2-1 指數運算

1. 指數的定義

(1)正整數指數：設 a 為實數，n 為正整數，則 $a^n=$________。

(2)整數指數、有理數指數：設 $a>0$，n 為正整數，m 為整數，則

$a^0=$____、$a^{-n}=$____、$a^{\frac{1}{n}}=$____、$a^{\frac{m}{n}}=$____。

2. 指數律：設 $a,b>0$ 且 m,n 均為實數

(1) $a^{m+n}=$____ (2) $a^{m-n}=$____ (3) $(ab)^m=$____ (4) $(\frac{a}{b})^m=$____

(5) $a^{mn}=$____ ($a^{2x}=$____、$a^{-x}=$____)

3. 常見題型

【型一】互為倒數和⇒條件限制：當 $x>0$ 時，$x+\frac{1}{x}$____

(1) $x^2+x^{-2}=$________ (2) $x^3+x^{-3}=$________

【型二】若 $a^x=b^y$，則

(1) $a=$____ (2) $b=$____

EXAMPLE 1

計算下列各值：

(1) π^0 (2) 2^{-3} (3) $25^{\frac{1}{2}}$ (4) $343^{-\frac{2}{3}}$ (5) $(\frac{81}{16})^{-0.25}+(0.25)^{-2.5}$ (6) $20^{2.5}\times5^{-1.5}\times6^{-3}\times14^{-3}\times21^{3}$

EXAMPLE 2

設 $a+a^{-1}=4$，求：

(1) a^2+a^{-2} (2) a^3+a^{-3} (3) a^4+a^{-4} (4) $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}$

EXAMPLE 3

已知 $a^{2x}=\sqrt{2}+1$，求：

(1) $\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}$ (2) $\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}$

EXAMPLE 4

已知 x,y 均為實數，滿足 $27^x=67$ 且 $81^y=603$，求 $3x-4y$ 的值。

EXAMPLE 5

設 a,b 為正實數，且 $a=2^{0.3}$，$b=2^{0.03}$，則下列選項哪些是正確的？

(1) $a=10b$ (2) $a=b^{10}$ (3) $0.5a=2^{0.15}$

(4) $0.5ab=2^{-0.67}$ (5) $2ab^2=2^{1.36}$

EXAMPLE 6

某項新實驗中細菌數 1 日後增加 k 倍，已知 3 日後細菌數為 2000，5 日後其細菌數為 32000，若細菌數為 128000 時需 M 日，求數對 (k,M)。

EXAMPLE 7

根據統計，目前臺灣每年大約回收 10 萬噸的寶特瓶，總數大約 45 億支。某慈善機構在 108 年回收 2 噸的寶特瓶，並將這些寶特瓶中的 60%再做成紡絲纖維。某個慈善機構往後每年的回收量大約是前一年的 1.5 倍，求幾年後，這個慈善機構就可以製成 100 噸以上的紡絲纖維。

課後練習題

類題 1：

計算下列各值：

(1) $(\sqrt{3})^{-2}\times[(\sqrt{3})^{3}]^{-\frac{1}{2}}\times(\sqrt{3})^{\frac{11}{2}}$ (2) $(\frac{81}{16})^{-0.25}\times(\frac{8}{27})^{-\frac{2}{3}}\times(0.25)^{-2.5}$ (3) $7^{2+\sqrt{3}}\times 343^{\frac{-\sqrt{3}}{3}}$

(4)設 $a>0$，若 $\sqrt[7]{\sqrt{a}\times\sqrt[4]{\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}}}=a^x$，求 x 值 (5) $5^{2.3}\times5^{-0.8}\div5^{2.5}-5^{-2}$

(6) $(2\frac{7}{9})^{0.5}+(0.1)^{-1}+4(2\frac{10}{27})^{-\frac{1}{3}}+(2^{\pi})^{-\frac{3}{\pi}}$ (7) $(2^{\sqrt{5}})^{\sqrt{20}}-2^{1+\pi}\cdot2^{1-\pi}+\frac{1024^{\sqrt{5}}}{32^{\sqrt{20}}}$

Ans：(1)3 (2)48 (3)49 (4) $\frac{1}{12}$ (5) $\frac{4}{25}$ (6) $\frac{355}{24}$ (7)1021

