1. $f(x)$ 是偶函數 $\Rightarrow f(-x)=f(x)$，　$f(-1)=f(1)$

$g(x)$ 是奇函數 $\Rightarrow g(-x)=-g(x)$，　$g(-1)=-\cancel{f}g(1)$

$f(x)-g(x)=x^3+x^2+1$

$x=-1$ 代入 $\Rightarrow f(-1)-g(-1)=(-1)^3+(-1)^2+1=1$

$\Rightarrow f(1)+g(1)=1$　　(4) #

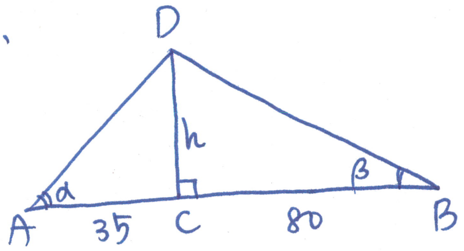
2.

	第1個數	連續K個
$a_1=1$	1	1
$a_2=1+3$	1	2
$a_3=3+5+7$	3	3
$a_4=5+7+9+11$	5	4
$a_5=7+9+11+13+15$	7	5
$a_6=9+11+13+15+17+19$	9	6
⋮	⋮	⋮
a_n	$2n-3$	n
⋮		
a_{2016}	4029	2016

a_{2016} (個位數) $=\underbrace{(9+1+3+5+7)+\cdots+(9+1+3+5+7)}_{共\ \frac{2015}{5}=403\ 組}+9 \xrightarrow{個位數} 4$

(3) #

3.



給定鄰邊和對邊 $\Rightarrow \tan\theta$

$\therefore \tan\alpha=\dfrac{h}{35}$，$\tan\beta=\dfrac{h}{80}$

$\because \alpha\geq 2\beta$ 且 $\tan\theta$ 是在第一象限遞增 $\Rightarrow \tan\alpha \geq \tan 2\beta = \dfrac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}$

$\therefore \dfrac{h}{35}\geq\dfrac{2\left(\frac{h}{80}\right)}{1-\left(\frac{h}{80}\right)^2}$　　$\because \alpha<90^\circ \quad \therefore \beta<45^\circ$

$\Rightarrow \tan\beta=\dfrac{h}{80}<1$

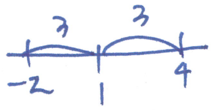
$\Rightarrow \dfrac{\cancel{h}}{\cancel{35}_7}\left[1-\dfrac{h^2}{6400}\right]\geq 2\cdot\dfrac{\cancel{h}}{\cancel{80}_{\cancel{40}\,8}} \Rightarrow 1-\dfrac{h^2}{6400}\geq\dfrac{7}{8}\Rightarrow\dfrac{h^2}{6400}\leq\dfrac{1}{8}$

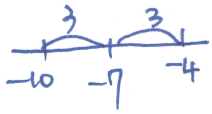
$\Rightarrow h^2\leq 800 \Rightarrow h\leq\sqrt{800}\approx 28.\cdots<28.5$　　(2) #

$(28.5^2=812.25)$

4. $\frac{xy+3y}{2} \geq \sqrt{(xy)(3y)} \Rightarrow \frac{15}{2} \geq \sqrt{3xy^2} \Rightarrow \frac{225}{4} \geq 3xy^2 \Rightarrow xy^2 \leq \frac{75}{4}$

(4)#

5. $|x-1| \leq 3 \Rightarrow$  $\Rightarrow -2 \leq x \leq 4$

$|2y+7| \leq 3 \Rightarrow$  $\Rightarrow -10 \leq 2y \leq -4 \Rightarrow -5 \leq y \leq -2$

(1) 小－大 $\leq x-y \leq$ 大－小 $\Rightarrow$ $0 \leq x-y \leq 9$ (o)

(2) 找 $(-2)\cdot(-5)$, $(-2)(-2)$, $4(-5)$, $4(-2)$ 的最大和最小

$-20 \leq xy \leq 10$ (o)

(3) $\frac{x}{y}$ 小心分母是否通過0，若沒有找 $\frac{-2}{-5}, \frac{-2}{-2}, \frac{4}{-5}, \frac{4}{-2}$ 的最大和最小

$-2 \leq \frac{x}{y} \leq 1$ (o)

(4) x^2 小心是否通過 0 $\Rightarrow$ $0 \leq x^2 \leq 16$ (x)

(5) 同(4)，$4 \leq y^2 \leq 25$ (o)

(1)(2)(3)(5)#

6. $f(-1)=1$, $\Rightarrow$ $f(x)$ 除以 $(x+1)$ 餘 1

$f(1)=5$ $\Rightarrow$ $f(x)$ 除以 $(x-1)$ 餘 5

$f(3)=9$ $\Rightarrow$ $f(x)$ 除以 $(x-3)$ 餘 9

設 $f(x)$ 除以 $(x+1)(x-1)(x-3)$ 餘 $r(x)$

$\Rightarrow$ $f(x) = (x+1)(x-1)(x-3)\bigcirc(x) + r(x)$ …… (*)

被除　　除　　商　　餘

(低於3次)　(3次)　(常數)　(最高2次)

(1) 表示法為 Lagrange 插值多項式.

