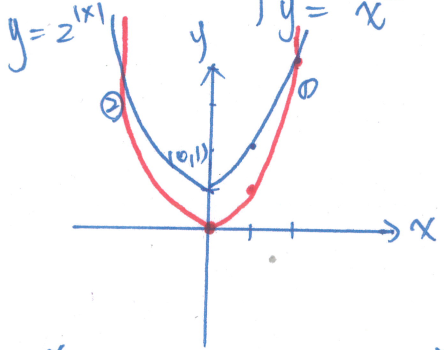
1、解的個數 ⇒ 畫圖找交點個數

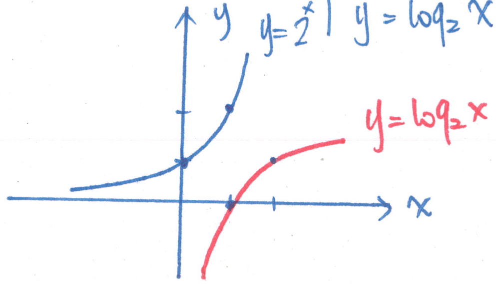
(1) $2^{|x|}=x^2 \Rightarrow \begin{cases} y=2^{|x|} \\ y=x^2 \end{cases}$: ① $x\geq 0,\ y=2^x$ ② 對稱y軸



⇒ 超過1個交點

(確切為4個交點)

(2) $2^x=\log_2 x \Rightarrow \begin{cases} y=2^x \\ y=\log_2 x \end{cases}$

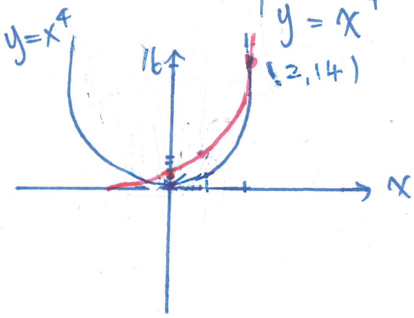


⇒ 0個交點

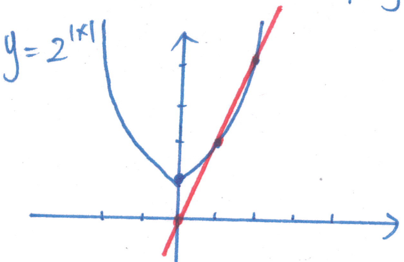
(3) $4^x=x^4 \Rightarrow \begin{cases} y=4^x \\ y=x^4 \end{cases}$

⇒ 超過1個交點

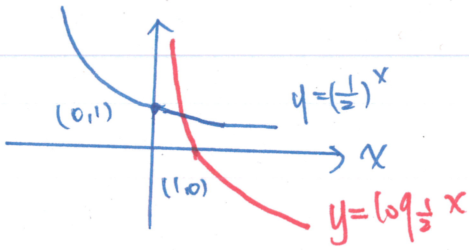
(確切為3個交點)



(4) $2^{|x|}=2x \Rightarrow \begin{cases} y=2^{|x|} \\ y=2x \end{cases}$ ⇒ 2個交點



(5) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\log_{\frac{1}{2}} x \Rightarrow \begin{cases} y=\left(\frac{1}{2}\right)^x \\ y=\log_{\frac{1}{2}} x \end{cases}$



⇒ 1個交點

(5) #

2、找規律

$d_1=\frac{1}{10}$，$d_2=\frac{1}{10}+\frac{1}{2}=\frac{6}{10}$，$d_3=2-2\cdot\frac{6}{10}=\frac{8}{10}$，$d_4=2-2\cdot\frac{8}{10}=\frac{4}{10}$

$d_5=\frac{4}{10}+\frac{1}{2}=\frac{9}{10}$，$d_6=2-2\cdot\frac{9}{10}=\frac{2}{10}$，$d_7=\frac{2}{10}+\frac{1}{2}=\frac{7}{10}$，$d_8=2-2\cdot\frac{7}{10}=\frac{6}{10}=d_2$

$\Rightarrow$ 6次一循環

$d_{52}=d_4=\frac{4}{10}$ (2) #

3. $\vec{u}=(4,-3)$，$\vec{m}=(12,a)$，$\sin\theta=\frac{4}{5}\Rightarrow\cos\theta=\pm\frac{3}{5}$