類題 2：

設 $2^x+2^{-x}=6$，求：

(1) 4^x+4^{-x} (2) $2^{\frac{x}{2}}+2^{-\frac{x}{2}}$ (3) 8^x+8^{-x}

Ans：(1)34 (2) $2\sqrt{2}$ (3)198

類題 3：

(1)已知 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$，求 $\frac{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+7}{x^2+x^{-2}+3}$ 的值。

(2)已知 $a^{2x}=3$，求 $\frac{a^x-a^{-x}}{a^{3x}-a^{-5x}}$ 的值。

Ans：(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{9}{40}$

類題 4：

已知 $x,y,z\in\mathbb{R}$，$2^x=3^y=5^z=a$ 且 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$，求 a 值。

Ans：$\sqrt{30}$

類題 5：

已知 $x,y\in\mathbb{R}$，$21^x=27$ 且 $189^y=243$，求 $\frac{3}{x}-\frac{5}{y}$ 的值。

Ans：-2

類題 6：

小明身體不舒服，需依照醫生指示服藥。假設在吞藥後 t 小時，殘留在胃裡的藥量尚有 $M(t)=450\times(0.64)^t$ 毫克，根據此關係回答下面問題：

(1)經過 1.5 小時後，要量殘留多少毫克？

(2)自 t 小時到 $t+1$ 小時吸收的藥量，與第 t 小時殘存藥量比值為何？

Ans：(1)230.4 (2)0.36

2-2 常用對數

1. 常用對數

設$a>0$，當實數x滿足$a=10^x$，則x可用$\log a$表示，即$a=10^{\log a}$。稱$\log a$為a的常用對數。

2. 科學記號

將一個正數x表成$x=a\times10^n$，其中$1\le a<10$，n是整數，這種記法稱為科學記號。

$x=a\times10^n=10^{\log a}\times10^n=10^{n+\log a}$，其中$0\le\log a<1$。

(1)$n\ge0$時，表示x的整數部分為______位數。

(2)$n<0$時，表示x在小數點後第______位數字開始不為 0。

EXAMPLE 1

計算下列各值：

(1)$\log100$　(2)$\log\frac{1}{10}$　(3)$\log1$　(4)$\log\sqrt{1000}$

EXAMPLE 2

已知$a=\log8$、$b=\log2$，求下列各值：

(1)100^a　(2)10^{2a+b-1}

EXAMPLE 4

設a,b都大於 0，$\log a=18$，$\log b=16$，則$\log(a-b)$最接近下列哪一個值？

(1)$\frac{3}{2}$　(2)3　(3)6　(4)12　(5)18

EXAMPLE 4

估算2^{-30}小數點後面連續有多少個 0。

(參考數據：$\log2\approx0.3010$)

EXAMPLE 5

科學記號$(\sqrt[3]{49})^{100}=a\times10^n$，其中$1\le a<10$，$n$是正整數。若$a$的整數部分為$m$，求數對$(m,n)$。

(參考數據：$\log2\approx0.3010,\log3\approx0.4771,\log7\approx0.8451$)

2-3 對數律(常用對數)

1. 常用對數的對數律：設 x, y 為正實數，r 為實數

(1)加法　$\log x + \log y =$ ____________

(2)減法　$\log x - \log y =$ ____________

(3)係數積　$r\log x =$ ____________

EXAMPLE 1

計算下列各值：

(1) $\log 4 + \log 25$　(2) $\log 200 - \log 0.2$　(3) $\log\frac{1}{6} - \log\frac{125}{42} - \log 56$　(4) $2\log\frac{5}{3} + \log\frac{27}{35} - \log\frac{3}{14}$

EXAMPLE 2

請問下列哪一個選項等於 $\log(2^{(3^5)})$ ？

(1) $5\log\left(2^3\right)$　(2) $3\times 5\log 2$　(3) $5\log 2\times\log 3$

(4) $5\left(\log 2+\log 3\right)$　(5) $3^5\log 2$

EXAMPLE 3

計算 $\left(\log 2\right)^3 + \left(\log 5\right)\left(\log 8\right) + \left(\log 5\right)^3$ 之值。

課後練習題

類題 1：

化簡 $\log 100+\log 10\sqrt{10}-\log\frac{1}{1000}$ 。

Ans：$\frac{1}{2}$

類題 2：

設 $a=\log 3$ ，$b=\log 4$ ，求 $100^{2a+\frac{1}{2}b}$ 之值。

Ans：18

類題 3：

設 $\log a=\frac{1}{2}$ ，$\log b=4$ ，$\log c=-2$ ，則 $\log\left(\frac{abc}{100}\right)=$______。

