1、 目前勝率 $= \frac{35}{86}$

設 t 年後可超過 124 勝 $\Rightarrow 35 + \frac{35}{86}(30t) \geq 125$

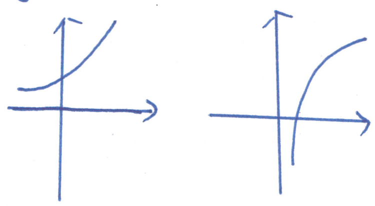
$\Rightarrow t > \frac{125-35}{30} \times \frac{86}{35} = 7.\cdots \qquad \Rightarrow t \geq 8$ 年

$2014 + 8 = 2022$

(2)

2. $y = a^x \qquad y = \log_a x$

$a > 0$



$\Rightarrow$ 選 (1) or (2)

找是否有交點

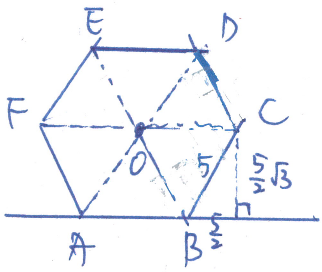
又 $y = (\sqrt{2})^2 = 2$

$y = \log_{\sqrt{2}} 2 = 2$

$\therefore$ 有交點 $(2,2)$

(1)

3. 坐標化.



設 $A(0,0) \quad F(\frac{-5}{2}, \frac{5}{2}\sqrt{3}) \quad \Rightarrow I = \frac{3F+2C}{5}$

$B(5,0) \quad C(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\sqrt{3})$

$H(\frac{15}{2}, 0) \qquad = (\frac{15}{10}, \frac{5}{2}\sqrt{3})$

$G(\frac{-5}{2}, 0)$

$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{GH} = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\sqrt{3}) \cdot (10, 0) = 15$

(3)

4. $Y = 8X - 14 \Rightarrow r_{XY} = r_1 = 1$

$Z = X - 10 \Rightarrow r_{XZ} = r_3 = 1$

又 $Y = 8(Z+10) - 14 \Rightarrow r_{YZ} = r_2 = 1$

(3)

5、 $S_1 = a_1$

$\therefore \frac{a_1+2}{2} = \sqrt{S_1 \cdot 2} = \sqrt{a_1 \cdot 2}$

$\Rightarrow \frac{a_1^2+4a_1+4}{4} = 2a_1 \Rightarrow a_1^2 - 4a_1 + 4 = 0 \Rightarrow (a_1-2)^2 = 0 \Rightarrow a_1 = 2$

$n=2$，$S_2 = a_1 + a_2$

$\therefore \frac{a_2+2}{2} = \sqrt{S_2 \cdot 2} = \sqrt{(2+a_2)\cdot 2}$

$\Rightarrow \frac{a_2^2+4a_2+4}{4} = 4 + 2a_2 \Rightarrow a_2^2 - 4a_2 - 12 = 0 \Rightarrow a_2 = 6$ （取正整數）

$n=3$．$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$\therefore \frac{a_3+2}{2} = \sqrt{S_3 \cdot 2} = \sqrt{(8+a_3)\cdot 2}$

$\Rightarrow \frac{a_3^2+4a_3+4}{4} = 16 + 2a_3 \Rightarrow a_3^2 - 4a_3 - 60 = 0 \Rightarrow a_3 = 10$

由規律猜測 $a_n = 4n-2$（公差 $=4$）

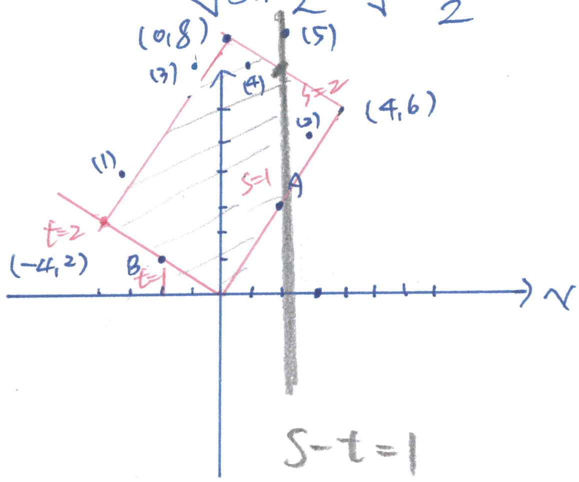
檢驗：$\frac{a_n+2}{2} = \frac{4n}{2} = 2n$