$\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{m}}{|\vec{u}||\vec{m}|}\Rightarrow\pm\frac{3}{5}=\frac{48-3a}{5\times\sqrt{144+a^2}}\Rightarrow\pm1=\frac{16-a}{\sqrt{144+a^2}}$

$\Rightarrow 144+a^2=256-32a+a^2\Rightarrow 32a=112\Rightarrow a=\frac{112}{32}=\frac{14}{4}=\frac{7}{2}$ (4) #

4. $C:(x-t)^2+(y+3)^2=-10+t^2+9\Rightarrow$ 圓心$(t,-3)$，$r=\sqrt{t^2-1}$

$\therefore d(O,L)=\frac{|4t+9-5|}{5}=\sqrt{t^2-1}\Rightarrow\frac{16(t^2+2t+1)}{25}=t^2-1$

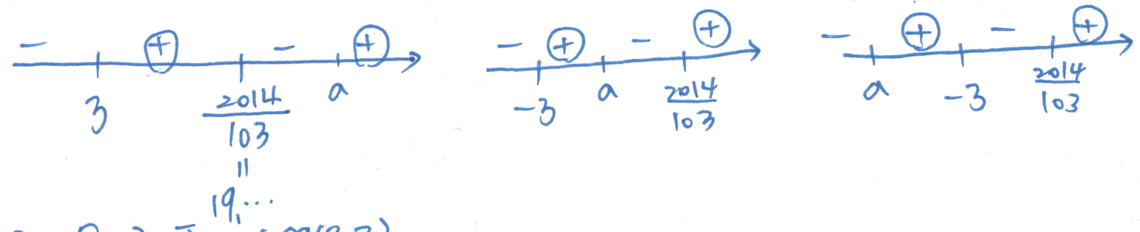
$\Rightarrow 16t^2+32t+16=25t^2-25\Rightarrow 9t^2-32t-41=0$

$\Rightarrow(9t-41)(t+1)=0\Rightarrow t=\frac{41}{9}$ or -1 (5) #

5. $(103x-2014)(x^2-x+1)(x-3)(x+a)>0$

$\because x^2-x+1$ 恆正 $\Rightarrow(103x-2014)(x-3)(x+a)>0$

case1: case 2: case3:



(1) 取 $a=0$ 即可 (case 2)

(2) 取 $a=11$ 即可 (case 2)

(3) ∵ 小於3，介於$3\sim\frac{2014}{103}$，大於$\frac{2014}{103}$ 三區塊均有值 ⇒ 無法找到 a

(4) 取 $a=-1$ 即可 (case 3)

(5) 取 $a=19.9$ 即可 (case 2)

(3) #

6. $(1+\sqrt{2})^7 = 1 + C^7_1\sqrt{2} + C^7_2(\sqrt{2})^2 + C^7_3(\sqrt{2})^3 + C^7_4(\sqrt{2})^4 + C^7_5(\sqrt{2})^5 + C^7_6(\sqrt{2})^6 + C^7_7(\sqrt{2})^7$

$= (1+42+140+56) + \sqrt{2}(7+70+84+8)$

$\therefore a = 239,\ b = 169 \Rightarrow a^2 - 2b^2 = 239^2 - 2\times169^2 = 57121 - 57122 = -1$

(1)#

7. $x^3+px^2+qx+2^n=0$ 有一根 $1+\sqrt{15}i \Rightarrow$ 有另一根 $1-\sqrt{15}i$

$\therefore x^3+px^2+qx+2^n$ 有因式 $(x-(1+\sqrt{15}i))(x-(1-\sqrt{15}i)) = x^2-2x+16$

$\therefore x^3+px^2+qx+2^n = (x^2-2x+16)(x+2^{n-4}) \Rightarrow \begin{cases} p = 2^{n-4}-2 \\ q = 16-2^{n-3} \end{cases}$ 均為正整數.