Ans：$\frac{1}{2}$

類題 4：

請估計 3^{-50} 從小數點後第幾位開始出現不為 0 的數字。(參考數據：$\log 3\approx 0.4771$)

Ans：24

類題 5：

已知 47^{100} 是 168 位數，求 47^{50} 是幾位數。

Ans：84

類題 6：

計算下列各值：

(1) $\log 2-\log 20$ (2) $3\log_2\sqrt{2}-\frac{1}{2}\log_2 3+\log_2\frac{\sqrt{3}}{2}=$ (3) $\log\frac{14}{25}-5\log 2-2\log 3+\log\frac{36}{7}=$

Ans：(1) -1 (2) $\frac{1}{2}$ (3) -2

類題 7：

計算 $(\log 20)^3-(\log 20)(\log 8)-(\log 2)^3$ 之值。

Ans：1

2-4 對數

1. 對數的定義：設 x,y 為正實數，r 為實數

設 $a,b>0$ 且 $a\neq 1$，當實數 x 滿足 $b=a^x$，則 x 可用 $\log_a b$ 表示，即 $b=a^{\log_a b}$。稱 $\log_a b$ 為以 a 為底 b 的對數，其中 a 稱為底數，b 稱為真數。

2. 對數轉換常用對數：

設 a,b 為正實數，$\log_a b=$ ________。(換底公式)

EXAMPLE 1

設 $\log_{x-1}(-3x^2+11x-6)$ 有意義，求 x 的範圍。

Sol：

$\boxed{\text{KEY}}$ $\log_a b$ 有意義 $\Rightarrow$ ________________

EXAMPLE 2

已知 $x=\log_2 3$，求 4^x 及 2^{-x} 的值。

EXAMPLE 3

設 $\log_5 2=a$，$\log_4 5=b$，求 $5^{a-\frac{1}{b}+1}$ 之值。

EXAMPLE 4

以對數表示下列各式中 x 的值：

(1) $2^x=3$　(2) $10^x=2$　(3) $0.3^x=5$

EXAMPLE 5

求下列各對數的值：

(1) $\log_2 16$　(2) $\log_5 \frac{1}{5}$　(3) $\log_6 6$　(4) $\log_7 49\sqrt{7}$　(5) $\log_{\sqrt{2}} 4$　(6) $\log_{3\sqrt{3}} \frac{1}{243}$

EXAMPLE 6

求下列各式的值：

(1) $\log_3 15+\frac{1}{2}\log_3 30-\log_3 5\sqrt{5}-\frac{1}{2}\log_3 2$　　(2) $\log_{\sqrt{2}} 3\times\log_3 4$　　(3) $\frac{2}{\log_2 60}+\frac{1}{\log_3 60}+\frac{1}{\log_5 60}$

◎對數律：此部分超過課程綱要內容，可自行決定是否學習。

3. 對數律

設 a,b,c,x,y 為正實數且 $a,b,c\neq 1$，r,s 為實數。

(1) $\log_a x+\log_a y=$ ____________　　(2) $\log_a x-\log_a y=$ ____________

(3) $r\log_a x=$ ____________　　(5) $\log_{a^s} x^r=$ ____________

(5) $\log_b c=$ ____________ (換底公式)　　(7) $\log_a b=$ ____________ (倒數公式)

(6) $\log_a b\cdot\log_b c=$ ____________　　(8) $x^{\log_a y}=$ ____________

課後練習題

類題 1：

設 x 為實數，且使得 $\log_{x-2}\left(6x^2-35x+50\right)$ 有意義，則 x 的範圍為______。

Ans： $x>\frac{10}{3}$ 或 $2<x<\frac{5}{2}$

類題 2：

設 $x=\log_2 7$，求 4^x+2^{-x} 的值。

Ans： $\frac{344}{7}$

類題 3：

求下列各對數的值：

(1) $\log_2 8$ (2) $\log_3 \frac{1}{9}$ (3) $\log_4 1$ (4) $\log_5 5\sqrt{5}$

Ans：(1)2 (2)-2 (3)0 (4)$\frac{3}{2}$

類題 4：

求下列各式的值：

(1) $\log 2-\log 3+\log 15$ (2) $\log 50+\log\frac{3}{7}-\log\frac{3}{14}$ (3) $3\log 2+2\log 5-\log 2$

