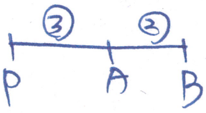
1、由相似形知 $\overline{PA}:\overline{AB}=3:2$



$A=\dfrac{3B+2P}{3+2} \Rightarrow 5A=3B+2P$

(分點公式) $\Rightarrow P=\dfrac{5A-3B}{2}=\dfrac{5a-3b}{2}$ (4)#

2、 $n(S)=C^{52}_{2}$ A: 2張同點數 B: 2張同花色

$n(A)=\underset{\substack{\uparrow \\ \text{同1點} \\ (A)}}{C^4_2}+\underset{\substack{\uparrow \\ \text{同2點}}}{C^4_2}+\cdots+\underset{\substack{\uparrow \\ \text{同13點} \\ (K)}}{C^4_2}=C^4_2\times 13=78$

$n(B)=\underset{\substack{\uparrow \\ \text{同}\spadesuit}}{C^{13}_2}+\underset{\substack{\uparrow \\ \text{同}\heartsuit}}{C^{13}_2}+\underset{\substack{\uparrow \\ \text{同}\diamondsuit}}{C^{13}_2}+\underset{\substack{\uparrow \\ \text{同}\clubsuit}}{C^{13}_2}=C^{13}_2\times 4=312$

$\because n(B)=4\times n(A)$ $\therefore P(B)=4P(A) \Rightarrow g=4p$ (1)#

3、 $S=2^2+4^2+6^2+\cdots+98^2+100^2=2^2(1^2+2^2+\cdots+50^2)$

$=\overset{2}{\cancel{4}}\times\dfrac{50\times \overset{17}{\cancel{51}}\times 101}{\cancel{6}}=171700$ (4)#

4. 由一次因式檢驗法知 $\Rightarrow$ 可能的根為 $\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm8,\pm12,\pm24$.

$x=1$ 代入 $f(1)=1-2-13+14+24\neq 0$

$x=-1$ 代入 $f(-1)=1+2-13-14+24=0$

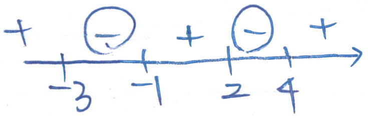
$x=2$ 代入 $f(2)=16-16-52+28+24=0$

$\therefore f(x)=x^4-2x^3-13x^2+14x+24$ 有因式 $(x+1)$、$(x-2)$

$=(x+1)(x-2)(\qquad\qquad)$

$=(x^2-x-2)(x^2-x-12)$

$=(x-2)(x+1)(x-4)(x+3)\leq 0$



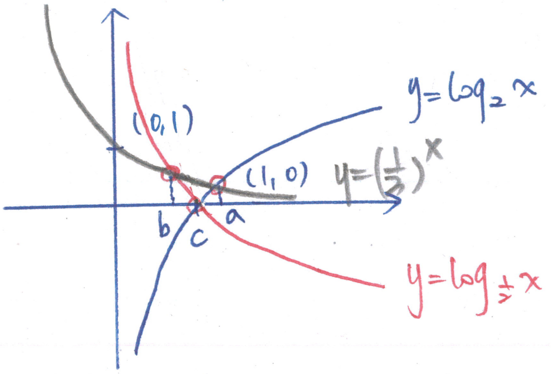
$\therefore$ 共 $-3,-2,-1,2,3,4$ 6個整數 (3)#

5. ▨ 畫圖找交點

$\log_2 x = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ $\Rightarrow \begin{cases} y=\log_2 x \\ y=\left(\frac{1}{3}\right)^x \end{cases}$ 的交點 x 坐標

$\log_{\frac{1}{2}} x = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ $\Rightarrow \begin{cases} y=\log_{\frac{1}{2}} x \\ y=\left(\frac{1}{3}\right)^x \end{cases}$

$\log_2 x = \log_{\frac{1}{2}} x$ $\Rightarrow \begin{cases} y=\log_2 x \\ y=\log_{\frac{1}{2}} x \end{cases}$