$\sqrt{S_n \cdot 2} = \sqrt{\frac{n(2+4n-2)}{2} \cdot 2} = 2n$

$\therefore a_{2015} = 4 \cdot 2015 - 2 = 8058$

(5) \#

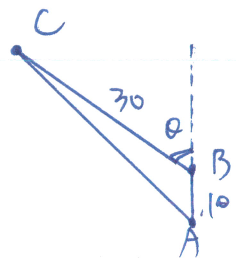
6.



由右圖知

(4) \#

7.



$\because 45^\circ \le \theta \le 60^\circ$

$\therefore \angle ABC$ 介於 $120^\circ \sim 135^\circ \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \le \cos B \le -\frac{1}{2}$

$\overline{AC}^2 = 10^2 + 30^2 - 2 \cdot 10 \cdot 30 \cdot \cos B$

$\therefore 1300 \le \overline{AC}^2 \le 1000 + 300\sqrt{2} \doteqdot 1424$

(1)(2) \#

8.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$$

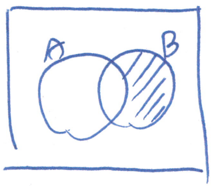
$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=P(A)-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\Rightarrow P(A)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

(1) $P(A)=\frac{2}{3}$ (x)

(2) $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}$ (x)

(3) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{8+9-6}{12}=\frac{11}{12}$ (o)

(4) $P(A'\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ (o)



(5) $P(B-A)=(4)=\frac{1}{4}$ (x)

(3)(4) $_{\#}$

9.

$$\underbrace{f(x)}_{三次}=\underbrace{(x-103)(x-104)(x-105)}_{三次}\cdot\underbrace{Q(x)}_{常數\ a}+\underbrace{r(x)}_{二次}\quad\cdots\cdots(*)$$

$\therefore f(103)=r(103)=4$

$f(104)=r(104)=-3$

$f(105)=r(105)=2$

由此可知 $r(x)$ 和 $g(x)$ 相同.

(1) 右式為二次式 (x)

(2) $g(x)=4\cdot\frac{(x-104)(x-105)}{(103-104)(103-105)}-3\cdot\frac{(x-103)(x-105)}{(104-103)(104-105)}+2\cdot\frac{(x-103)(x-104)}{(105-103)(105-104)}$

$\therefore g(106)=4\cdot\frac{2\cdot1}{(-1)(-2)}-3\cdot\frac{3\cdot1}{1\cdot(-1)}+2\cdot\frac{3\cdot2}{2\cdot1}=4+9+6=19$ (x)

(3) $r(x)$ 和 $g(x)$ 相同 $\Rightarrow g(x)$ 為餘式 (o)

(4) $f(106)\underset{\substack{\uparrow\\ 代入(*)}}{=}a\cdot3\cdot2\cdot1+\underbrace{r(106)}_{\substack{\shortparallel\\ 19}}=-5\Rightarrow 6a=-24,\ a=-4$ (o)

(5) $f(103)>0,\ f(104)<0,\ f(105)>0,\ f(106)<0.$

$\therefore f(x)=0$ 時三根介於 103~104, 104~105, 105~106. ⇒ 三正根.

$\therefore f(x^2)=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{103\cdots},\ \pm\sqrt{104\cdots},\ \pm\sqrt{105\cdots}$ ⇒ 六實根 (o)

(3)(4)(5) $_{\#}$

10、 $|ax+1|\le 4 \Rightarrow -4\le ax+1\le 4 \Rightarrow -5\le ax\le 3$

若 $a>0 \Rightarrow \frac{-5}{a}\le x\le \frac{3}{a} \Rightarrow c=\frac{3}{a}$ 是整數

若 $a<0 \Rightarrow \frac{-5}{a}\ge x\ge \frac{3}{a} \Rightarrow c=\frac{-5}{a}$ 是整數

(1) $c=\frac{3}{2}$ (X)