(4) $3\log\sqrt[3]{4}+\log 25$

Ans：(1)1 (2)2 (3)2 (4)2

◎類題 5：

求下列各式的值：

(1) $\log_6 3+\log_6 8-\log_6\frac{2}{3}$ (2) $\log_5 250+\log_5 10-\log_5 4$ (3) $\log_{18} 2+2\log_{18} 3$

(4) $\log_3 15+\frac{1}{2}\log_3 30-\log_3 5\sqrt{5}-\frac{1}{2}\log_3 2$

Ans：(1)2 (2)4 (3)1 (4)$\frac{3}{2}$

類題 6：

求下列各式的值：

(1) $\left(\log_2\sqrt{7}\right)\times\left(\log_7 2+\log_{49}\frac{1}{8}\right)$ (2) $\frac{1}{\log_3 6}+\frac{1}{\log_{12} 6}$

Ans：(1)$-\frac{1}{4}$ (2)2

2-5 指數函數、對數函數及其圖形

1. 指數函數

設 $a>0$ 且 $a \neq 1$，函數 $f(x)=a^x$ 稱為以 a 為底的的指數函數。

$f(x)=a^x$ 的定義域為________________，值域為________________。

2. 對數函數

設 $a>0$ 且 $a \neq 1$，函數 $f(x)=\log_a x$ 稱為以 a 為底的的指數函數。

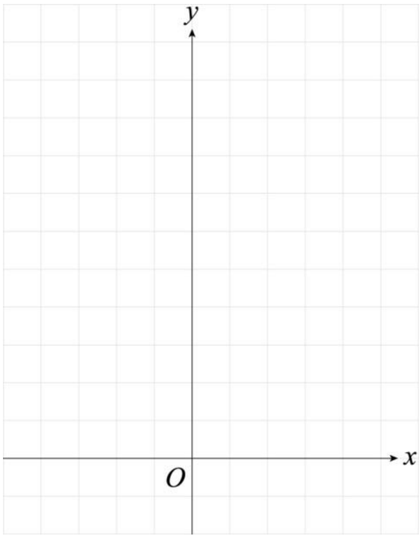
$f(x)=\log_a x$ 的定義域為________________，值域為________________。

EXAMPLE 1

描繪下列各函數圖形：(1) $y=2^x$　(2) $y=(\frac{1}{2})^x$　(3) $y=\log_2 x$　(4) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$

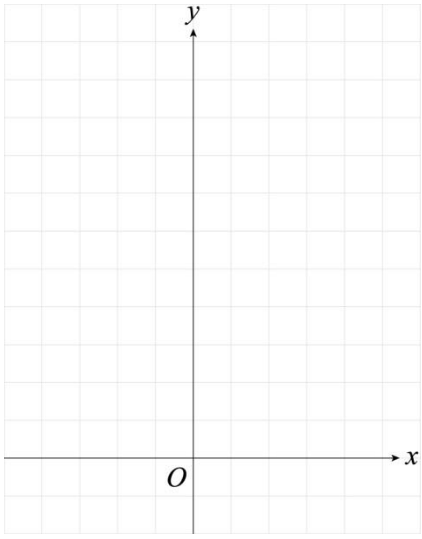
(1) $y=2^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							



(2) $y=(\frac{1}{2})^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							



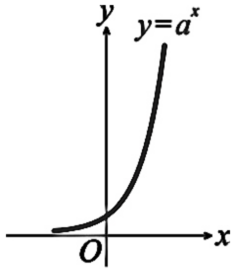
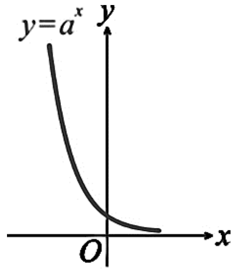
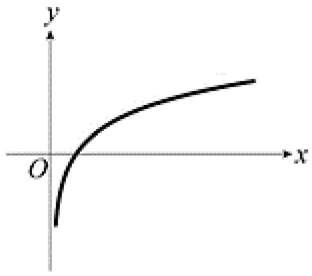
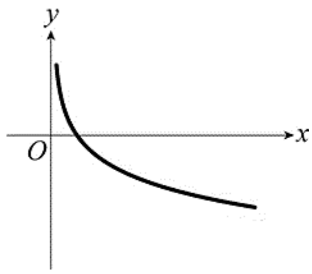
(3) $y=\log_2 x$