$\because f(x)$ 常數項為 a $\therefore f(0)=a$，又 $f(-1)=1, f(1)=5, f(3)=9$

$$\therefore f(x)=a\cdot\frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(0+1)(0-1)(0-3)}+1\cdot\frac{x(x-1)(x-3)}{(-1)(-1-1)(-1-3)}+5\cdot\frac{x(x+1)(x-3)}{1(1+1)(1-3)}+9\cdot\frac{x(x+1)(x-1)}{3(3+1)(3-1)}\quad(**)$$

(2) 由 (*) 知：$f(-1)=r(-1)=1$，$f(1)=r(1)=5$，$f(3)=r(3)=9$.

$r(x)=ax^2+bx+c$

$$\begin{cases} r(-1)=a-b+c=1 \\ r(1)=a+b+c=5 \\ r(3)=9a+3b+c=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 2b=4 \\ 8a+2b=4 \end{array} \Rightarrow a=0, c=1$$

$\therefore r(x)=2x+1$

or

直接發現 $(-1,1),(1,5),(3,9)$ 共線 $(m=\frac{4}{2})$

$\therefore r(x)=\frac{4}{2}x+1$

$=2x+1$

$\therefore f(x)=(x+1)(x-1)(x-3)Q(x)+(2x+1) \Rightarrow$ 不可能是二次 (×)

$\therefore f(x)$ 必為 $\underset{\uparrow}{\text{一次}}$ or 三次以上

$(Q(x)=0)$

(3) $f(x)$ 必為一次或三次 $\Rightarrow$ 必有實根 (○)

(4)
$$f(2)=a\cdot\frac{3\cdot1\cdot(-1)}{1\cdot(-1)\cdot(-3)}+1\cdot\frac{2\cdot1\cdot(-1)}{(-1)(-2)(-4)}+5\cdot\frac{2\cdot3\cdot(-1)}{1\cdot2\cdot(-2)}+9\cdot\frac{2\cdot3\cdot1}{3\cdot4\cdot2}$$

代入 (**)

$$=-a+\frac{1}{4}+\frac{30}{4}+\frac{9}{4}=\frac{40}{4}-a=10-a$$

$\therefore$ 當 $a>3 \Rightarrow$ 取 $a=10 \Rightarrow f(2)=0$ (×)

or $a>10$，$f(1)>0, f(2)<0, f(3)>0 \Rightarrow$ 1~2之間、2~3之間 必有實根

(5) $g(x)$ 除以 $x(x+1)(x-1)(x-3)$，設餘 $R(x)$

$\Rightarrow g(x)=x(x+1)(x-1)(x-3)q(x)+R(x)$

$\therefore \left.\begin{array}{l} g(0)=R(0)=a \\ g(-1)=R(-1)=1 \\ g(1)=R(1)=5 \\ g(3)=R(3)=9 \end{array}\right\}$ $\therefore R(x)$ 與 $f(x)$ 有4個值 $(0,-1,1,3)$ 相同.

且次數小於或等於 3次

$\Rightarrow R(x)=f(x)$ (○)

$\underline{(1)(3)(5)}$ *

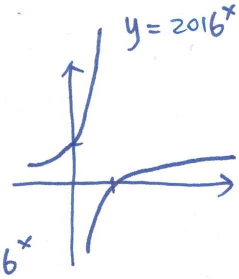
7. (1) 對稱 $y=x$：$y\to x$
$x\to y$

$$y=-\log_{2016}x \xrightarrow[y=x]{\text{對稱}} x=-\log_{2016}y$$

$\therefore -x=\log_{2016}y$

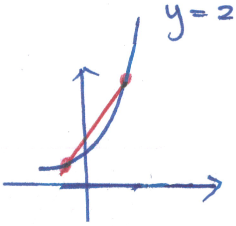
$\therefore y=2016^{-x}$ (○)

(2) 交點 ⇒ 畫圖



$y=\log_{2016}x$ ⇒ 沒有交點 (×)

(3)



如圖，任二點斜率必為正 (○)

