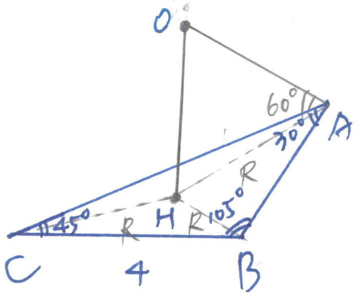
1. $\log_8 n$ 是有理數 ⇒ n 是 2 的乘冪

n 可能的值為 $n=2^0, 2^1, \cdots, 2^9$

總和 $=1+2+2^2+\cdots+2^9=\dfrac{1(2^{10}-1)}{2-1}=1023$　　(2)#

2.



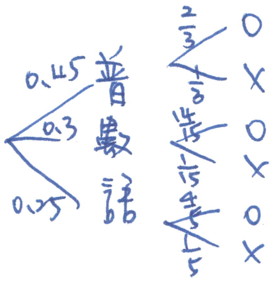
設旗竿頂端 O，底端 H.

H 到 A、B、C 等距 ⇒ $\overline{AH}=\overline{BH}=\overline{CH}=R$ (△ABC 外接圓半徑)

∵正弦: $\dfrac{4}{\sin 30^\circ}=2R \Rightarrow 2R=8 \Rightarrow R=4$

∴ $\overline{OH}=4\sqrt{3}$ (△OAH) $\approx 6.9 \le 8$　　(5)#

3.



$$P=\frac{0.3\times\frac{1}{15}}{0.45\times\frac{1}{3}+0.3\times\frac{1}{15}+0.25\times\frac{1}{5}}=\frac{2}{15+2+5}=\frac{1}{11}$$

(3)#

4.

若 $b=a \Rightarrow \begin{cases} x+ay=a^2+1 \\ x+ay=a^2+1 \end{cases}$ ⇒ 無限多解

若 $b\ne a \Rightarrow$ ②−①: $(b-a)y=b^2-a^2 \Rightarrow y=b+a$ ⇒ 恰有一組解 $(1-ab, a+b)$

∴ $x=-a(b+a)+a^2+1=-ab+1$

(1) 方程組不可能無解

(4)(5) 若 $a=1, b=\frac{1}{2}$ ⇒ 此方程組有解 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$　　(1)#

5. ∵ 6 是中位數 ∴ x, y 均大於 6.

平均 $=\dfrac{2+4+4+5+5+6+7+8+11+x+y}{11}=6 \Rightarrow x+y=66-52=14$

標準差 $=\sqrt{\dfrac{\Sigma(x_i-\mu_x)^2}{n}}=\sqrt{\dfrac{4^2+2^2+2^2+1^2+1^2+0^2+1^2+2^2+5^2+(x-6)^2+(y-6)^2}{11}}$

$=\sqrt{\dfrac{56+(x-6)^2+(y-6)^2}{11}}$ [已知 $x+y=14$ 且 $x, y>6$；$2\le (x-6)^2+(y-6)^2\le 4$　(7,7)　(6,8)] $\approx\sqrt{\dfrac{60}{11}}\doteqdot 2.3\cdots$　　(4)#

6. 有兩個最大值 ⇒ $x=a, b$ 時產生最大值.

∴ $a+b=6$, ⇒ $\frac{a+b}{2}=3$ ⇒ $x=3$ 是對稱軸.

∴ $f(x)=2(x^2+\frac{k-3}{2}x)+6k=2(x+\frac{k-3}{4})^2+6k-2(\frac{k-3}{4})^2$

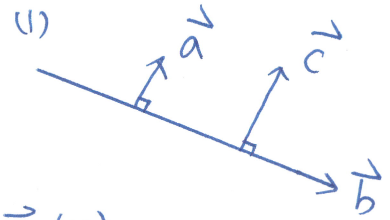
∴ $\frac{k-3}{4}=-3 \Rightarrow k=-9$

∴ $f(x)=2x^2-12x-54$ ⇒ ① $D=b^2-4ac>0$

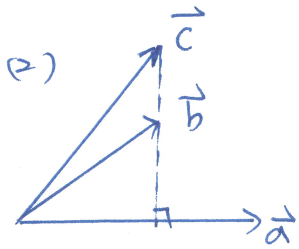
② $\begin{cases}\alpha+\beta=6\\ \alpha\beta=-27\end{cases}$ ∴ α, β 一正一負