由左圖知：$b<c<a$

$\underline{(2)}$ ※

6. ▨ 問題在次方 ⇒ 取 log

原式同取 log $\Rightarrow \log(k) < \sqrt{3}\log\sqrt{3} < \log(k+1)$

$\sqrt{3}\log\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\log 3 \approx \frac{1.732}{2}\times 0.4771 > 0.32 > \log 2 = 0.301$

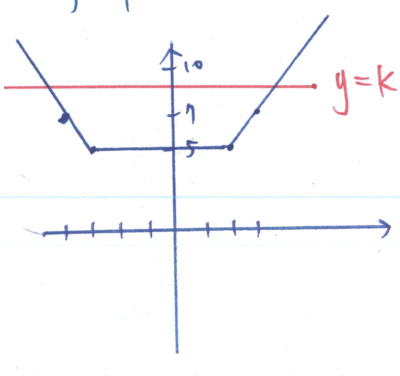
$\therefore \log 2 < \sqrt{3}\log\sqrt{3} < \log 3 \Rightarrow k=2$

$\underline{(2)}$ ※

7. $|x+3|+|x-2|=k \Rightarrow \begin{cases} y=|x+3|+|x-2| \\ y=k \end{cases}$ 之交點 (水平線).

$y=|x+3|+|x-2|$ 為折線圖

x	-4	-3	2	3
y	7	5	5	7



方程式有解 ⇔ 圖形有交點.

∴ 由圖知 $k \geq 5$

(1) $\sqrt{3} \approx 1.732 < 5$

(2) $4.\overline{9} = 5$

(3) $\sqrt{17+\sqrt{17}} \approx \sqrt{17+4.\cdots} = \sqrt{21.\cdots} < 5$

(4) $2\pi \approx 6.28 > 5$

$\underline{(2)(4)(5)}$ ※

8. (a,b) 是 $y=\log_2 x$ 上一點 ⇒ 代入滿足方程式

$$\Rightarrow b=\underset{(*)}{\log_2 a} \Rightarrow \underset{(**)}{2^b=a}$$

以下各選項將 x 值代入，檢查 y 值是否正確：

(1) $y=\log_2(2a)=\log_2 2+\log_2 a \underset{(*)}{=} 1+b \neq 2b$ (×)

(2) $y=\log_2 a^2 = 2\log_2 a \underset{(*)}{=} 2b \neq b^2$ (×)

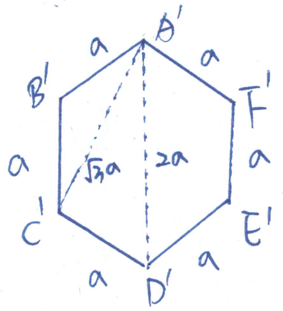
(3) $y=\log_{\frac{1}{2}} a = -\log_2 a \underset{(*)}{=} -b$ (○)

(4) $y=2^b \underset{(**)}{=} a$ (○)

(5) $y=2^{2b}=(2^b)^2 \underset{(**)}{=} a^2 \neq 2a$ (×)

(3)(4)*

9. 正六邊形的中點也是正六邊形，設邊長 a



⇒ 任二點距有 a, $\sqrt{3}a$, $2a$.

三邊長的可能：$(a,a,\sqrt{3}a)$ Ex: $\triangle A'B'C'$ — case1

(由小→大討論) $(a,\sqrt{3}a,2a)$ Ex: $\triangle A'B'D'$ — case2

$(\sqrt{3}a,\sqrt{3}a,\sqrt{3}a)$ Ex: $\triangle A'C'E'$ — case3

case1: 有兩相鄰邊 (a,a) ⇒ 共6個 ($\triangle A'B'C'$, $\triangle B'C'D'$, $\triangle C'D'E'$, $\triangle D'E'F'$, $\triangle E'F'A'$, $\triangle F'A'B'$)