(4) 與x軸相交 ⟺ 與 $y=0$ 解聯立.
$(y=0)$

$$\begin{cases} y=\log_{2016}(x^2-12x+40) \\ y=0 \end{cases}$$

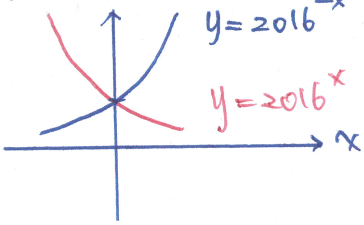
$\Rightarrow x^2-12x+40=1$

$\Rightarrow x^2-12x+39=0$

$D=(-12)^2-4\cdot 39<0$ ∴無解

∴沒有交點 (×)

(5) $y=2016^{-x}=\left(\frac{1}{2016}\right)^x$



(×)

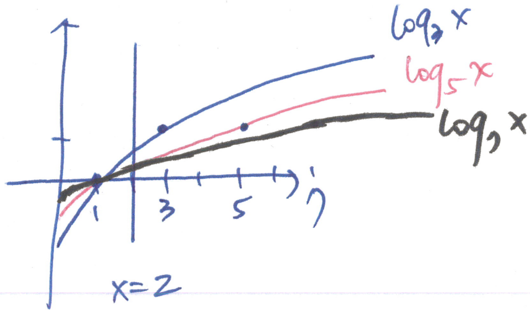
(1)(3) #

8. (1)(2) $a=\log_3 6=\log_3 3+\log_3 2=1+\log_3 2$

(3) $b=\log_5 10=\log_5 5+\log_5 2=1+\log_5 2$

$c=\log_7 14=\log_7 7+\log_7 2=1+\log_7 2$

$\therefore a>b>c$



(4)(5) $1.5=1+0.5=1+\log_4 2$ ∴ $a>1.5>b$

(2)(4) #

9. (1) 已知甲要使用 ⇒ 當日其他三人至少1人使用

$= 全 - 其他三人均不使用$

$= 1 - 0.5\times0.5\times0.6 = 0.85$ (o)

(2) 已知甲要使用 ⇒ 當日其他三人至少2人使用

= (乙丙用,丁不用) + (乙丁用,丙不用) + (丙丁用,乙不用)

+ (乙丙丁均使用)

$= 0.5\times0.5\times0.6 + 0.5\times0.4\times0.5 + 0.5\times0.4\times0.5 + 0.5\times0.5\times0.4$

$= 0.15 + 0.1 + 0.1 + 0.1 = 0.45$ (x)

(3) 已知甲要使用 ⇒ 當日其他三人恰1人使用

(乙用,丙丁不用) (丙用,乙丁不用) (丁用,丙乙不用)

$= 0.5\times0.5\times0.6 + 0.5\times0.5\times0.6 + 0.5\times0.5\times0.4 = 0.4$ (x)

(4) 已知丙要使用 ⇒ 當日其他三人恰1人使用

= (甲用,乙丁不用) + (乙用,甲丁不用) + (丁用,甲乙不用)

$= 0.6\times0.5\times0.6 + 0.5\times0.4\times0.6 + 0.4\times0.4\times0.5$

$= 0.18 + 0.12 + 0.08 = 0.38$ (o)

(5) 已知甲、乙要使用 ⇒ 當日其他二人至少1人使用

= 全 − 都不使用

$= 1 - 0.5\times0.6 = 0.7$ (o)

(1)(4)(5) #

10. 迴歸線: $y - \mu_y = r\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \mu_x)$

$\Rightarrow y - 75 = 0.8\,\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - 70)$

(10, 35) 代入: $-40 = 0.8\,\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\cdot -60 \Rightarrow \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{2}{3}\times\frac{10}{8} = \frac{5}{6}$

(2)

$m = r\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 0.8\cdot\frac{5}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ (x)

(1)

迴歸線: $y - 75 = \frac{2}{3}(x - 70)$ 必過平均 (70, 75)

(3)(4) $\sigma_x = \frac{6}{5}\sigma_y = 1.2\,\sigma_y$

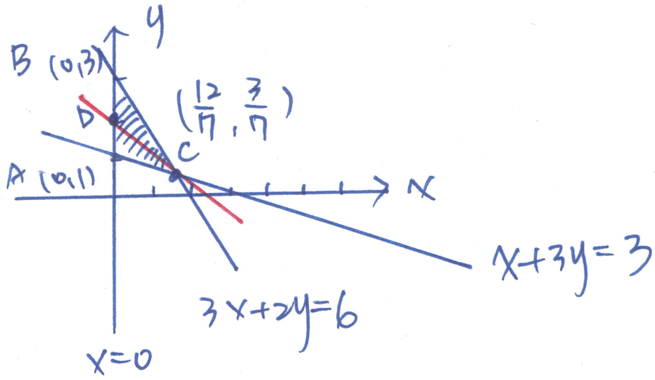
(5) 迴歸線僅能預測,無法取得真值. (x)