x							
y	-3	-2	-1	0	1	2	3

(4) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$

x							
y	-3	-2	-1	0	1	2	3

3. 指數函數與對數函數的圖形及比較

	$a>1$	$0<a<1$	
指數 $y=a^x$			(1)必過________ (2)恆在____________ (3)以______為漸近線
對數 $y=\log_a x$			(1)必過________ (2)恆在____________ (3)以______為漸近線
	遞增函數： 圖形越往右，函數值越大。 $a^{x_1}>a^{x_2}\Rightarrow$__________ $\log_a x_1>\log_a x_2\Rightarrow$__________	遞減函數： 圖形越往右，函數值越小。 $a^{x_1}>a^{x_2}\Rightarrow$_________ $\log_a x_1>\log_a x_2\Rightarrow$__________	

4. 圖形間的對稱

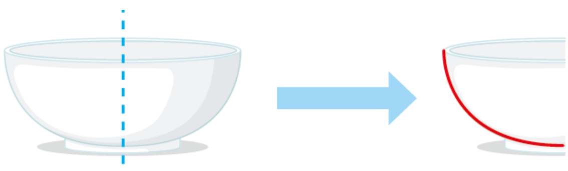
(1) $y=a^x$ 的圖形和 $y=(\frac{1}{a})^x$ 的圖形對稱於________。

(2) $y=\log_a x$ 的圖形和 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ 的圖形對稱於________。

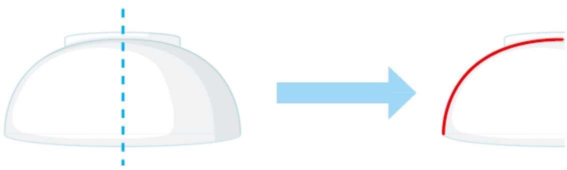
(2) $y=a^x$ 的圖形和 $y=\log_a x$ 的圖形對稱於________。

5. 凹向性

(1)凹口向上：圖形上任兩點的連線（弦）在圖形上方。(如：指數函數圖形 $y=a^x$)



(2)凹口向下：圖形上任兩點的連線（弦）在圖形下方。(如：常用對數函數 $y=\log_{10} x$)

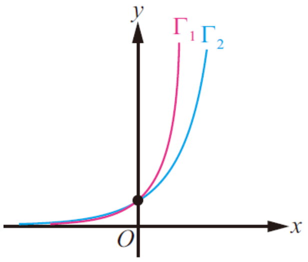


EXAMPLE 2

將下列函數連到所對應的函數圖形之代號上。

$y=2^x$ ・　　　　・ Γ_1

$y=4^x$ ・　　　　・ Γ_2



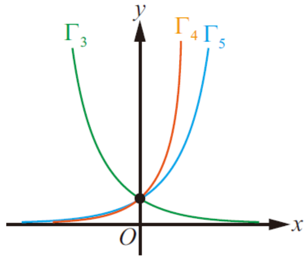
EXAMPLE 3

將下列函數連到所對應的函數圖形之代號上。

$y=a^x$ ・　　　　・ Γ_3

$y=b^x$ ・　　　　・ Γ_4

$y=(\frac{1}{a})^x$ ・　　　　・ Γ_5



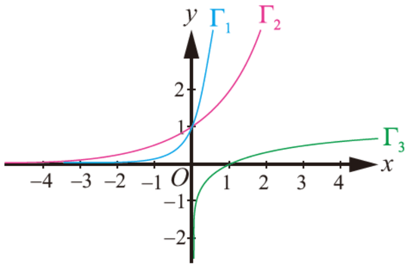
EXAMPLE 4

將下列函數連到所對應的函數圖形之代號上。

$y=2^x$ ・　　　　・ Γ_6

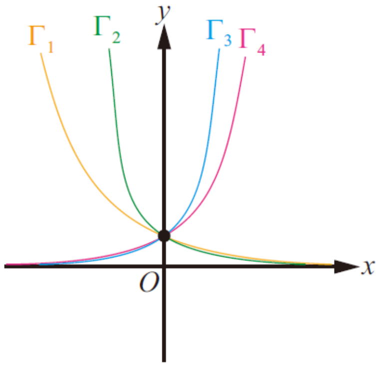
$y=10^x$ ・　　　　・ Γ_7

$y=\log x$ ・　　　　・ Γ_8



EXAMPLE 5

如下圖，$\Gamma_1:y=a^x$、$\Gamma_2:y=b^x$、$\Gamma_3:y=c^x$、$\Gamma_4:y=d^x$，請比較 a、b、c、d 的大小。