$\therefore n=6 \Rightarrow p=2,\ q=8 \Rightarrow$ 此方程式的根為 $1\pm\sqrt{15}i,\ -4$

(1)(3)(4)#

8. $\log_3 x = 1.7 \Rightarrow x = 3^{1.7}$
$\log_3 y = 5.1 \Rightarrow y = 3^{5.1}$ $\Rightarrow y = x^3$

(1) $x^{10} = 3^{17} \Rightarrow \log 3^{17} = 17\log 3 = 17\times0.4771 = 8.1107 \Rightarrow 9$位數 (o)

(2) 個位數字 ⇒ 找規律.

$3^1 \Rightarrow 3,\ 3^2 \Rightarrow 9,\ 3^3 \Rightarrow 7,\ 3^4 \Rightarrow 1,\ 3^5 \Rightarrow 3$ $\therefore$ 4次一循環

個位數字

$\therefore 3^{17}$個位數字 $\Rightarrow 3^1$個位數字 $\Rightarrow 3$ (x)

(3) $\log_3(x^3+2y) = \log_3 3^{5.1}+2\times3^{5.1} = \log_3 3\times3^{5.1} = 1+5.1 = 6.1$ (o)

(4) $\log(x^3+2y) = \log 3^{6.1} = 6.1\log 3 = 6.1\times0.4771 = 2.91031$

$= 2+0.91031 = 2+\log 8\ldots \Rightarrow$ 最高位數字 8 (x)

(5) $\log(x^{10}+y^3) = \log(3^{17}+3^{15.3}) = \log 3^{15}(3^2+3^{0.3})$

$\doteqdot \log 3^{15}\times10 = 15\log 3+1 = 8.1565 \Rightarrow 9$位數 (o)

(1)(3)(5)#

9、 $f(a)=1-a$ ， $f(b)=1-b$ ， $f(c)=1-c$

又 $f(x)$ 至多是二次式 且 $f(x)=1-x$ 有3相異實數解

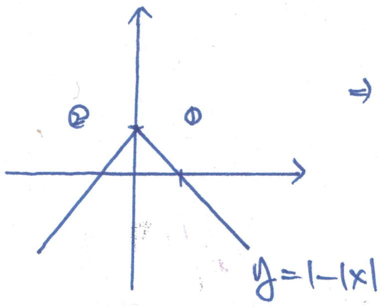
∴ $f(x)=0\cdot x^2+(-1)\cdot x+1$ （恆等式）

(1) $f(x)=1-x$ 是一次式 ⇒ 沒有最大最小值 (x)

(2) $f(|x|)=1-|x|$

畫圖：① $x>0$： $y=1-x$

② 對稱 y 軸.



⇒ 有最大值 (O)

(3) $f(x)=1-x$ 是遞減函數，亦即 $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$

$1.1^{0.9}>1>0.9^{1.1}>0>\log_{0.5}5 \Rightarrow f(1.1^{0.9})<f(0.9^{1.1})<f(\log_{0.5}5)$ (x)

(4) $\sum_{k=1}^{10} f(k)f(1+k)=\sum_{k=1}^{10}(1-k)(1-(1+k))=\sum_{k=1}^{10}(1-k)(-k)=\sum_{k=1}^{10}(-k+k^2)$

$=\frac{10\times11\times21}{6}-\frac{10\times11}{2}=385-55=330$ (O)

(5) $f(x)$ 是一次式 ⇒ $A=0$， ⇒ $1-x=B(x-b)+C$

∴ 可想成 $(1-x)$ 除以 $(x-b)$ 得商 B 和餘 C ⇒ 唯一的商和餘 (O)

(2)(4)(5) ☆

10、 (1) 在有男有女的條件下（2男1女 or 1男2女）

大雄被抽的方法： $C^{19}_1 C^{10}_1 + C^{10}_2 = 235$ (x)

（剩下19男挑1人）（10女挑1人）（10女挑2人）

靜香被抽的方法： $C^{20}_2 + C^{20}_1 C^{9}_1 = 370$

(2) 在同性別的條件下（3男 or 3女）

大雄被抽的方法： $C^{19}_2=171$ (O)

靜香被抽的方法： $C^{9}_2=36$

(3) 一次抽3人 和 逐次抽取，差異在視否有先後順序（方法數 ×3!）

機率分子.分母要同乘3!. ∴ 機率相同 (O)

