1、找規律:

$a_1=\underline{1}$, $a_2=7+3\Rightarrow \underline{0}$, $a_3\Rightarrow 7\times 0+3\Rightarrow \underline{3}$, $a_4\Rightarrow 7\times 3+3\Rightarrow \underline{4}$

$a_5=7\times 4+3\Rightarrow \underline{1}$ ∴ 四次循環, 僅能 1, 0, 3, 4.

(3) #

2、不同行, 不同列較好算.

2種選擇 3種選擇

$$P = 1 - \text{不同行不同列} = 1 - \frac{4\times 1\times 2!}{4!} = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

(4) #

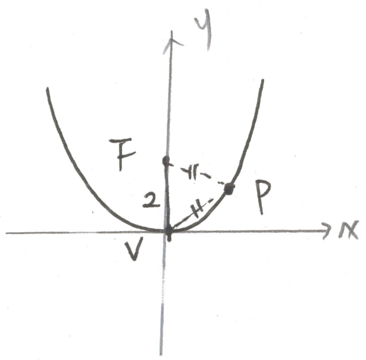
3、$\det(AB)=(\det A)\cdot(\det B)$

$$\begin{bmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ 3a-2c & 3b-2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ 3a-2c & 3b-2d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (-13)\cdot k$$

(1) #

4、



坐標化, 設 $V(0,0)$, 向上拋 $\Rightarrow \Gamma: x^2=8y$

∵ $\overline{PV}=\overline{PF}$ ∴ P點之 y 坐標為 1, 設 $(a,1)$

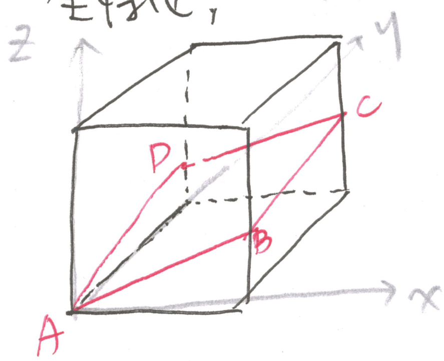
又 P 在 Γ 上 $\Rightarrow a^2=8 \Rightarrow a=2\sqrt{2}$.

∴ $\triangle PFV$ 面積 $=\frac{1}{2}\times \overline{FV}\times a = 2\sqrt{2}$

(2) #

5、

坐標化,



設 $A(0,0,0)$, $B(1,0,\frac{1}{2})$, $C(1,1,\frac{2}{3})$

∴ 平面 ABC: ① $\vec{n}$: $\begin{array}{cccc} 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & 1 & 1 \end{array}$ // $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, 1) \parallel (3, 1, -6)$

② 點 $(0,0,0)$

∴ $3x+y-6z=0$.

$D(0,1,z)$ 在平面上 $\Rightarrow z=\frac{1}{6}$

(5) #

6、

$$f(x)=f(1)\cdot\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}+f(2)\cdot\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}+f(3)\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$$

$$\Rightarrow f(5)=f(1)\cdot\frac{3\times2}{1\times2}+f(2)\cdot\frac{4\cdot2}{1\cdot(-1)}+f(3)\cdot\frac{4\cdot3}{2\cdot1}$$

$$=3f(1)-8f(2)+6f(3)$$

(3)#

7、(1) $2x-3y+4z=0$ 表平面 (×)

(2) $\begin{cases}x=2-\frac{1}{2}t\\ y=t\\ z=1-t\end{cases}$ 表直線⇒檢查 A、B是否在線上(二點決定一線)

$t=0$ 時表A點，$t=2$ 時表B點 (○)

(3) $\frac{x-1}{1}=\frac{2-y}{2}=\frac{z+1}{2}$ 表直線⇒檢查. (○)

A: $\frac{2-1}{1}=\frac{2-0}{2}=\frac{1+1}{2}$ (合) B: $\frac{1-1}{1}=\frac{2-2}{2}=\frac{-1+1}{2}$ (合)