EXAMPLE 6

請選出下列關於函數圖形的敘述哪些選項正確？

(1) $y=\log x$ 的圖形必過點 $(0,1)$

(2) $y=3^x$ 的圖形有漸近線 $y=0$

(3) $y=\log x$ 的圖形凹口向下

(4) 已知 $a\ge 0$ 且 $a\ne 1$，的圖形凹口向上

(5) 若 P、Q 是 $y=\log x$ 上的相異兩點，則直線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 的斜率必為負

EXAMPLE 7

求方程式 $2^x-x-2=0$ 有幾個實數解。

2-6 指數與對數方程式及不等式

1. 一對一性質（用於解方程式）

(1)若 $a^{x_1}=a^{x_2}$，則__________。

(2)若 $\log x_1=\log x_2$，則__________。

2. 遞增遞減性質（用於比較數值大小及解不等式）

(1)當 $a>1$時，圖形遞增。若 $a^{x_1}>a^{x_2}$，則__________。若 $\log_{10}x_1>\log_{10}x_2$，則__________。

(2)當 $0<a<1$時，圖形遞減。若 $a^{x_1}>a^{x_2}$，則__________。

EXAMPLE 1

請比較下列各數的大小：

$A=2\sqrt[3]{4}$、$B=4^{-0.25}$、$C=(0.25)^{-2}$、$D=(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$。

Sol：

$\boxed{\text{KEY}}$指對數比大小⇒____________

EXAMPLE 2

請比較下列各數的大小：

$A=\log 2$、$B=\log\dfrac{1}{3}$、$C=-\log 4$、$D=1$。

EXAMPLE 3

解下列指數方程式及不等式：

(1) $(0.5)^x=2^{-2x+3}$　(2) $4^x-2^{x+1}=8$　(3) $(\sqrt{2})^{x^2-3}>2^x$

EXAMPLE 4

解下列對數方程式：

(1) $\log_2 x = \log_4 7$ (2) $\log_3(x+1) = 2$ (3) $\log 2x + \log(x+5) = 2$

EXAMPLE 5

解對數不等式 $2\log x > \log(x+2)$ 。

課後練習題

類題 1：

請比較下列各數的大小：

$A=(\frac{3}{10})^3$ 、 $B=(\frac{3}{10})^{-2}$ 、 $C=(0.09)^{\frac{5}{2}}$ 、 $D=1$ 。

Ans：C < A < D < B

類題 2：

解下列指數方程式及不等式：

(1) $3^{x-1}=9^{x^2-2}$ (2) $(0.5)^x-(0.25)^{x+1}=1$ (3) $(\frac{1}{10})^x>(\frac{1}{\sqrt{10}})^x$

Ans：(1) $\frac{3}{2}$ 或 -1 (2) -1 (3) $x<0$

類題 3：

解下列對數方程式：

(1) $\log(x+10)=1+\log(x-8)$ (2) $\log_{\sqrt{3}}(x-2)=\log_3(2x-1)$

Ans：(1)10 (2)5

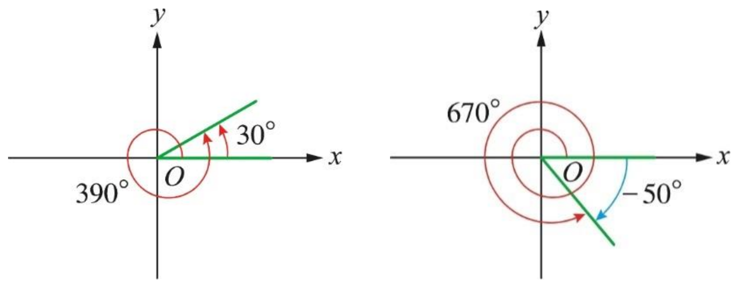
類題 4：

解對數不等式 $\log(x-1)<\log 2$ 。

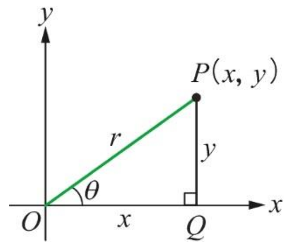
Ans：$1<x<3$

1-1 廣義角三角函數

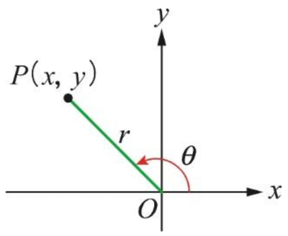
1. 廣義角(標準位置角)：以正 x 軸為始邊，旋轉到終邊的角度。
   (1)方向：逆時針方向旋轉為正角($+$)，順時針方向旋轉為負角($-$)。
   (2)同界角：終邊相同，稱為同界角。如：$30°$ 和 $390°$ 、 $-50°$ 和 $670°$ 。



