒ $x>1$ …①

原式：$\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 x)>\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2} \Rightarrow \log_3 x<\frac{1}{2}$

$\log_3 x<\log_3 3^{\frac{1}{2}}$, $x<\sqrt{3}$ …②

①、②取交集：$1<x<\sqrt{3}$

(4) 真數>0 ⇒ $x>0$, $x\neq 1$ (底數)

case1：$(\log_2 x)>0 \Rightarrow x>1$

$(\log_2 x)^2-7(\log_2 x)+10\leq 0$

$2\leq\log_2 x\leq 5$, $4\leq x\leq 32$

case2：$(\log_2 x)<0$

$x<1$

$(\log_2 x)^2-7(\log_2 x)+10\geq 0$

$\log_2 x\leq 2$ 或 $\log_2 x\geq 5$

$x\leq 4$ 或 $x\geq 32$

∴ $4\leq x\leq 32$ 或 $0<x<1$

EXAMPLE 3

根據歷年的調查資料顯示，本校學務處於無聲廣播上公告某訊息後，n 個上課天內得知此訊息的學生占全校學生的 $100\left(1-2^{-kn}\right)$ %，其中 n 為正整數，常數 k 與學生重視此訊息的程度有關。今學務處於無聲廣播上公告了社團轉社期限，3 個上課天內已有 85 %的學生得知此訊息。試根據過往調查資料推測，若要使 98 %以上的學生得知此訊息，至少需要公告幾個上課天（取至整數）。

答案：7

3天85% $\Rightarrow 85\% = 100(1-2^{-3k})\%$

$\Rightarrow \frac{85}{100} = 1-2^{-3k}$，$2^{-3k} = \frac{15}{100}$

n天98%以上 $\Rightarrow 100(1-2^{-kn})\% > 98\%$

$\Rightarrow 100\left(1-(2^{-3k})^{\frac{n}{3}}\right) > 98$

$\Rightarrow 100\left(1-\left(\frac{15}{100}\right)^{\frac{n}{3}}\right) > 98$

$\Rightarrow \left(\frac{15}{100}\right)^{\frac{n}{3}} < \frac{2}{100}$

取log $\Rightarrow \frac{n}{3}\log\frac{15}{100} < \log\frac{2}{100}$

$\Rightarrow \frac{n}{3}(\log 3+\log 5-2) < (\log 2-2)$

$\Rightarrow n > 6.18\cdots \quad \Rightarrow n \geq 7$

EXAMPLE 4

小愛想要模仿電影《讓愛傳出去》中的主角小男孩改變世界的方法，首先她先幫助 3 個人，並希望他們將這份心意傳遞出去，每個人再去另外幫助 3 個人。由上可知，經過 1 次「傳愛」，共有 3 個人受到幫助；經過 2 次「傳愛」，共有 12 個人（3＋9）受到幫助；經過 3 次「傳愛」，共有 39 個人（3＋9＋27）受到幫助，假設沒有人重複受到幫助，請問至少要經過幾次「傳愛」，才能讓受幫助的總人數達到 1000 萬人以上？

答案：15

設傳了 n 次

受幫助的人為 $3+3^2+\cdots+3^n = \frac{3(3^n-1)}{3-1}$

$\frac{3}{2}\times 3^n - \frac{3}{2} > 1000$萬 $\Rightarrow \frac{3}{2}\cdot 3^n > 10^7$

$\log\left(\frac{3}{2}\cdot 3^n\right) > \log 10^7 \Rightarrow \log 3 - \log 2 + n\log 3 > 7$

$\Rightarrow 0.4771n > 7.301 - 0.4771$

$\Rightarrow n > 14.\cdots \quad \Rightarrow n \geq 15$

EXAMPLE 5

將 100 萬元存入年利率 3 %，每年複利計息一次的銀行，則大約需幾年後本利和才會達到 200 萬元？（無條件進入至整數位，$\log 1.03 \approx 0.0128$）