(1)(3) #

A、 $\begin{cases} x \geq 0 \\ x+3y \geq 3 \\ 3x+2y \leq 6 \end{cases}$

$L: y=kx+2$

⇒表斜率 k，
必過點 $(0,2)$



∵ $(0,2)$ 是 $\overline{AB}$ 之中點，若直線 L 恰平分 $\triangle ABC$ 面積

⇒ L 必過 C 點， $m_L = k = \dfrac{\frac{3}{7}-2}{\frac{12}{7}-0} = \dfrac{-11}{12}$ #

B、

$a_1 \cdot a_2 \times \cdots \times a_{60} = (a)(ar)\times\cdots\times(ar^{59}) = a^{60}\cdot r^{1+2+\cdots+59} = a^{60}\cdot r^{\frac{59\cdot 60}{2}} = a^{60}\cdot r^{1770}$

$a_3 \times a_6 \times \cdots \times a_{60} = (ar^2)(ar^5)\times\cdots\times(ar^{59}) = a^{20} r^{2+5+\cdots+59} = a^{20}\cdot r^{\frac{20\cdot 61}{2}} = a^{20} r^{610}$

$a^{60}\cdot r^{1770} = r^{60} \Rightarrow a^{60} = r^{-1710} \Rightarrow a^{20} = r^{-570}$

∴ $a^{20}\cdot r^{610} = r^{-570}\cdot r^{610} = r^{40}$

$n=40$ #

C、 $n(A)$：挑3個不同系 = 有國文系 or 沒有國文系

$= C^3_1 C^7_2 + C^7_3 = 3\times 21 + 35 = 98$ #

D. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{y}} - \dfrac{y}{\sqrt{x}}\right)^8 \Rightarrow$ 一般項： $C^8_k \left(\dfrac{x}{\sqrt{y}}\right)^k \left(\dfrac{y}{\sqrt{x}}\right)^{8-k}$

$= C^8_k \, x^{k-\frac{1}{2}(8-k)} \, y^{-\frac{1}{2}k+8-k}$

x^2y^2: $k-\frac{1}{2}(8-k)=2 \Rightarrow \frac{3}{2}k=6$, $k=4$

$-\frac{1}{2}\times 4 + 8 - 4 = 2$

∴ $k=4 \Rightarrow C^8_4 x^2y^2 = \dfrac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1} x^2y^2$

$= 70x^2y^2$ #

E.

$$\text{甲4局內贏}=\overset{2局}{甲、甲}+\overset{3局}{乙、甲、甲}+\overset{4局}{甲、乙、甲、甲}$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$$

$$=\frac{36+12+8}{81}=\frac{56}{81}$$

F.

設性向測驗成績為A，成就測驗成績為B

⇒ 標準差為σ_A ; 標準差為σ_B

由 $y=0.81x+3.3$ 知 $r\cdot\frac{\sigma_B}{\sigma_A}=0.81$ —① $(r>0)$

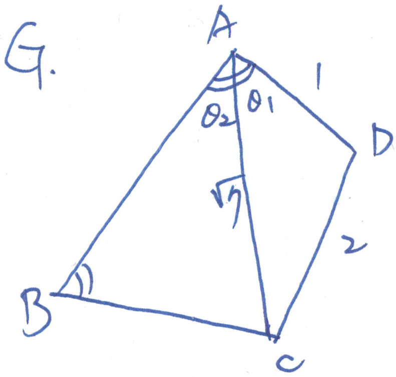
$y=0.64+31.6$ 知 $r\cdot\frac{\sigma_A}{\sigma_B}=0.64$ —②

$\therefore$ ①·② $\Rightarrow r^2=0.81\times0.64 \Rightarrow r=\pm\sqrt{0.81\times0.64}$ (取正)

$=0.9\times0.8=0.72$

$\Rightarrow 100r=\underline{72}$ #

G.