2. 廣義角三角函數：看與______的夾角(對 x 軸做垂線)
   當廣義角 θ 是一個標準位置角時，在 θ 的終邊上任取異於原點的一點 $P(x, y)$，定義



正弦 $\sin\theta=$ ______ ，其中 $r=$ ______ >0



餘弦 $\cos\theta=$ ______

正切 $\tan\theta=$ ______

3. 特殊角的三角函數值

	30°	45°	60°	0°	90°	180°	270°	I	II	III	IV
$\sin\theta$											
$\cos\theta$											
$\tan\theta$											

4. 廣義角化銳角三角函數
   (1)值(不看正負)：與 x 軸之夾角相同，值就相同。
   (2)正負：看象限。

5. 基本關係：(所有三角函數均可以化成 $\sin\theta$ 、 $\cos\theta$)
   (1)平方關係：________________
   (2)餘角關係：________________
   (3)商數關係： $\tan\theta=$ ________

EXAMPLE 1

試求下列三角函數的值：

(1) $\sin 150°$ (2) $\cos 210°$ (3) $\tan(-60°)$ (4) $\sin(-1230°)$ (5) $\cos 2010°$ (6) $\tan(765°)$

EXAMPLE 2

設設 $P(-5, y)$ 為 θ 之終邊的一點。已知 $\tan\theta = 2$，求 $\sin\theta$ 與 $\cos\theta$ 的值。

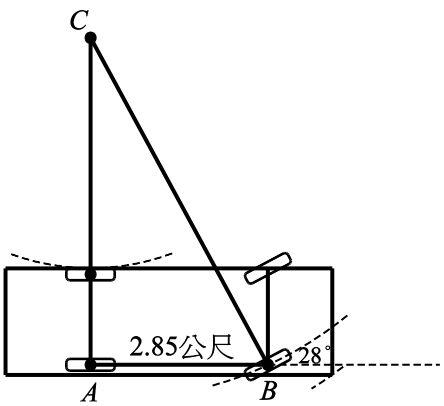
EXAMPLE 3

已知 $0° \le x < 360°$，求下列各條件的 x 值：

(1) $\sin x = \frac{1}{2}$ (2) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $\tan x = -1$

EXAMPLE 4

右圖為汽車迴轉示意圖。汽車迴轉時，將方向盤轉動到極限，以低速讓汽車進行轉向圓周運動，汽車轉向時所形成的圓周的半徑就是迴轉半徑，如圖中的 $\overline{BC}$ 即是。已知在低速前進時，圖中 A 處的輪胎行進方向與 $\overline{AC}$ 垂直，B 處的輪胎行進方向與 $\overline{BC}$ 垂直。在圖中，已知軸距 $\overline{AB}$ 為 2.85 公尺，方向盤轉到極限時，輪子方向偏了 28 度，試問此車的迴轉半徑 $\overline{BC}$ 為多少公尺（小數點後第一位以下四捨五入，$\sin 28° \approx 0.4695$，$\cos 28° \approx 0.8829$）。



EXAMPLE 5

有一個等腰三角形底邊為 10，頂角 $72°$，下列何者可以表示腰長？

(1) $5\sin 36°$ (2) $5\tan 36°$ (3) $\dfrac{5}{\tan 36°}$ (4) $\dfrac{5}{\sin 36°}$

EXAMPLE 6

x 軸上有 $A(2,0)$、$B(-4,0)$ 兩觀測站同時觀察 x 軸上方的目標 C 點，測得 $\angle BAC$ 和 $\angle ABC$ 之值後，通知砲台 $D(\dfrac{5}{2},-8)$ 此二角正切值分別為 $\dfrac{8}{9}$ 和 $\dfrac{8}{3}$ 。

求 $\overline{CD}$ 的距離。

EXAMPLE 5

設 θ_1，θ_2，θ_3，θ_4 分別為第一、第二、第三、第四象限角，且都介於 $0°$ 與 $360°$ 之間。已知 $|\cos\theta_1|=|\cos\theta_2|=|\cos\theta_3|=|\cos\theta_4|=\dfrac{1}{3}$，請問下列哪些選項是正確的？