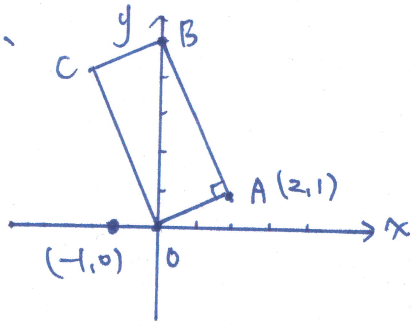
10、(4) 同時抽中 $= \dfrac{C^{28}_1}{C^{30}_3} = \dfrac{\cancel{28}}{\frac{30\times29\times\cancel{28}}{6}} = \dfrac{1}{145} < \dfrac{1}{100}$ (X)

(5) 大佐被抽中 ⇒ 剩下 29人 抽 2人

靜香被抽中 $= \dfrac{C^{28}_1}{C^{29}_2} = \dfrac{28}{\frac{29\times28}{2}} = \dfrac{2}{29} < \dfrac{1}{10}$ (X)

(2)(3) #

11、



$\overrightarrow{OA} = (2,1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OA}$ ∴ $\overrightarrow{AB} \parallel (-1,2)$

∴ $B = (2-t, 1+2t)$ (利用 AB 參數式)

∵ B 在 y 軸上 ∴ $2-t=0 \Rightarrow t=2$ ∴ B(0,5)

(1) B(0,5) (O)

(2) $\overline{OC} = \overline{AB} = 2\overline{OA}$ (O)

(3) 最大值發生在頂點

	O	A	B	C
點	(0,0)	(2,1)	(0,5)	(-2,-4)
3x+2y	0	8	10	-14

(X)

(4) 設 $\dfrac{y}{x+1} = k \Rightarrow y = k(x+1)$，必過點 (-1,0)，斜率 k.

由圖可知，矩形 OABC 上的點 P 與 (-1,0) 構成直線斜率 $k \geq 0$ or $k \leq -4$

∴ 沒有最大值 (X)

(5) $\sqrt{x^2+y^2}$：表 (x,y) 到 (0,0) 的距離.

最遠距離 $\overline{OB} = 5$，左右各有整數點距離 1,2,3,4 (各 2 個)

最近距離 $\overline{OO} = 0$　0,5 (各 1 個)

∴ 共 10 個整數點 ⇒ ~~9 個正整數點~~

(1)(2)(5) #

12、甲成：50, 60, 70, 80, 100

乙成：40, 50, 60, 70, 90

丙成：40, 48, 56, 64, 80

丁成：40, 50, 60, 70, 90

→ 乙成 = 甲成 − 10

丁成 = 甲成 − 10

丙成 = 甲成 × $\frac{4}{5}$

∴ $\sigma_甲 = \sigma_乙 = \sigma_丁 = \frac{5}{4}\sigma_丙$

(1) $\sigma_甲 = \sigma_乙 = \sigma_丁 > \sigma_丙$ (X)

(2) 扣除社會，其餘四科均 唸書時間越多，成績越高 ⇒ 正相關 (O)

(3) 甲：$(X,Y)=(1,50),(2,100),(3,60),(4,70),(5,80)$

乙：$(X',Y')=(1.5,40),(2,90),(2.5,50),(3,60),(3.5,70)$

丙：$(X^*,Y^*)=(0,40),(1,80),(2,48),(3,56),(4,64)$

$\because$ $X'=0.5X+1$，$Y'=Y-10$ $\Rightarrow r_{X'Y'}=r_{XY}$ $\therefore r_{X'Y'}=r_{X^*Y^*}=r_{XY}$ (O)

$X^*=X-1$，$Y^*=\frac{4}{5}Y$ $\Rightarrow r_{X^*Y^*}=r_{XY}$

(相關係數僅受"正""負"影響，不受平移、伸縮影響)

(4) 若相關係數為1 $\Rightarrow$ 所有資料落在同一直線上

$(0,40),(1,50),(2,60),(3,70),(5,90)$ 落在 $y=10x+40$ 上 (O)