(4) $\begin{cases}2x+2y+z=5\\ 2x+y=4\end{cases}$ 表二平面交線 ⇒ 必為直線. (○)

A: $\begin{cases}2\cdot2+2\cdot0+1=5\\ 2\cdot2+0=4\end{cases}$ (合) B: $\begin{cases}2\cdot1+2\cdot2+(-1)=5\\ 2\cdot1+2=4\end{cases}$ (合)

(5) $\begin{cases}2x-3y-4z=0\\ 2x+2y+z=5\\ y+z=1\end{cases}$ 可能為直線(若A,B均在三平面上且三平面重合) (○)

A: $\begin{cases}2\cdot2-3\cdot0-4\cdot1=0\\ 2\cdot2+2\cdot0+1=5\\ 0+1=1\end{cases}$ (合) B: $\begin{cases}2\cdot1-3\cdot2-4(-1)=0\\ 2\cdot1+2\cdot2+(-1)=5\\ 2+(-1)=1\end{cases}$ (合)

(2)(3)(4)(5)#

8、

(1) $\overrightarrow{AB}=(-2,-2,1)$

$\overrightarrow{AC}=(4,1,1)$

$\cos A=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{-8-2+1}{3\times\sqrt{18}}=\dfrac{-9}{9\sqrt{2}}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\angle A=135^\circ$ (O)

(2) $\triangle ABC$面積 $=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$

$$\begin{array}{cccccc} -2 & -2 & 1 & -2 & -2 & \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 1 & \\ \hline & & (-3,6,6) & & & \end{array}$$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{(-3)^2+6^2+6^2}$

$=\frac{9}{2}<5$ (O)

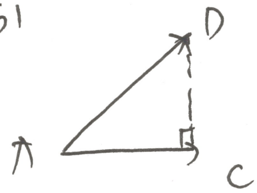
(3) ABC所形成平面：① $\vec{n}\parallel\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\parallel(1,-2,-2)$ ② 代 $B(1,-1,-1)$

∴ 平面方程式：$x-2y-2z\overset{(1,-1,-1)}{=\!=\!=}5$

又 D在平面上 $\Rightarrow 5-2k-4k=5\Rightarrow k=0$ (X)

(4) 平行六面體體積 $=|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}|=|(-3,6,6)\cdot(2,0,4)|=18$ (O)

(5)



若$\overrightarrow{AD}$在$\overrightarrow{AC}$之正射影為$\overrightarrow{AC}$ $\Rightarrow \overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{CD}$

∴ $(4,1,1)\cdot(-2,k-2,2k+1)=0$

$\Rightarrow -8+k-2+2k+1=0\Rightarrow k=3$ (X)

(1)(2)(4)#

9. ax^3+bx^2+cx+d 為實係數多項式 且 $f(2+i)=0\Rightarrow f(2-i)=0$，

此方程式為一實根二虛根

(1) $f(-2+i)\neq0$ 除了 $2+i$, $2-i$ 沒有其他虛根 (X)

(2) $f(i)=2-i\Rightarrow f(\bar{i})=\overline{2-i}\Rightarrow f(-i)=2+i$ (O)

(3) 此敘述需為"實係數"多項式 (X)

(4) 若 $f(1)=0\Rightarrow \underbrace{f(x)}_{三次}=\underbrace{(x-1)(x-(2+i))(x-(2-i))}_{三次}\cdot \underset{不常數}{k}$

$=k(x^3-5x^2+9x-5)$ ∴ $b=d$ (O)

(5) 若 $f(0)>0$ 且 $f(-2)<0$ 表實根介於$(-2,0)$之間

∴ $(-4,-2)$之間沒有實根 $\Rightarrow f(-4)\cdot f(-2)>0$

(僅1實根) ∴ $f(-4)<0$ (O)

(2)(4)(5)#

10、(1)(2)(3)

$y \geq 1 \Leftrightarrow \overleftrightarrow{BC}$

$2x+y \leq 1$ (左側) $\Leftrightarrow \overleftrightarrow{AC}$

∴ $ax-by \geq c \Leftrightarrow \overleftrightarrow{AB}$，可行解在 $\overleftrightarrow{AB}$ 右側 ∴ $a>0$

下方 ∴ $-b<0 \Rightarrow b>0$.