∴ $f(x^2)=0 \Rightarrow x^2=\alpha, \beta$ (一正一負) ⇒ x 有2個實根 $(\pm\sqrt{\alpha}, \pm\sqrt{\beta})$ (3)※

7. (1) $\vec{a}\perp\vec{b}$ 且 $\vec{b}\perp\vec{c} \Rightarrow \vec{a}\parallel\vec{c}$ (×)



(2) 如右圖, $\vec{b}\neq\vec{c}$ (×)

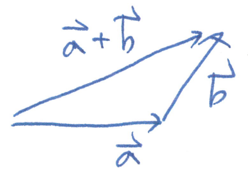


(3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Rightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$ ∴ $\vec{a}, \vec{b}$ 不必為 $\vec{0}$ (×)

(4) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}| \xrightarrow{\text{平方}} \cancel{|\vec{a}|^2}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\cancel{|\vec{b}|^2}=\cancel{|\vec{a}|^2}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\cancel{|\vec{b}|^2} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Rightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$ (○)

(5) 三角不等式 : $|\vec{a}+\vec{b}|\leq|\vec{a}|+|\vec{b}|$ "="成立 $\vec{a}\parallel\vec{b}$ (○)

(2邊之和>第3邊)



(1)(2)(3)※

8. (1) $x>|y|$ ⇒ x 的值 > y 的值 且 $x>0$ ⇒ $x+y>0$ (○)

(2) $\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2}\geq\sqrt{(\frac{1}{x})(\frac{1}{y})}$ 的條件是 $\frac{1}{x}>0$ 且 $\frac{1}{y}>0$.

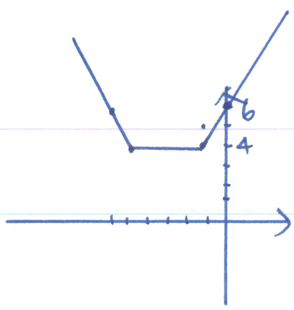
若 $x<0$, $y<0$ ⇒ $\frac{\frac{1}{(-1)}+\frac{1}{(-1)}}{2}<\sqrt{\frac{1}{(-1)}\frac{1}{(-1)}}$ (×)

(3) $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$ ⇒ $x+y$, xy 均為有理數, 但 $x-y$ 是無理數.

(4) 取 $x=2$, $y=1$, ⇒ $z=\frac{9}{4}$ (×)

(5) $y=|x+1|+|x+5|$ 為折線圖

x	-6	-5	-1	0
y	6	4	4	6

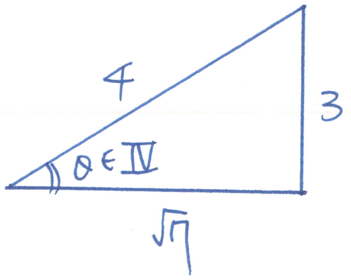


均在 $y=4$ 上方.

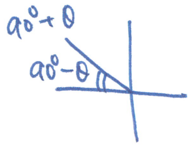
∴ $f(x)\geq4$ (○)

(1)(5)※

9. (1) $\tan\theta = -\frac{3}{\sqrt{7}} < 0$ (O)



(2) $\tan(90^\circ+\theta) = -\tan(90^\circ-\theta)$



$= -\frac{1}{\tan\theta} = \frac{\sqrt{7}}{3}$ (O)

(3) $\sin\theta+\cos\theta = \frac{-3}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4} < 0$ (X)

(4) $\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta = 1-2\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{-1}{8}$ (X)

(5) $\theta \in \text{IV}$, $\cos 2\theta = \frac{-1}{8}$ $\therefore 2\theta \notin \text{IV}$ (O)

(1)(2)(5) #

10. $y = \frac{6}{5}x - 2 \Rightarrow$ ① $\frac{6}{5} = m = r\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ ② 必過 $(\mu_x, \mu_y) = (60, \mu_y)$

(1) $\mu_y = \frac{6}{5}\times 60 - 2 = 70$ (O)

(2) $\frac{6}{5} = \frac{4}{5}\times\frac{\sigma_y}{4} \Rightarrow \sigma_y = 6$ (O)

(3) $\mu_z = \frac{\mu_x - 60}{4} = \frac{60-60}{4} = 0$ (O)

(4) $\sigma_z = \frac{\sigma_x}{4} = \frac{4}{4} = 1$ (O)

(5) $r_{yz} = r_{y,\frac{x}{4}-60} = r_{y,x} = \frac{4}{5}$ (O)

(1)(2)(3)(4)(5) #

11.