(2) $c=\frac{3}{3}$ (O)

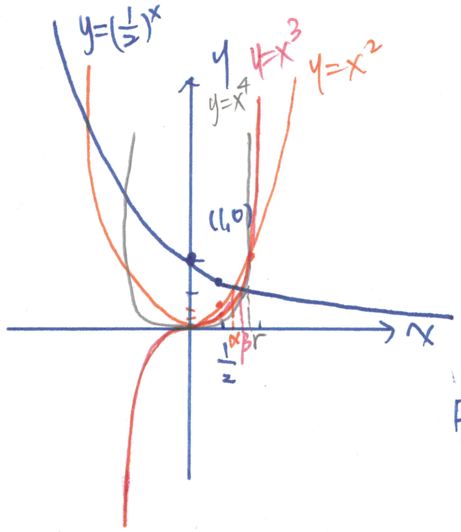
(3) $c=\frac{3}{0.1}=30$ (O)

(4) $c=\frac{3}{0.\overline{27}}=\frac{3}{\frac{27}{99}}=\frac{3\times 99}{27}=11$ (O)

(5) $c=\frac{-5}{-\frac{5}{2}}=2$ (O)

(2)(3)(4)(5) #

11、



$(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$

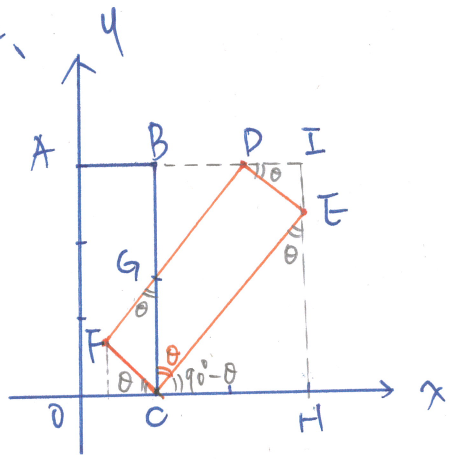
$(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$

$(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{16}$

由右圖知 $\frac{1}{2}<\alpha<\beta<\gamma<1$

(1)(3)(5) #

12、



由左圖知 $\overline{BC}=\overline{DE}\cdot\sin\theta+\overline{CE}\cdot\cos\theta$

$\Rightarrow 3=1\cdot\sin\theta+3\cdot\cos\theta$

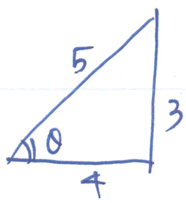
(又 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$)

$\begin{cases}\sin\theta+3\cos\theta=3 \Rightarrow \sin\theta=3-3\cos\theta\\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1\end{cases}$

$\therefore (3-3\cos\theta)^2+\cos^2\theta=1 \Rightarrow 9-18\cos\theta+9\cos^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\Rightarrow 10\cos^2\theta-18\cos\theta+8=0 \Rightarrow 5\cos^2\theta-9\cos\theta+4=0$

$\Rightarrow (5\cos\theta-4)(\cos\theta-1)=0 \Rightarrow \cos\theta=\frac{4}{5}$ or $\underline{1}$ (不合, $\theta=0°$) $\Rightarrow \sin\theta=\frac{3}{5}$



12、

(2)(4) $F(1-\cos\theta, \sin\theta)=(\frac{1}{5},\frac{3}{5})$

D的x坐標 $= \overline{OC}+\overline{CH}-\overline{DI} = 1+3\sin\theta-\cos\theta$

$=1+\frac{9}{5}-\frac{4}{5}=2$

∴ $D(2,3)$

顯然O、D、F沒有共線(可判斷斜率) (×)

(3) $\overleftrightarrow{CF}$: ① $C(1,0)$ ② $F(\frac{1}{5},\frac{3}{5}) \Rightarrow m=\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=\frac{-3}{4}$

$y=\frac{-3}{4}x+\frac{3}{4} \Rightarrow 4y=-3x+3 \Rightarrow 3x+4y=3$ (○)

(5)

$\triangle CFG = \frac{1}{2}\times\overline{CF}\times\overline{FG} = \frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{\tan\theta}$ ($\tan\theta=\frac{CF}{GF}=\frac{1}{GF}$) $\triangle CFG$