答案：24

☆ 七二法則：利率 r%，期數 n

約 $r\cdot n = 72$ 時，本金翻倍。

每1年 $1 \to 1.03$

n年 $1 \to 1.03^n$

$100\times 1.03^n > 200$

$\Rightarrow 1.03^n > 2$

取log $\Rightarrow n\log 1.03 > \log 2$

$\Rightarrow n > \frac{0.301}{0.0128} \approx 23.\cdots$

$\Rightarrow n \geq 24$

EXAMPLE 6

根據海洋學的研究，當一個潛水員每下降一公尺，光線的強度就會減少 2.5 %，若現在有一位潛水員已經下降到光線強度低於水面時的 25 %，則此時潛水員至少下降了大約幾公尺。

（請小數點以下無條件進位計算至整數公尺）

(已知 $\log 0.025 \approx -1.6021$，$\log 0.975 \approx -0.0110$)

答案：55

減少 2.5%：每1公尺 $1 \to 0.975$

n公尺 $1 \to 0.975^n$

$\therefore 0.975^n < 25\%$

取log $\Rightarrow n\log 0.975 < \log\frac{1}{4}$

$\Rightarrow n > \frac{-0.6020}{-0.0110} \approx 54.7\cdots$

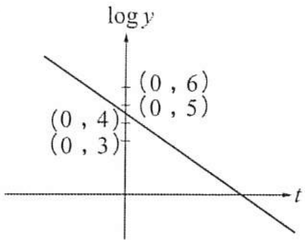
$n \geq 55$

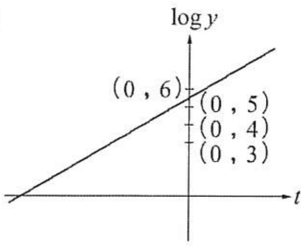
EXAMPLE 7

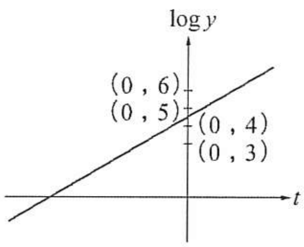
1. 某國傳染病大流行時，經統計發現高峰期間染病人數每兩個月增加為十倍，以 $f(t)$ 表示 $t=0$ 開始時，染病人數隨時間 t 變化的函數，並假設 $f(0)=k$。（k 為自然數）。若 t 以月為單位（不考慮每月天數），試選出可以代表某國於染病高峰期間染病人數的函數模型。

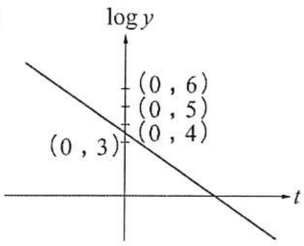
(1) $f(t)=\dfrac{k}{10}t+k$　(2) $f(t)=\dfrac{1}{10}t^2+k$　(3) $f(t)=k\times\left(\dfrac{9}{10}\right)^t$　(4) $f(t)=k\times10^{\frac{t}{2}}$　(5) $f(t)=\dfrac{k}{10}\times2^t$。

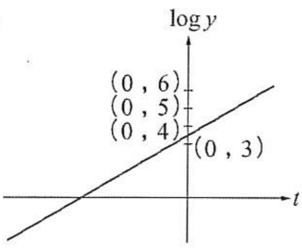
2. 承上題，已知某國初始染病人數為 30000 人，小綠為了分析染病時間與染病人數的直線相關程度，而將其 y 坐標改成 $\log y$，請問將坐標軸改變後，t 與 $\log y$ 的函數圖形為哪一條直線？

(1)


(2)


(3)


(4)


(5)


3. 承上題，假設某國人口為 5 千萬人，若傳染率以及總人口數不變，請問最少經過多少個月，全國確診人數會達到全國人口 50 %？（取到整數位）

答案：(1)(4)；(2)(3)；(3) 6

(1) 每個月 $1\to a$

2個月 $1\to a^2$.