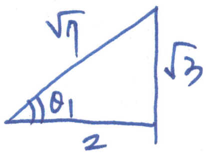
∵已知 △ACD 的三邊長 ∴ △ACD 的三內角均可求得

又給定 ∠BAD，即可利用 ∠BAD−∠CAD=∠BAC

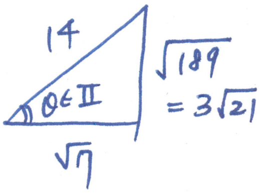
得知 ∠BAC ⇒ △ABC 三內角均可求得 (∠ABC 已知)

∴角都知道 ⇒ 正弦

$$\cos\angle CAD=\frac{(\sqrt7)^2+1^2-2^2}{2\cdot\sqrt7\cdot1}=\frac{4}{2\sqrt7}=\frac{2}{\sqrt7}$$



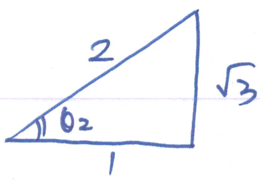
$$\cos\angle BAC=\cos(\overset{\theta}{\angle BAD}-\overset{\theta_1}{\angle CAD})$$ ，設 $\angle BAD=\theta$



$$=\cos\theta\cos\theta_1+\sin\theta\sin\theta_1$$

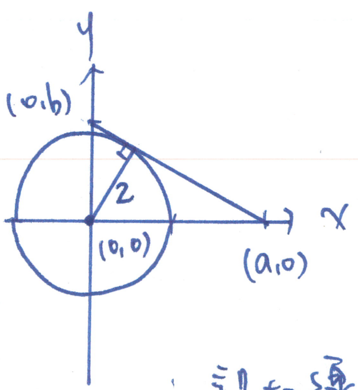
$$=\frac{2}{\sqrt7}\left(\frac{-\sqrt7}{14}\right)+\left(\frac{\sqrt3}{\sqrt7}\right)\left(\frac{3\sqrt{21}}{14}\right)$$

$$=-\frac{1}{7}+\frac{9}{14}=\frac{1}{2}$$



$$\therefore \frac{\overline{BC}}{\sin\theta_2}=\frac{\sqrt7}{\frac{\sqrt{21}}{6}}\Rightarrow \overline{BC}=\sqrt7\times\frac{6}{\sqrt{21}}\times\frac{\sqrt3}{2}=\underline{3}$$ #

H.



設切線交正 x 軸於 $(a,0)$
正 y 軸於 $(0,b)$

$\Rightarrow$ 三角形面積 $= \frac{1}{2}\cdot a\cdot b \quad \cdots (1)$

∵ 設切線 L : $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. (截距式)

∵ $d(O,L)=r \Rightarrow \dfrac{\left|\frac{0}{a}+\frac{0}{b}-1\right|}{\sqrt{(\frac{1}{a})^2+(\frac{1}{b})^2}}=2 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{(\frac{1}{a})^2+(\frac{1}{b})^2}}=2$

$\Rightarrow (\frac{1}{a})^2+(\frac{1}{b})^2=\frac{1}{4} \quad \cdots (2)$

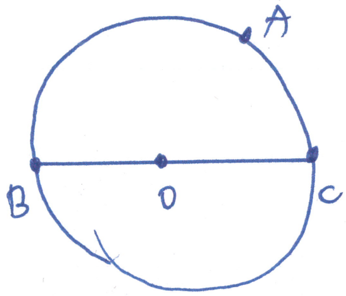
由 (1)(2) 知. 相加、相乘求最小值 $\Rightarrow$ 算幾不等式

$\dfrac{(\frac{1}{a})^2+(\frac{1}{b})^2}{2} \geq \sqrt{(\frac{1}{a})^2(\frac{1}{b})^2} \Rightarrow \frac{1}{8} \geq \sqrt{\frac{1}{a^2b^2}} \Rightarrow ab \geq 8$

$\Rightarrow \frac{1}{2}ab \geq 4$ #

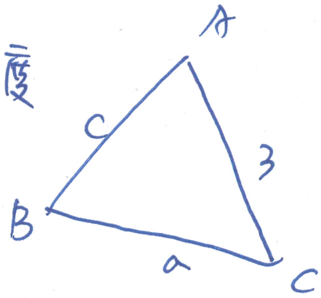
I、

$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ 表示 O、B、C 三點共線. 且 $\overline{OB}=\overline{OC}$



$\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 夾角為 90° #

J、 欲求 a, b, c 三邊長 $\Rightarrow$ 所有已知條件換成長度



$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=a\cdot c\cdot\cos B=2 \Rightarrow ac=6$

$\cos B=\frac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{3} \Rightarrow a^2+c^2-9=4$

$\Rightarrow a^2+c^2=13$

$\begin{cases} ac=6 \\ a^2+c^2=13 \end{cases} \Rightarrow (a,c)=(3,2)$ or $(-2,-3)$ ∵ $a>c$ ∴ $a=3$
$(-3,-2)$ or $(2,3)$ 且 $a, c>0$ $c=2$

$a-b+c=2$ #