$30°-30°-120°$

case2: 有對角線 $(2a)$ ⇒ 共12個

$30°-60°-90°$ (3×4：每個對角線，有4個)

$$\begin{pmatrix} \triangle A'D'B', & \triangle A'D'C', & \triangle A'D'F', & \triangle A'D'E' \\ \triangle B'E'C', & \triangle B'E'D', & \triangle B'E'A', & \triangle B'E'F' \\ \triangle C'F'B', & \triangle C'F'A', & \triangle C'F'D', & \triangle C'F'E' \end{pmatrix}$$

case3: 均有一個間隔 ⇒ 僅 $\triangle A'C'E'$、$\triangle B'D'F'$ ⇒ 共2個

$(\sqrt{3}a,\sqrt{3}a,\sqrt{3}a)$

$60°-60°-60°$

(1)(2)(5)*

10.

(1) 迴歸線 $y=\frac{1}{2}x+1$ 必過 $(\mu_x,\mu_y)=(\frac{13+t}{5},3)$

$\therefore\ 3=\frac{1}{2}\times\frac{13+t}{5}+1 \Rightarrow 13+t=20. \Rightarrow t=7$ ($\mu_x=4$)

(2)

(3) 迴歸線 $y=\frac{1}{2}x+1$ 斜率 $=\frac{1}{2}=r\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$

$X: 1,3,3,6,7 \Rightarrow \sigma_x=\sqrt{\frac{\Sigma(x_i-\mu_x)^2}{n}}=\sqrt{\frac{(-3)^2+(-1)^2+(-1)^2+1^2+3^2}{5}}=\sqrt{\frac{21}{5}}$

$Y: 1,2,3,4,5 \Rightarrow \sigma_y=\sqrt{\frac{\Sigma(y_i-\mu_y)^2}{n}}=\sqrt{\frac{(-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2}{5}}=\sqrt{\frac{10}{5}}$

$\therefore\ \sigma_y\neq\sigma_x$ (或是可直接看出，X比Y分散)

$\therefore\ r\neq\frac{1}{2}$

平移、伸縮 $X\to aX+b$ ： 平均 $\mu_{aX+b}=a\mu_x+b$ ($+,-,\times,\div$)

$Y\to cY+d$ 　標準差 $\sigma_{aX+b}=|a|\sigma_x$ ($\times,\div$)

相關係數 $r_{aX+b,\,cY+d}=\frac{ac}{|ac|}r_{x,y}$ (正、負)

(4) Y',X' 之 迴歸線斜率 $=r_{x',y'}\cdot\frac{\sigma_{y'}}{\sigma_{x'}}=r\cdot\frac{3\sigma_y}{2\sigma_x}=\frac{3}{2}\times(\underset{不}{\frac{1}{2}})=\frac{3}{4}$

(5) $\mu_{x'}=2\mu_x+1=9$
$\mu_{y'}=3\mu_y-2=7$ $\Rightarrow$ Y',X' 之迴歸線會通過 Y,X 之迴歸線斜率

(3)(5) #

11.

(1) $f(x)$ 除以 $(x-1)$ 餘式 $f(1)=1^{99}+1=2$ (O)

(2) 利用二項式定理： $f(x)=(x-1+1)^{99}+1$
(完全平方式，無法使用餘式定理)

$\therefore\ f(x)=\underbrace{C^{99}_{99}(x-1)^{99}+C^{99}_{98}(x-1)^{98}\cdot 1+\cdots+C^{99}_{2}(x-1)^2\cdot 1^{97}}_{均為(x-1)^2的倍式}+C^{99}_{1}(x-1)\cdot 1^{98}+C^{99}_{0}\cdot 1^{99}+1$ $\overset{x^{99}}{=}$

$\therefore$ 餘式 $=(x-1)+1+1=x+1$ (X)

11、(3) [法一]

設 $f(x)$ 除以 (x^2-1) 的餘式為 $ax+b$

$\Rightarrow f(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b \Rightarrow f(1)=a+b=2$ $\therefore a=1,\ b=1$

$f(-1)=-a+b=0$ 餘式 $=x+1$ (×)