$\therefore a^2=10$，一開始有 K 人

$\therefore f(t)=K\cdot(\sqrt{10})^t=K\cdot10^{\frac{t}{2}}$，選 (4)

(2) $y=30000\cdot10^{\frac{t}{2}}$

$\log y=\log\left(30000\cdot10^{\frac{t}{2}}\right)$

$=\log30000+\frac{t}{2}\cdot\log10$

$=\frac{1}{2}t+(\log30000)$

$\therefore$ 斜率為 $\frac{1}{2}$ 的直線，y截距 $\log30000$

$=4.\cdots$

選 (3)

(3) $3\times(\sqrt{10})^t>2500$

取 log $\Rightarrow\log3+t\cdot\frac{1}{2}>\log2500$

$\Rightarrow\frac{1}{2}t>0.699\times2+2-0.4771$

$\Rightarrow t>5.8\cdots\Rightarrow t\geq6$

對稱：$x \to -x$：對稱 y 軸
$y \to -y$：對稱 x 軸

EXAMPLE 8

設（a，b）為 $y=\log_2 x$ 圖形上的一點，請選出正確的選項。

(1)（$2a$，$2b$）亦為 $y=\log_2 x$ 圖形上的一點

(2)（a，$-b$）為 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 圖形上的一點

(3)（a^2，b^2）亦為 $y=\log_2 x$ 圖形上的一點

(4)（$2a$，$2b$）亦為 $y=2^x$ 圖形上的一點

(5)（b，a）為 $y=2^x$ 圖形上的一點。

答案：(2)(5)

$\boxed{b=\log_2 a} \Rightarrow 2^b=a$

(1) $\log_2 2a=1+\log_2 a=1+b$ (X)

(2) $\log_{\frac{1}{2}} a=-\log_2 a=-b$ (O)

(3) $\log_2 a^2=2\log_2 a=2b$ (X)

(4) $y=2^{2a}\neq 2b$ (X)

(5) $y=2^b=a$ (O)，選 (2)(5)

EXAMPLE 9

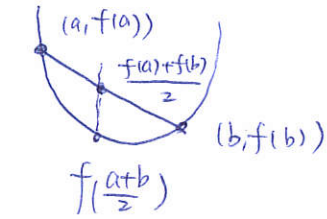
已知 A（a，$f(a)$）、B（b，$f(b)$）為函數 $y=f(x)$ 圖形上相異兩點，且滿足

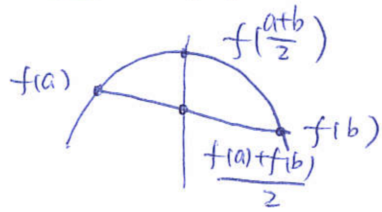
$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\geq\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$，則下列哪些選項可為滿足題意敘述的函數 $f(x)$？

(1) 2^{-x} (2) -2^x (3) $\log x$ (4) $-\log_{0.2} x$ (5) $\log_2 x$

答案：(2)(3)(4)(5)

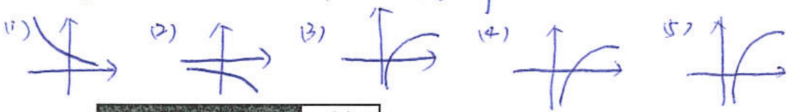
凹口向上　　凹口向下





$\therefore f(\frac{a+b}{2})\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}$　　$f(\frac{a+b}{2})\geq\frac{f(a)+f(b)}{2}$

此題找凹口向下之圖形



EXAMPLE 10

下列關於常用對數函數 $y=f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的敘述，哪些是正確的選項？

(1)函數 $f(x)$ 的圖形為嚴格遞增函數

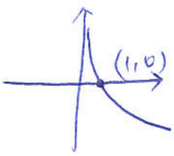
(2)函數 $f(x)$ 圖形凹口向上

(3)函數 $f(x)$ 圖形必過點（1，0）

(4)函數 $f(x)$ 圖形與任意一條鉛直線相交

(5)函數 $f(x)$ 與 $y=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{x}$ 對稱於直線 $x=y$。

答案：(2)(3)



(1) $0<a<1$，遞減 (X)

(2) (O)

(3) (O)

(4) 定義域 $\{x \mid x>0\}$ (X)

(5) 與 $y=(\frac{1}{2})^x$ 對稱 $y=x$ (X)