(1) $f(x)g(x)$ 除以 $(x-2)$ 之餘 $f(2)g(2) = (8-8+6-10)(4+2+1) = -28$ (X)

(2) $f(2) = 8-8+6-10 < 0$
$f(3) = 27-18+9-10 > 0$ $\Big] \to f(2)f(3) < 0$ $\therefore f(x)=0$ 在 $2\sim3$ 之間必有實根 (O)

(3) 若 $f(2^x)+4=0$ 有實根 $x=1 \Rightarrow f(2^1)+4=0 \Rightarrow 8-8+6-10+4=0$ (O)

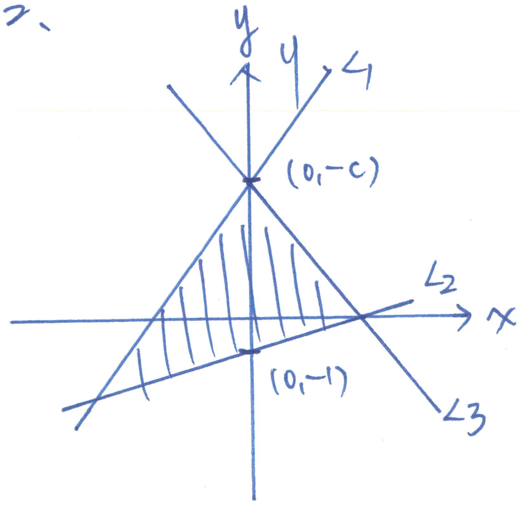
(4) $g(x) = x^2+x+1 \Rightarrow D = b^2-4ac = 1^2-4\cdot1\cdot1 = -3 < 0$ $\therefore g(x)$ 恆正 (O)

(5) $g(2^x) = (2^x)^2+(2^x)+1 = \left(2^x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ $\because 2^x > 0$

$\therefore g(2^x) > \left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} = 1$ (X)

(2)(3)(4) #

12、



① $2x+y+c=0 \Rightarrow m=-2 \Rightarrow L_3$

必過點 $(0,-c) \Rightarrow c<0$

② $ax+by+b=0 \Rightarrow ax+b(y+1)=0$

必過點 $(0,-1) \Rightarrow L_2$

∵可行解區域在 L_2 之左上

左、$\geq 0 \Rightarrow a<0$

上、$\geq 0 \Rightarrow b>0$.

③ $dx+ey+f=0$ 是 L_1

∵可行解區域在 L_1 右下 $\Rightarrow$ 右，$\geq 0 \Rightarrow d>0$

下，$\geq 0 \Rightarrow e<0$

$x=0$ 時 $y=\frac{-f}{e} \Rightarrow \frac{-f}{e}>0 \Rightarrow f>0$

(2)(3)(5)＊

13.

(1) 各項係數和 $=f(1)=(1^2-2\cdot 1)^{100}=1$ (o)

(2) $f(3)=(3^2-2\cdot 3)^{100}=3^{100}$ 的個位數字 ⇒ 找規律

$\underbrace{3^1\Rightarrow 3,\ 3^2\Rightarrow 9,\ 3^3\Rightarrow 7,\ 3^4\Rightarrow 1,\ 3^5\Rightarrow 3}_{4次一循環}$ ∴ 3^{100} 個位數字 $=3^4$ 個位數字 $=1$ (o)

(3)(4) $f(x)=(x^2-2x)^{100}=[(x-1)^2-1]^{100}$

$=C^{100}_{100}[(x-1)^2]^{100}+C^{100}_{99}[(x-1)^2]^{99}(-1)+\cdots+C^{100}_{2}[(x-1)^2]^2(-1)^{98}+C^{100}_{1}(x-1)^2(-1)^{99}+C^{100}_{0}(-1)^{100}$