[法二] 除以 $x^2-1 \Rightarrow$ 看到 x^2 用 1 代入

$\therefore f(x)=x^{99}+1=(x^2)^{49}\cdot x+1 \xrightarrow[x^2\to 1]{} 1^{49}\cdot x+1=x+1$ (×)

(4) $f(i)=i^{99}+1=i^3+1=-i+1$ (O)

(5) 令 $x=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}} \Rightarrow x^2=\dfrac{1+2i+(-1)}{2}=i$

$\therefore f(x)=x^{99}+1=(x^2)^{49}\cdot x+1$

$f\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)=(i)^{49}\cdot\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)+1=i\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)+1=\dfrac{i-1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ (×)

(1)(4)*

12、

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\ \cdots$ (*)

(1) $\dfrac{3}{4}=\dfrac{2}{3}+P(B)-\dfrac{1}{2} \Rightarrow P(B)=\dfrac{3}{4}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{9-8+6}{12}=\dfrac{7}{12}$ (O)

(2) A、B 獨立 $\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\dfrac{2}{3}\cdot P(B)$

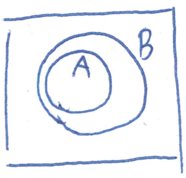
代回(*)：$\dfrac{3}{4}=\dfrac{2}{3}+P(B)-\dfrac{2}{3}P(B) \Rightarrow \dfrac{1}{3}P(B)=\dfrac{1}{12} \Rightarrow P(B)=\dfrac{1}{4}$ (O)

(3) A、B 互斥 $\Rightarrow A\cap B=\phi \Rightarrow P(A\cap B)=0$

代回(*)：$\dfrac{3}{4}=\dfrac{2}{3}+P(B)-0 \Rightarrow P(B)=\dfrac{1}{12}$ (×)

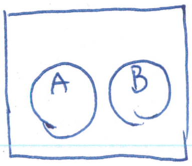
(4)

(5)



: B 最大 $\Rightarrow P(B)=P(A\cup B)=\dfrac{3}{4}$

$A\cap B$ 最大 $\Rightarrow P(A\cap B)=\dfrac{2}{3}$



: B 最小 $\Rightarrow P(B)=P(A\cup B)-P(A)=\dfrac{3}{4}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{12}$

$A\cap B$ 最小 $\Rightarrow P(A\cap B)=0$

(1)(2)(5)*

A、

$(3x-\frac{2}{x^2})^6$ 一般項：$C^6_k(3x)^k(-\frac{2}{x^2})^{6-k}$

$=C^6_k\cdot 3^k\cdot(-2)^{6-k}\cdot x^k\cdot(x^{-2})^{6-k}$

$=C^6_k\cdot 3^k(-2)^{6-k}\cdot x^{3k-12}$

常數項：$3k-12=0 \Rightarrow k=4$，係數：$C^6_4\cdot 3^4(-2)^2=\underline{4860}$ #

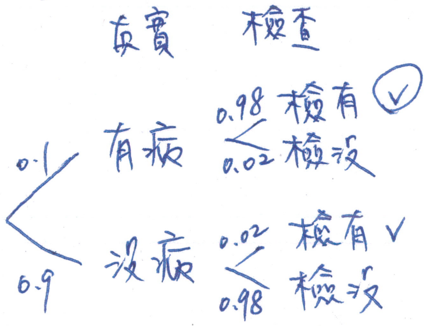
B、考慮多項式 $f(x)-x$．$\Rightarrow$ ∵ $f(1)-1=0$，$f(2)-2=0$，$f(3)-3=0$ ∴ $f(x)-x$ 有因式 $(x-1)$．$(x-2)$．$(x-3)$

$\Rightarrow f(x)-x=(x-1)(x-2)(x-3)Q(x)$

∵ $f(x)$ 是三次且領導係數 $=1$ ∴ $Q(x)=1$

$\Rightarrow f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+x$， $f(4)=3\cdot2\cdot1+4=\underline{10}$ #

C、



$$P=\frac{0.1\times0.98}{0.1\times0.98+0.9\times0.02}=\frac{98}{98+18}=\underline{\frac{49}{58}}$$ #