EXAMPLE 11

設 $0<a<1$，考慮函數 $f(x)=a^x$ 與 $g(x)=\log_a x$，試選出正確的選項。

(1)若 $g\left(\dfrac{1}{36}\right)=6$，則 $f(-3)=6$

(2) $f(109)-f(100)=f(19)-f(10)$

(3) $g(40)-g(10)=g(4)-g(1)$

(4)若 P，Q 為 $y=f(x)$ 的圖形上相異兩點，則直線 PQ 之斜率必為正數

(5)若直線 $y=\dfrac{1}{5}x$ 與 $y=f(x)$ 的圖形恰有一個交點，則直線 $y=5x$ 與 $y=g(x)$ 的圖形也恰有一個交點。

答案：(1)(3)(5)

(1) $g(\frac{1}{36})=\log_a\frac{1}{36}=6$，$a^6=\frac{1}{36}$

$f(-3)=a^{-3}=(a^6)^{-\frac{1}{2}}=(\frac{1}{36})^{-\frac{1}{2}}=6$ (O)

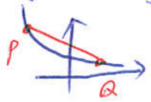
(2) $f(109)-f(100)=a^{109}-a^{100}=a^{90}(a^{19}-a^{10})$ (X)

$f(19)-f(10)=a^{19}-a^{10}$

(3) $g(40)-g(10)=\log_a 40-\log_a 10=\log_a 4$ (O)

$g(4)-g(1)=\log_a 4-\log_a 1=\log_a 4$

(4)



$y=a^x$ 是遞減函數 $\therefore m_{PQ}<0$ (X)

(5) $\boxed{\begin{matrix}y=\frac{1}{5}x\\y=f(x)\end{matrix}}$ 對稱 $y=x$ 為 $\boxed{\begin{matrix}y=5x\\y=g(x)\end{matrix}}$ (O)

1個交　　1個交

EXAMPLE 12

觀察指對數函數的圖形，則下列哪些敘述正確？

(1)對數函數的凹口向上

(2)指數函數與任一條水平線 $y=k$ 都有一個交點

(3)在同一坐標平面上，$y=\log\frac{x}{4}$ 的圖形可經平移動作就能與 $=\log7x$ 的圖形重合

(4)將 $y=2^x$ 的圖形先向上平移 1 個單位長，再對 x 軸做對稱可以得到 $y=-2^x+1$ 的圖形

(5)當 $a>1$，兩函數 $f_1(x)=a^x$ 與 $f_2(x)=\log_a x$ 的圖形有可能相交。

答案：(3)(5)

1)  若 a>1, 凹口向下 (×)

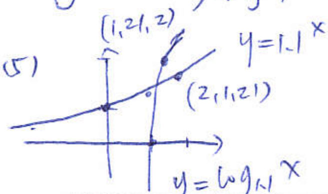
(2) $y=a^x>0$. 若 $k\le0$, 則沒有交點 (×)

(3) $y=\log\frac{x}{4}=\log x-\log4$ ⇕ 平移上下 (○)

$y=\log7x=\log x+\log7$

(4) $y=2^x \xrightarrow[y\to y-1]{\text{向上 }1} y-1=2^x \xrightarrow[y\to -y]{\text{對稱 }x\text{ 軸}} -y-1=2^x$ (×)

$(y=-2^x-1)$

(5) 

取 a=1.1 (○)

EXAMPLE 13

已知 $a>0$ 且 $a\neq1$，$f(x)=a^x$，$g(x)=\log_a x$，則下列敘述何者正確？

(1)當 $0<a<1$ 時，$y=f(x)$ 為嚴格遞減函數

(2)當 $0<a<1$ 時，$y=f(x)$ 函數圖形為凹口朝下

(3) $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 圖形對稱於 $y=x$

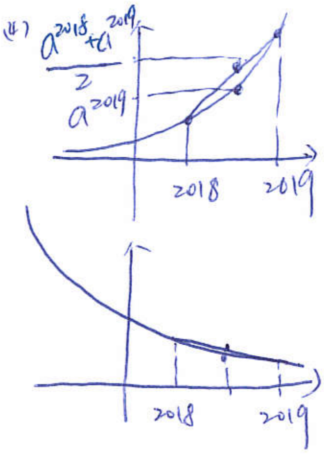
(4)當 $a>1$ 時，$\frac{a^{2018}+a^{2020}}{2}>a^{2019}$。