$(x-1)^2$ 的倍式　餘式

$(x-1)^4$ 的倍式　餘式

∴ $f(x)$ 除以 $(x-1)^2$ 餘 $C^{100}_0(-1)^{100}=1$ (o)

$f(x)$ 除以 $(x-1)^4$ 餘 $C^{100}_1(x-1)^2(-1)^{99}+C^{100}_0(-1)^{100}=-100(x-1)^2+1$ (o)

(5) $f(x)=(x^2-2x)^{100}$ 一般項 $C^{100}_k(x^2)^k(-2x)^{100-k}=C^{100}_k(-2)^{100-k}\cdot x^{100+k}$

∴ 當 $k=1$ 時 $\Rightarrow C^{100}_1\cdot(-2)^{99}\cdot x^{101}$ (x)

(1)(2)(3)(4)＊

A、 $a_2=\dfrac{2a_1}{a_1+1}=\dfrac{2\times\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+1}=\dfrac{4}{5}$, $a_3=\dfrac{2a_2}{a_2+1}=\dfrac{2\times\frac{4}{5}}{\frac{4}{5}+1}=\dfrac{8}{9}$

$a_4=\dfrac{2a_3}{a_3+1}=\dfrac{2\times\frac{8}{9}}{\frac{8}{9}+1}=\dfrac{16}{17}$, $a_5=\dfrac{2a_4}{a_4+1}=\dfrac{2\times\frac{16}{17}}{1+\frac{16}{17}}=\dfrac{32}{33}$

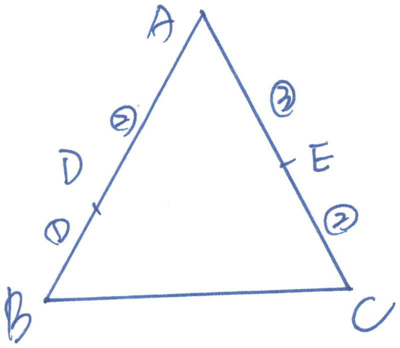
$a_6=\dfrac{2a_5}{a_5+1}=\dfrac{2\times\frac{32}{33}}{\frac{32}{33}+1}=\dfrac{64}{65}$, $a_7=\dfrac{2a_6}{a_6+1}=\dfrac{2\times\frac{64}{65}}{1+\frac{64}{65}}=\underline{\dfrac{128}{129}}$ #

[另解] 找規律 ⇒ 猜測 $a_n=\dfrac{2^n}{2^n+1}$

$\Rightarrow \dfrac{2a_n}{a_n+1}=\dfrac{2\times\frac{2^n}{2^n+1}}{\frac{2^n}{2^n+1}+1}=\dfrac{2\times2^n}{2^n+2^n+1}=\dfrac{2^{n+1}}{2^{n+1}+1}=a_{n+1}$ ∴ $\underline{a_7=\dfrac{128}{129}}$ #

B、 G是重心 ⇒ 與向量有關 $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

題目為 $\overrightarrow{AG}$ ⇒ $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

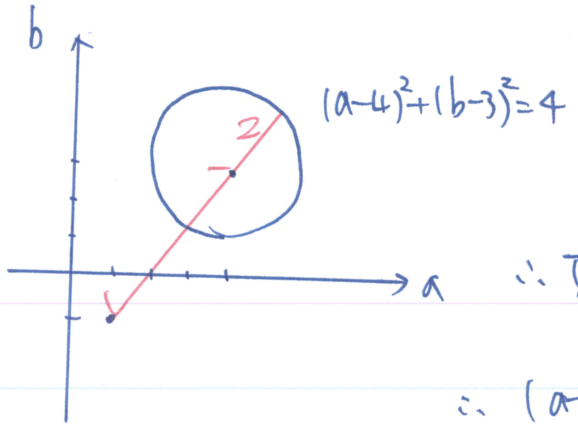


$\Rightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}\right)+\frac{1}{3}\times\left(\frac{5}{3}\overrightarrow{AE}\right)$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{5}{9}\overrightarrow{AE}$

$\underline{\left(\frac{1}{2},\frac{5}{9}\right)}$ #

C、 $(a-4)^2+(b-3)^2=4$ ⇒ 以圓心 $(4,3)$，半徑 $=2$ 之圓



求 $(a-1)^2+(b+1)^2$

即 (a,b) 到 $(1,-1)$ 之距離平方

∴ 最遠距離 $=\sqrt{3^2+4^2}+2=7$

∴ $(a-1)^2+(b+1)^2$ 之最大值 $=7^2=\underline{49}$ #

D.