又 $x=0$ 時，$y=\frac{-c}{b}>0$ ∴ $c<0$.

(4)(5)

∵ $px-qy$ 在A有最大值，B有最小值 $\Rightarrow$ 右大，左小：$p>0$

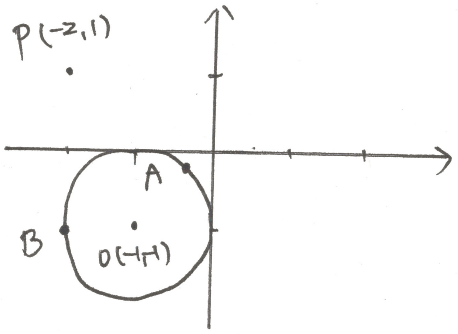
上大，下小：$-q>0 \Rightarrow q<0$.

又 $m=\frac{p}{q} \Rightarrow \frac{p}{q} > m_{AC}=-2 \underset{(\because q<0)}{\Rightarrow} p<-2q \Rightarrow p+2q<0$

(1)(2)(4) #

11、(1)

$x^2+y^2+2x+2y+1=0 \Rightarrow (x+1)^2+(y+1)^2=1 \Rightarrow$ 圓心 $(-1,-1)$



(2) A $\left| \begin{array}{l} 3x+4y+2=0 \\ x=2y \end{array} \right. \Rightarrow y=\frac{-1}{5},\ x=\frac{-2}{5} \Rightarrow A(\frac{-2}{5},\frac{-1}{5})$

(3) B $\left| \begin{array}{l} x^2+y^2+2x+2y+1=0 \\ x=2y \end{array} \right. \Rightarrow 5y^2+6y+1=0$

∴ $y=\underset{A}{\frac{-1}{5}},\ -1 \Rightarrow B(-2,-1)$

$\overleftrightarrow{PB}$ 為過B之切線：可明顯知 $\overleftrightarrow{PB}$ 方程式為 $x=-2$. (○)

(4) P $\left| \begin{array}{l} 3x+4y+2=0 \\ x=-2 \end{array} \right. \Rightarrow P(-2,1)$ $\quad \overrightarrow{PA}=(\frac{8}{5},\frac{-6}{5})$

$\overrightarrow{PB}=(0,-2)$

△PAB面積 $=\frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} \frac{8}{5} & \frac{-6}{5} \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \right| = \frac{8}{5}$ (○)

(5) $\overline{PO}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ ∴ 最近距離 $=\sqrt{5}-1 = 1.\cdots$，最遠距離 $=\sqrt{5}+1 = 3.\cdots$

∴ 整數距離 $=2,3 \Rightarrow$ 共有4個點 (○)

(3)(4)(5) #

12、

(1)
(2) 迴歸線：$y-70=0.9\cdot\frac{\sigma_y}{3}(x-60)$

$\because$ 過 $(70,73)\Rightarrow 3=0.9\frac{\sigma_y}{3}\cdot 10\Rightarrow \sigma_y=1$ (o)

$\therefore$ 迴歸線 $y-70=0.3(x-60)\Rightarrow y=0.3x+52$ (o)

(3) $\because \sigma_y=1\Rightarrow 1=\sqrt{\frac{\Sigma(y_i-70)^2}{10}}\Rightarrow \Sigma(y_i-70)^2=10$

$\therefore$ 若有人低於 60 分 $\Rightarrow \Sigma(y_i-70)^2>100$ (不合) $\therefore$ 均高於 60 分 (o)

(4) 相關係數僅受"正負"影響 $\Rightarrow$ 不變 $r_{x'y'}=r_{xy}=0.9$ (o)

(5) 標準化後 迴歸線 $y'=rx'\Rightarrow y'=0.9x'$ (x)