$=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$ (○)

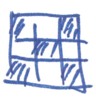
(1)(3)(4)(5)

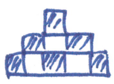
13、(1) 面朝上⇒俯視圖有幾個黑色

∵黑、白相間，∴黑、白個數幾乎一樣多，但第10層、邊長19 ⇒ 共$19^2=361$塊

黑色會多白色1塊 ⇒ 黑色有$[\frac{19^2}{2}]+1=181$塊 (×)

(2) 表面積共有6個方向"上"、"下"、"前"、"後"、"左"、"右"

"上"、"下":  共有$19^2\times 2$塊壓克力板

"前"、"後"、"左"、"右":  共有$(1+3+5+\cdots+19)\times\underset{\text{4個方向}}{\underset{\uparrow}{4}}$塊

共有 $361\times 2+\frac{10(1+19)}{2}\times 4=1122$塊

表面積 $=1122\times 2^2=4488$ (cm^2) (○)

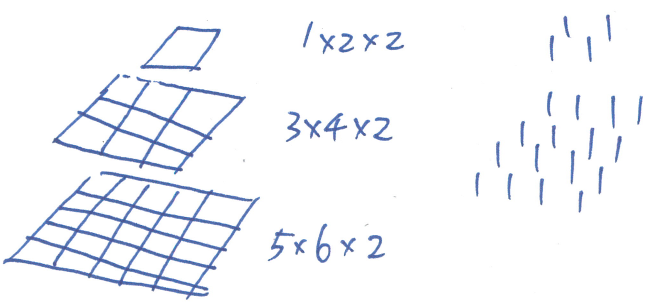
(3) 白: "上"、"下": 180×2塊

"前"、"後"、"左"、"右": $(1+2+\cdots+9)\times 4=\frac{9(1+9)}{2}\times 4=180$塊.] 共540塊 (○)

(4) 黑: "上"、"下": 181×2塊

"前"、"後"、"左"、"右": $(1+2+\cdots+10)\times 4=\frac{10(1+10)}{2}\times 4=220$塊] 共582塊 (×)

13. (5) 橫向　　　　縱向



$1\times2\times2$　　　2^2

$3\times4\times2$　　　4^2

$5\times6\times2$　　　6^2

$\vdots$　　　$\vdots$

最下方 19×19 有2片 $<$ $19\times20\times2$, $19\times20\times2$　　　20^2

+)

$$\sum_{k=1}^{10}(2k-1)(2k)\times2+19\times20\times2+(2^2+4^2+\cdots+20^2)$$

$$=4\sum_{k=1}^{10}(2k^2-k)+760+2^2(1^2+2^2+\cdots+10^2)$$

$$=4\times\left[\cancel{2}\times\frac{10\times11\times21}{6}-\frac{10\times11}{2}\right]+760+4\times\frac{10\times11\times21}{6}$$

$$=4\times(770-55)+760+1540=5160\quad(\times)$$

(2)(3) ※

14、不超過60元

20、30、20+20、20+30、20+20+20、30+30

- 20 ⇓ 2種
- 30 ⇓ 3種
- 20+20 ⇓ 重複玩 2 種，不重複玩 2! ⇓ 共4種
- 20+30 ⇓ $2\times3\times2!$ = 12種
- 20+20+20 ⇓ 3個重複 2，2個重複1個不同 $C^2_1\times C^1_1\times\frac{3!}{2!}$ ⇓ 共8種
- 30+30 ⇓ 重複玩 3，不重複 $C^3_2\times2!$ ⇓ 共9種