$\log x = -7.0458 = -8 + 0.9542$

$\therefore \log y$ 之尾數為 0.4771，又 $-9 \le \log y \le -8$

$\log y = -9 + 0.4771 = -8.5229$

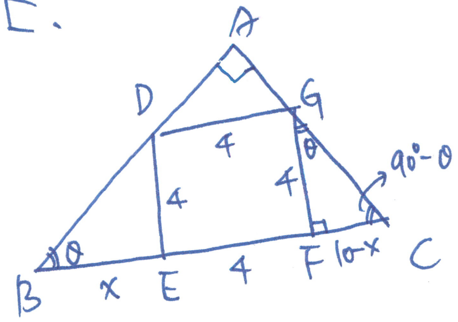
$\Rightarrow 10^8(x-y) = 10^8\left(10^{-7.0458} - 10^{-8.5229}\right) = 10^{0.9542} - 10^{-0.5229}$

$\log 10^{0.9542} = 0.9542 = \log 9 \Rightarrow 10^{0.9542} = 9$

$\log 10^{-0.5229} = -0.5229 = -1 + 0.4771 = \log \frac{3}{10} \Rightarrow 10^{-0.5229} = 0.3$

$\therefore 9 - 0.3 = 8.7$ 最接近 $\underline{9}$ #

E.



設 $\overline{BE} = x \Rightarrow \overline{CF} = 10 - x$

由△BDE知：$\tan\theta = \frac{4}{x}$

由△GFC知：$\tan\theta = \frac{10-x}{4}$

$\therefore \frac{4}{x} = \frac{10-x}{4} \Rightarrow 16 = 10x - x^2$

$\Rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \Rightarrow x = 8$ or 2

$\therefore \tan B + \tan C$

$= \frac{4}{2} + \frac{4}{8}$

$= \underline{\frac{5}{2}}$ #

F. 5物分4人

[法一] 正面 ⇒ 當 (1,1,1,2)

(手,手,手,耳+耳) $\Rightarrow \frac{4!}{3!} = 4$

(手,手,耳,手+耳) $\Rightarrow \frac{4!}{2!} = 12$

(手,耳,耳,耳+耳) $\Rightarrow \frac{4!}{2!} = 12$

共 $\underline{28}$ 種 #

[法二] 反面 = 全 − 有1人沒有 + 有2人沒有 − 有3人沒有 + 有4人沒有

全：第1人得 x_1 手 y_1 耳 $\Rightarrow x_1+x_2+x_3+x_4 = 3$ 且 $y_1+y_2+y_3+y_4 = 2$

2 x_2 y_2

3 x_3 y_3

4 x_4 y_4

$\therefore$ 方法 $= H^4_3 \cdot H^4_2$

同理可推得其他 4人分 3人分 2人分

$\therefore$ 方法 $= H^4_3 H^4_2 - C^4_1 H^3_3 H^3_2 + C^4_2 H^2_3 H^2_2 - C^4_3 H^1_3 H^1_2 + 0 = \underline{28}$ #

$20\times10 - 4\times10\times6 + 6\times4\times3 - 4\times1\times1$

9、設轉運站：A、B、C、D（A：中山；B：南京復興），設非轉運站：E、F、G、H。

$n(S)$：從 A、B、C、D 進，任意出（甲、乙兩人不得同門進出，皆須出不同站）

甲進 乙進 甲出 乙出

$4 \times 3 \times 1 \times 7$ （乙進＝甲出）

$4 \times 3 \times 6 \times 6$ （乙進≠甲出）

$\therefore n(S) = 84 + 432 = 516$

$n(A)$：甲進、甲出 乙進 乙出

A B B A ⇒ 共2種

or B A A B

$\therefore P = \frac{2}{516} = \frac{1}{258}$ #