(5) 迴歸直線斜率 $=r\cdot\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$，由(2)知

① $\Rightarrow r_{XY}=r_{X'Y'}=r_{X^*Y^*}$

② $\sigma_{Y'}=\sigma_Y$，$\sigma_{Y^*}=\frac{4}{5}\sigma_Y$

③ $\sigma_{X'}=0.5\sigma_X$，$\sigma_{X^*}=\sigma_X$

$m'=2m$

$m^*=\frac{4}{5}m$

$\therefore m'>m>m^*$ (O)

乙 甲 丙

(2)(3)(4)(5) ※

A、 $f(x)=x^2+ax+b$ 有最大值 $\Rightarrow$ 必發生在 $x=-3$ or $x=5$

$-3\le x\le 5$

又存在2個x值，亦即 $f(-3)=f(5)$ 都是最大值 3

依據對稱知 當 $x=\frac{-3+5}{2}=1$ 時 有最小值 (頂點)

$\therefore f(x)=(x-1)^2+k$，$f(5)=3$ 代入 $\Rightarrow 3=16+k$，$k=-13$

$\therefore f(x)=(x-1)^2-13=x^2-2x-12$

$(-2,-12)$ ※

B、 最多僅能有5層紅色，此時有 C^6_5 種方法

ˇOˇOˇOˇOˇOˇ (先排5個綠色，有6個空插入5個紅色)

若有4層紅色，此時有 C^7_4 種方法

ˇOˇOˇOˇOˇOˇOˇ

B、同理若有3層紅色：C^8_3 種方法

2　　C^9_2

1　　C^{10}_1

0　　1

共有 $C^6_5+C^7_4+C^8_3+C^9_2+C^{10}_1+1=6+35+56+36+10+1=\underline{144}$ ※

C、甲廠合格：$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，甲廠不合格：$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，甲廠有兩種毒 $=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

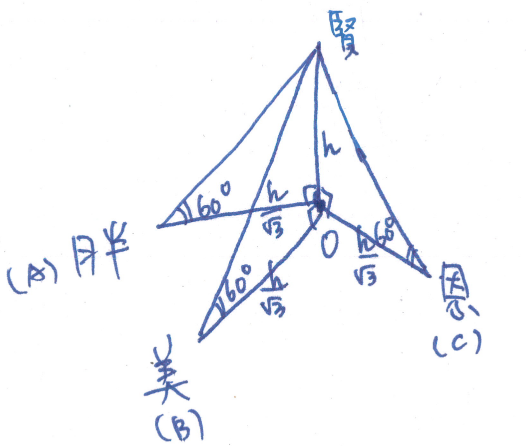
同理，乙廠合格 $=\frac{1}{4}$，乙廠不合格 $=\frac{3}{4}$，乙廠有兩種毒 $=\frac{1}{4}$

丙廠合格 $=\frac{1}{4}$ 丙廠不合格 $=\frac{3}{4}$，丙廠有兩種毒 $=\frac{1}{4}$

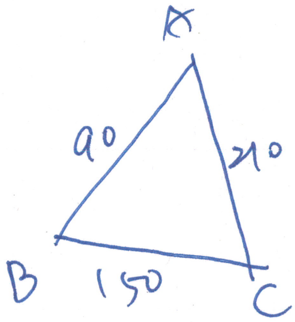
$$P(\text{二家二種}\mid\text{三家不合格})=\frac{P(\text{甲乙二種、丙一種})+P(\text{甲丙二種，乙一種})+P(\text{乙丙二種，甲一種})}{P(\text{三家不合格})}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}}=\frac{6}{27}=\underline{\frac{2}{9}}$$ ※

D、仰角均為60° ⇒ 外接圓半徑。



由圖知 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\frac{h}{\sqrt{3}}$ 為△ABC之外接圓半徑

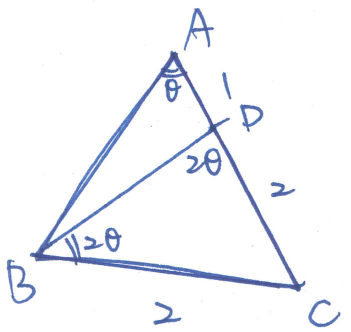


$$\cos B=\frac{90^2+150^2-210^2}{2\cdot 90\cdot 150}=\frac{9^2+15^2-21^2}{2\cdot 9\cdot 15}=\frac{3^2+5^2-7^2}{2\cdot 15}=\frac{-15}{30}=\frac{-1}{2}.$$

$\therefore \sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore \frac{210}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R \Rightarrow R=\frac{210}{\sqrt{3}}=70\sqrt{3}=\frac{h}{\sqrt{3}} \Rightarrow \underline{h=210}$$ ※

E.