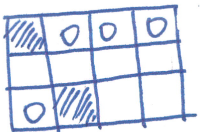
總共 $2+3+4+12+8+9=38$ 種 ※

B、機率⇒視為不同物

$n(S)=10!$

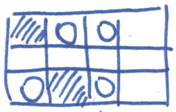
$n(A)$：∵第二列沒藍球 ⇒ 藍球放入第一、三列

case1 若藍球第一列3個，第三列1個 ⇒ 白球僅能放第二列 ⇒ 紅球剩下



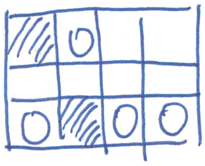
$\underset{\text{第三列挑1個放藍球}}{C^3_1}\times 4!\quad\times\quad\underset{\text{第2列挑2個放白球}}{C^4_2}\times 2!\quad\times 4!$

case2：若藍球第一列2個，第三列2個 ⇒ 白球第一列1個第2列1個 ⇒ 紅球剩下



$C^3_2\times C^3_2\times 4!\quad\times\quad C^1_1\,C^4_1\times 2!\quad\times 4!$

case3：若藍球第一列1個，第3列3個 ⇒ 紅球僅能放第2列 ⇒ 白球僅能放第一列



$C^3_1\times 4!\quad\times\quad 4!\quad\times 2!$

$$P=\frac{3\times4!\times6\times2!\times4!+9\times4!\times4\times2!\times4!+3\times4!\times4!\times2!}{10!}=\frac{57\times4!\times4!\times2!}{10!}$$

$$=\frac{\cancel{57}^{19}\times\cancel{24}\times\cancel{2}}{10\times\cancel{9}_{3}\times\cancel{8}\times7\times\cancel{6}\times5}=\frac{19}{1050}\ \#$$

C、∵切線 $m=1$ ⇒ $\overrightarrow{CO'}=(1,-1)$ （利用 $\overleftrightarrow{CO'}$ 參數式 設點 O'）

∵ $\overleftrightarrow{CO'}$ 參數式 $(0+t,k-t)=(t,k-t)$

設圓心 $O'(t,k-t)$

$\overline{O'A}=\overline{O'B}=\overline{O'C}=$ 半徑

$\sqrt{t^2+(k-t+2)^2}=\sqrt{(t+1)^2+(k-t)^2}=\sqrt{t^2+(-t)^2}$ $\Rightarrow t=\dfrac{4k+3}{6}$

$\Rightarrow\begin{cases}\cancel{t^2}+\cancel{(k-t)^2}+2(k-t)\cdot2+4=\cancel{t^2}+2t+1+\cancel{(k-t)^2}\Rightarrow 4k-4t+4=2t+1\\ \cancel{t^2}+2t+1+k^2-2kt+\cancel{t^2}=\cancel{t^2}+\cancel{t^2}\Rightarrow k^2-2kt+2t+1=0\end{cases}$

$\therefore k^2-2k\left(\dfrac{4k+3}{\cancel{6}_{3}}\right)+\cancel{2}\left(\dfrac{4k+3}{\cancel{6}_{3}}\right)+1=0\Rightarrow 3k^2-4k^2-3k+4k+3+3=0$

$\Rightarrow k^2-k-6=0\Rightarrow k=3$ or -2（負不合）$\therefore t=\dfrac{5}{2}$　圓心 $\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ #

D、

$$a=\frac{14+6+6+9+6+8+x}{7}=\frac{49+x}{7}$$

6, 6, 6, 8, 9, 14, x

b: 若 $x\le 6 \Rightarrow b=6$

若 $6\le x\le 8 \Rightarrow b=x$

若 $x\ge 8 \Rightarrow b=8$

$c=6$.

$\Rightarrow$ ① 若 $x\le 6 \Rightarrow b=c=6$ ∴ $a=6$

公差=0 (不合)

② $6\le x\le 8 \Rightarrow$ a. $6,\ x,\ \frac{49+x}{7}$ 成等差

或

b. $6,\ \frac{49+x}{7},\ x$ 成等差

a. $2x=6+\frac{49+x}{7} \Rightarrow 14x=42+49+x$

$\Rightarrow 13x=91,\ x=7$ (合)

b. $2\cdot\frac{49+x}{7}=6+x \Rightarrow 98+2x=42+7x$

$\Rightarrow 5x=56 \Rightarrow x=\frac{56}{5}>8$ (不合)

③ $x\ge 8 \Rightarrow 6,\ 8,\ \underbrace{\frac{49+x}{7}}_{\text{必大於 } 8}$ 成等差

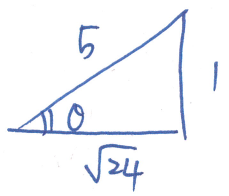
∴ $\frac{49+x}{7}=10 \Rightarrow x=21$ (合)