(1)(2)(3)(4) #

A. $2^{x+3}=3^{x+1}\Rightarrow 8\cdot 2^x=3\cdot 3^x\Rightarrow \frac{3^x}{2^x}=\frac{8}{3}$ #

B. $1\le|x-\sqrt{2}|\le a$ 有 12 個整數解

$\Rightarrow 1\le x-\sqrt{2}\le a$ 有 6 個整數解 $\Rightarrow a=7$ #

C. $\log a^{10}=21.\cdots\Rightarrow 21\le\log a^{10}<22\Rightarrow 2.1\le\log a<2.2$

$\log a^{20}=42.\cdots\Rightarrow 42\le\log a^{20}<43\Rightarrow 2.1\le\log a<2.15$

$\therefore \log a$ 的首數是 2 $\Rightarrow$ 表 3 位數.

尾數是 $0.10\sim0.15\Rightarrow \log 1.26\sim\log 1.41$

$\therefore a$ 可能為 $126\sim141$，共 16 個數 $\Rightarrow$ 16 #

D. $A=\frac{(A-B)+(A+B)}{2}=\begin{bmatrix}0&1\\2&3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}$

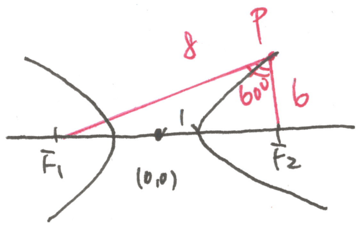
$\therefore A^2=\begin{bmatrix}0&1\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\6&11\end{bmatrix}$，$B^2=\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2\\-2&-1\end{bmatrix}$

$\det(A^2-B^2)=\det\left(\begin{bmatrix}-1&1\\8&12\end{bmatrix}\right)=-12-8=-20$ #

E、 全－有1種沒吃＋有2種沒吃

$=3^5-C^3_1\cdot 2^5+C^3_2\cdot 1^5=243-96+3=\underline{150}$ #

F、



$a^2=1,\ b^2=K$ 不妨假設 P 在右側

$\because \left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=2a=2$ $\therefore \overline{PF_1}=8,\ \overline{PF_2}=6$

又 $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=14$

$\therefore \overline{F_1F_2}=2c=\sqrt{8^2+6^2-2\times8\times6\cdot\cos60^\circ}=\sqrt{52}\Rightarrow c=\sqrt{13}$

$\therefore b^2=c^2-a^2=12=\underline{K}$ #

G、 設甲取完後，再換乙取、(此題題意不清)

甲贏 ⇒ 甲取9號時，乙可取任一球(除了18號) ⇒ 19種

甲取19號時，乙可取任一球 ⇒ 20種

若甲取得號碼小於乙 ⇒ 甲取9號，乙取 10～20(除了18號) = 10種

甲取19號，乙取20號 ⇒ 1種

$\therefore P=\dfrac{10+1}{19+20}=\underline{\dfrac{11}{39}}$ #

H. 設 $\angle BAC=2\theta$，$\angle CAD=\theta$

由正弦定理知 $\underset{(\triangle ABC)}{\dfrac{4\sqrt5}{\sin2\theta}}=2R=\underset{(\triangle ACD)}{\dfrac{5}{\sin\theta}}\Rightarrow\dfrac{4\sqrt5}{2\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{5}{\sin\theta}$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{2\sqrt5}{5}=\dfrac{2}{\sqrt5}\Rightarrow\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta=4\left(\dfrac{2}{\sqrt5}\right)^3-3\left(\dfrac{2}{\sqrt5}\right)=\dfrac{2}{5\sqrt5}$

$\cos C=-\cos A=-\dfrac{2}{5\sqrt5}$

$\therefore \overline{BD}=\sqrt{(4\sqrt5)^2+5^2-2\cdot4\sqrt5\cdot5\cdot\dfrac{-2}{5\sqrt5}}=\sqrt{80+25+16}=\underline{11}$ #