D、[法一] $\sqrt{a_n}=\frac{\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_{n-1}}}{2}$，此為等差中項 $(a,b,c$ 成等差 $\Rightarrow b=\frac{a+c}{2})$

∴ $<\sqrt{a_n}>$ 是等差數列

$\sqrt{a_1},\sqrt{a_2},\cdots\cdots,\sqrt{a_8} \Rightarrow \sqrt{a_8}=2+7\times(5-2)=23 \Rightarrow a_8=529$

$\sqrt{a_1}=2$，$\sqrt{a_2}=5$

[法二] 非常見遞迴關係 $\Rightarrow$ 找規律

$\sqrt{a_1}=2$　$a_1=4$

$\sqrt{a_2}=5$　$a_2=25$

$\sqrt{a_{n+1}}=2\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}$ $\Rightarrow \sqrt{a_3}=2\sqrt{25}-\sqrt{4}=8 \Rightarrow a_3=64$

$\Rightarrow \sqrt{a_4}=2\sqrt{64}-\sqrt{25}=11 \Rightarrow a_4=121$

⋮

∴ $\sqrt{a_8}=23 \Rightarrow a_8=\underline{529}$ #

E. 有一根 $\sqrt{9+4\sqrt{2}}=\sqrt{9+2\sqrt{8}}=\sqrt{8}+\sqrt{1}=2\sqrt{2}+1$

設另一根 $\beta \Rightarrow \begin{cases} 2\sqrt{2}+1+\beta=-a \\ (2\sqrt{2}+1)\beta=-14 \Rightarrow \beta=\dfrac{-14}{2\sqrt{2}+1}\times\dfrac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1}=-2(2\sqrt{2}-1) \end{cases}$

$=\underline{2-4\sqrt{2}}$ #

F. [法一]

不相鄰 ⇒ 先排其他，再插空.

$^{\vee}O^{\vee}O^{\vee}O^{\vee}$ ：先插入2個甲　　　　再插入乙

case 1: 插在不同空　Ex: $^{\vee}O^{\vee}甲^{\vee}O^{\vee}甲^{\vee}O^{\vee}$.　挑2個空

$C^4_2 \times C^6_2 = 90$

case 2: 插在同一個空 Ex: $^{\vee}O^{\vee}甲^{\vee}甲^{\vee}O^{\vee}O^{\vee}$　甲、甲中間必挑

$C^4_1 \times C^5_1 \quad +) = 20$

$\underline{110}$ #

[法二] 全 − 甲相鄰 − 乙相鄰 + 甲相鄰且乙相鄰

(甲甲)OOOOO　(甲甲)(乙乙)OOO

$=C^7_2C^5_2\left(\frac{1}{2!}\times 2!\right)-C^6_1C^5_2-C^6_1C^5_2+C^5_1C^4_1\left(\frac{1}{2!}\times 2!\right)$

$=210-60-60+20=\underline{110}$ #

G. 中兩發 = 信2發 + 信1發,樺1發 + 樺2發 (記得考慮沒中)

$=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times 2!\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}\times 2!+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}$

中、不中順序可對換

$=\dfrac{4+32+16}{225}=\underline{\dfrac{52}{225}}$ #

H. 設平均成長率 r, 原始業績 N.

$\Rightarrow N(1+25\%)(1+20\%)(1+15\%)(1+10\%)=N(1+r)^4$ [#配合查表,不要約分]

$\Rightarrow (1+r)^4=\frac{125}{100}\times\frac{120}{100}\times\frac{115}{100}\times\frac{110}{100}$, 取 log ⇒ $4\log(1+r)=\log 1.25+\log 1.2+\log 1.15+\log 1.1$

$\Rightarrow 4\log(1+r)=0.0969+0.0792+0.0607+0.0414 \Rightarrow \log(1+r)=0.06955\approx\log 1.17$

$\therefore 1+r\approx 1.17 \Rightarrow r=\underline{17\%}$ #