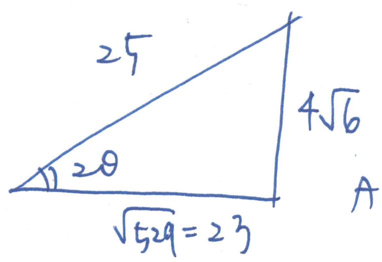
∴ x 可能為 7 or 21 $\Rightarrow 7+21=\underline{28}$ ※

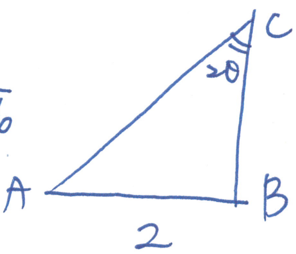
E.

$\sin\theta=\frac{1}{5} \Rightarrow \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$=2\times\frac{1}{5}\times\frac{\sqrt{24}}{5}=\frac{4\sqrt{6}}{25}$



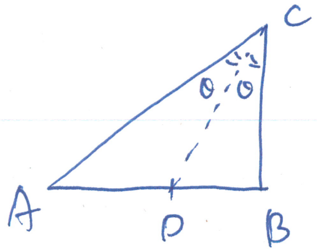




∵ $\overline{AB}$ = 直徑 = 2

∴ $\overline{AC}=\frac{25}{2\sqrt{6}}$

$\overline{BC}=\frac{23}{2\sqrt{6}}$

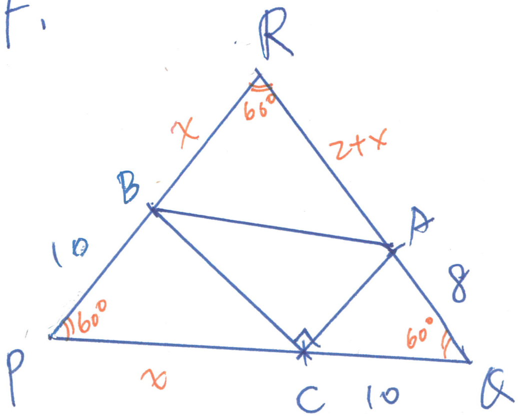


又 $\overline{CD}$ 是 $\angle ACB$ 的角平分線

∴ $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}=\frac{25}{23}$ ∴ $\overline{AD}=\frac{25}{48}\times 2=\frac{25}{24}$

$\Rightarrow \overline{OD}=\frac{25}{24}-1=\underline{\frac{1}{24}}$ ※

F.



設 $\overline{PC}=x \Rightarrow \overline{RB}=x$，$\overline{RA}=x+2$

$\Rightarrow \overline{AB}^2 = x^2+(2+x)^2-2\cdot x\cdot(2+x)\cdot\cos 60^\circ$

$\overline{BC}^2 = x^2+10^2-2\cdot x\cdot 10\cdot\cos 60^\circ$

$\overline{AC}^2 = 8^2+10^2-2\cdot 8\cdot 10\cdot\cos 60^\circ$

$\because$ $\angle C$ 是直角 $\Rightarrow \overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$

$\Rightarrow x^2+(2+x)^2-x(2+x)=(x^2+10^2-10x)+(8^2+10^2-8\cdot 10)$

$\Rightarrow \cancel{x^2}+4+\underline{4x}+\cancel{x^2}\underline{-2x}-\cancel{x^2}=\cancel{x^2}+100\underline{-10x}+64+100-80$

$\Rightarrow 12x=180 \Rightarrow \underline{x=15}$ #

G. 設 n 年後還清

甲欠：$100(1+1.5\%)^n$

乙存有：$80(1+3.53\%)^n$

$\Rightarrow 100(1.015)^n = 80(1.0353)^n$

$\Rightarrow \left(\dfrac{1.0353}{1.015}\right)^n = \dfrac{100}{80}$

$\Rightarrow (1.02)^n = \dfrac{5}{4}$

取 log $\Rightarrow n\log 1.02 = 0.699-0.6020$

$\Rightarrow 0.0086n = 0.0970 \Rightarrow n=11.\cdots \Rightarrow n\geq 12$

$\underline{12}$ #