令 $\angle A=\theta \Rightarrow \angle BDC = 2\theta$

∵ $\overline{BC}=\overline{DC}=2$

∴ $\angle CBD = 2\theta \Rightarrow \angle C = 180^\circ - 4\theta$

∴ $\angle ABD = \theta$

∴ 由正弦定理知: $\dfrac{2}{\sin\theta} = \dfrac{3}{\sin 3\theta}$ ($\triangle ABC$)

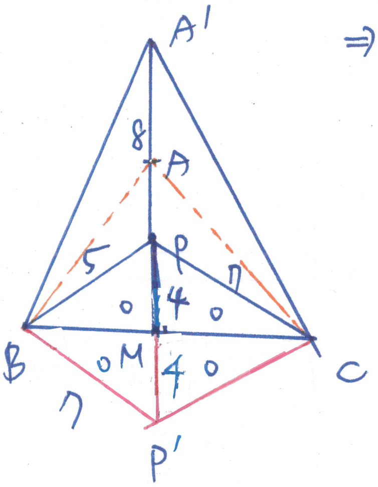
∴ $2\sin 3\theta = 3\sin\theta \Rightarrow 2(3\sin\theta - 4\sin^3\theta) = 3\sin\theta$

$\Rightarrow 8\sin^3\theta - 3\sin\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta = 0$ or $\pm\sqrt{\dfrac{3}{8}} = \dfrac{\pm\sqrt{6}}{4}$

又 θ 是第一象限角 $\Rightarrow \sin\theta = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$ #

F.

$2\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$，取 A' 使得 $\overrightarrow{PA'} = 2\overrightarrow{PA}$



$\Rightarrow \overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 0$

∴ P為 $\triangle A'BC$ 之重心、

設 M為 $\overline{BC}$ 中点 $\Rightarrow \overline{PA'} : \overline{PM} = 2:1 \Rightarrow \overline{PM} = 4$

延伸 $\overrightarrow{PM}$，作 $\overline{P'M} = \overline{PM} \Rightarrow$ 使得 $PBP'C$ 為平行四邊形

∴ $\triangle PBP'$ 面積 $= \sqrt{10\cdot 5\cdot 2\cdot 3} = 10\sqrt{3}$

∴ $\triangle A'BC$ 面積 $= 30\sqrt{3}$

∵ $\triangle PA'B = 2\triangle PAB \Rightarrow \triangle PAB = 5\sqrt{3}$

$\triangle PA'C = 2\triangle PAC \Rightarrow \triangle PAC = 5\sqrt{3}$

∴ $\triangle ABC = 20\sqrt{3}$ #

G. $\dfrac{xy}{x+y} = \dfrac{1}{\frac{x+y}{xy}} = \dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

$(9x+4y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right) \geq (3+2)^2$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \geq \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$

∴ $\dfrac{xy}{x+y} \leq \dfrac{1}{\frac{1}{4}} = 4$ #

4. 設n年後

甲：$10(1+13.4\%)^n$

乙：$10(1+5\%)^n$

$\Rightarrow 10(1.134)^n = 2\times 10(1.05)^n$

$\Rightarrow \left(\frac{1.134}{1.05}\right)^n = 2 \Rightarrow (1.08)^n = 2$

取 log $\Rightarrow n\log\frac{108}{100} = \log 2 \Rightarrow n(3\log 3 + 2\log 2 - 2) = \log 2$

$\Rightarrow n(3\times 0.4771 + 2\times 0.3010 - 2) = 0.3010 \Rightarrow n = \frac{0.3010}{0.0333}$

$\Rightarrow n = 9.\cdots \quad \Rightarrow \underline{n \geq 10}$ #