答案：(1)(3)(4)

1)  正確

(2) 凹口向上 (×)

(3) 正確 (○)

(4) 

凹口向上 (○)

EXAMPLE 14

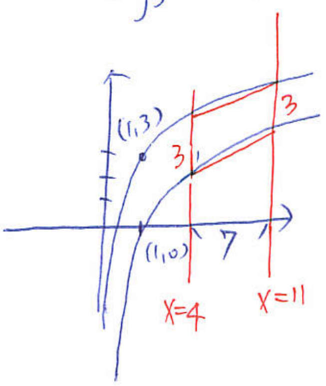
設函數 $y=\log_3(27x)$ 在直線 $x=4$、$x=11$ 與 x 軸之間所圍成的區域面積為 A；函數 $y=\log_3(x)$ 在直線 $x=4$、$x=11$ 與 x 軸之間所圍成的區域面積為 B，則 $A-B$ 的值為下列哪個選項？

(1) 7 (2) 14 (3) 21 (4) 28 (5)以上皆非。

答案：(3)

$y=\log_3(27x)=\log_3 27+\log_3 x$

$=\log_3 x+3$



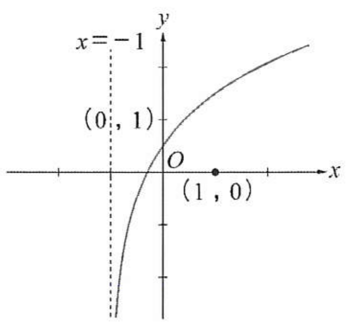
所圍面積 $=3\times7=21$

EXAMPLE 15

若對數函數 $y=a+\log_b(x-c)$ 的圖形如下圖，則下列敘述何者正確？

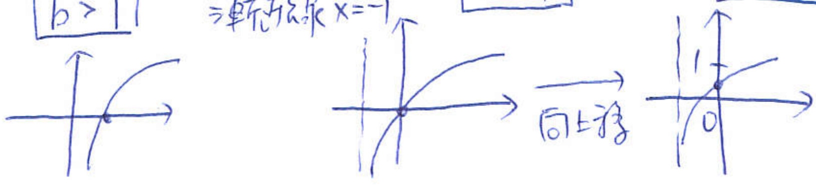
(1) $0<a<1$ (2) $a>1$ (3) $0<b<1$ (4) $b>1$ (5) $c=1$。

答案：(1)(4)



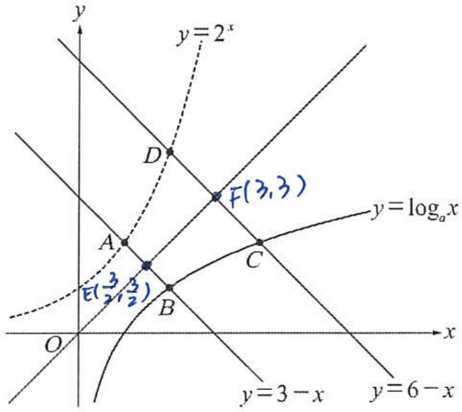
$y=\log_b x \xrightarrow[\text{向左移 }1]{x\to x+1} y=\log_b(x+1) \xrightarrow[\text{向上移 }a]{y\to y-a} y=a+\log_b(x-c)$

$\boxed{b>1}$ 漸近線 $x=-1$ $\boxed{c=-1}$ $\boxed{0<a<1}$



EXAMPLE 16

如圖，設 $a>0$ 且 $a\neq1$，若四個函數 $y=2^x$、$y=\log_a x$、$y=3-x$、$y=6-x$ 的圖形分別交於 A，B，C，D 四個頂點，且兩函數 $y=2^x$、$y=\log_a x$ 的圖形對稱於直線 $y=x$，試選出正確的選項。



(1) $a=\frac{1}{2}$　(2) A 的坐標為（1，2）　(3)四邊形 $ABCD$ 的面積為 $\frac{9}{2}$

(4)四邊形 $ABCD$ 的周長為 $2\sqrt{2}+3\sqrt{5}$

(5)若 $m_{\overline{AD}}$，$m_{\overline{BC}}$ 分別表示過 A，D 兩點直線與過 B，C 兩點直線的斜率，則 $m_{\overline{AD}}\times m_{\overline{BC}}=1$。

答案：(2)(3)(5)

(1) ∵ $y=2^x$ 和 $y=\log_a x$ 對稱 ∴ $a=2$ (×)

(2) A, B $\begin{cases} y=2^x \\ y=3-x \end{cases}$　猜 (1,2), (2,1) 是交點 ∴ A(1,2) (○)

(3) A, B 中點 $\begin{cases} y=3-x \\ y=x \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$　面積 $=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{CD})\times\overline{EF}$

$=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2}+2\sqrt{2})\times\frac{3}{2}\sqrt{2}=\frac{9}{2}$ (○)

C, D 中點 $\begin{cases} y=6-x \\ y=x \end{cases} \Rightarrow (3,3)$

(4) 周長 $=\sqrt{2}+2\sqrt{2}+2\times\sqrt{1^2+2^2}=3\sqrt{2}+2\sqrt{5}$ (×)

C, D $\begin{cases} y=6-x \\ y=2^x \end{cases} \Rightarrow (2,4), (4,2)$

(5) $m_{AD}=\frac{4-2}{2-1}=2$, $m_{BC}=\frac{1}{2}$ (○)

($\overline{AD}$、$\overline{BC}$ 對稱 $y=x$)

EXAMPLE 17

下列各敘述，試選正確的選項。

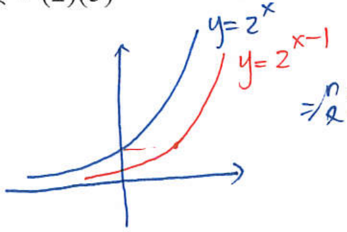
(1)方程式 $2^{x-1}=2^x$ 有 1 個實數解　(2)方程式 $x^2=2^{-|x|}$ 有 2 個實數解

(3)方程式 $|\log_2 x|=2-x$ 有 1 個實數解　(4)方程式 $\log_4 x^2=x$ 沒有實數解

(5)方程式 $\log_2(-x)+x+5=0$ 有 2 個實數解。

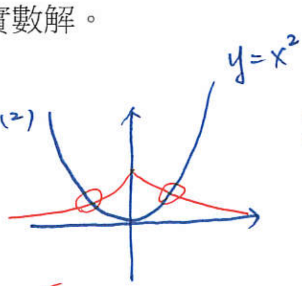
答案：(2)(5)

(1)



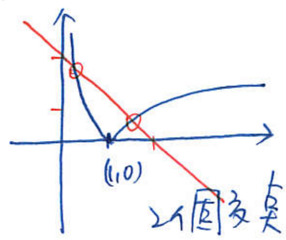
沒有交點

(2)



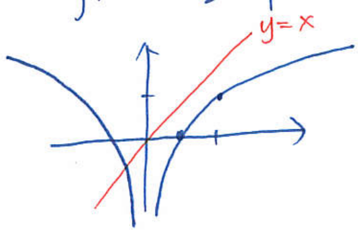
2個交點

(3)



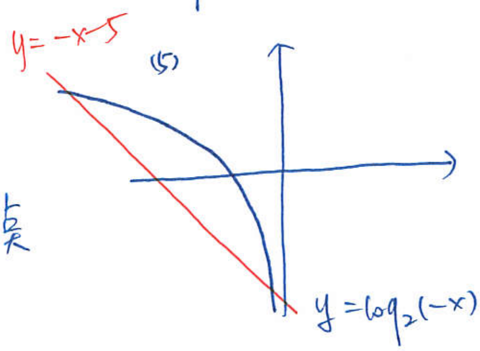
2個交點

☆(4) $\log_4 x^2=\frac{2}{2}\log_2 x=\log_2 x$



1個交點

(5)



2個交點