(1) $\theta_1<45°$ (2) $\theta_1+\theta_2=180°$ (3) $\cos\theta_3=-\dfrac{1}{3}$ (4) $\sin\theta_4=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ (5) $\theta_4=\theta_3+90°$

EXAMPLE 5

已知 θ 為第二象限角，$\sin\theta=\dfrac{5}{13}$，求下列各值：

(1) $\sin(180°+\theta)$ (2) $\cos(180°-\theta)$ (3) $\tan(-\theta)$

EXAMPLE 6

已知 $3\sin\theta+4\cos\theta=5$，求 $\sin\theta$ 的值。

課後練習題

類題 1：

試求下列三角函數的值：

(1) $\sin 210°$ (2) $\cos 765°$ (3) $\tan(-150°)$ (4) $\sin 225°$ (5) $\tan 135°$

Ans：(1) $-\frac{1}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (5) 1

類題 2：

設 $P(x,3)$ 是第二象限角 θ 終邊上一點。已知 $\overline{OP}=5$，求 $\sin\theta+\cos\theta$ 的值。 Ans：$\frac{-1}{5}$

類題 3：

已知 $0°\le x<360°$，求下列各條件的 x 值：

(1) $\sin x=1$ (2) $\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (3) $\tan x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ Ans：(1) $x=0°$ (2) $x=45°$ *or* $315°$ (3) $x=150°$ *or* $330°$

類題 4：

已知 θ 為第四象限角，且 $\cos\theta=\frac{3}{5}$，求下列各式的值：

(1) $\sin\theta$ (2) $\cos(\theta-90°)$ (3) $\tan(180°+\theta)$ Ans：(1) $\frac{-4}{5}$ (2) $\frac{-4}{5}$ (3) $\frac{-4}{3}$

類題 5：

設 θ 為銳角且 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$，試求下列各值：

(1) $\sin\theta\cos\theta$ (2) $\sin\theta+\cos\theta$ (3) $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$ Ans：(1) $\frac{3}{8}$ (2) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ (3) $\frac{8}{3}$

類題 6：

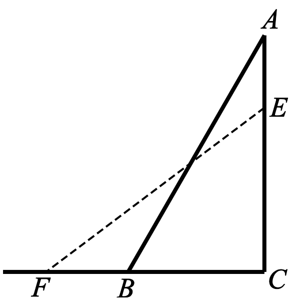
設 θ_1，θ_2，θ_3，θ_4 分別為第一、第二、第三、第四象限角，且都介於 0° 與 360° 之間。已知 $|\sin\theta_1|=|\sin\theta_2|=|\sin\theta_3|=|\sin\theta_4|=\frac{2}{3}$，則下列哪些選項是正確的?

(1) $\theta_1+\theta_2=180°$ (2) $\theta_2+\theta_3=360°$ (3) $\theta_1+\theta_4=360°$ (4) $\sin\theta_2=\frac{2}{3}$ (5) $\cos\theta_3=-\frac{\sqrt{5}}{3}$

Ans：12345

類題 7：

如下圖所示(只是示意圖)，將梯子 $\overline{AB}$ 靠在與地面垂直的牆 AC 上，測得與水平地面的夾角 $\angle ABC$ 為 $60°$。將在地面上的底 B 沿著地面向外拉 51 公分到點 F （即 $\overline{FB}=51$ 公分），此時梯子 $\overline{EF}$ 與地面的夾角 $\angle EFC$ 之正弦值為 $\sin\angle EFC=0.6$，求梯子長 $\overline{AB}$。

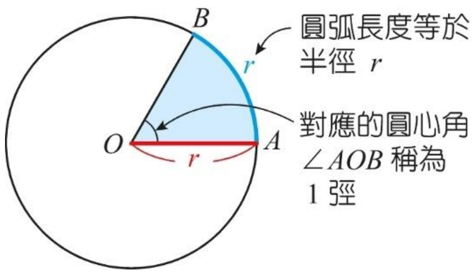


Ans：170

1-2 弧度

1. 弧度量：

　　在半徑為r，圓心為O的圓周上任取A、B兩點，若AB的弧長為r，則定義弧AB所對應的圓心角$\angle AOB$為 1 弳(或稱 1 弧度)。依此類推，若$CD = 2r$，則其所對應的圓心角$\angle COD$為 2 弳。



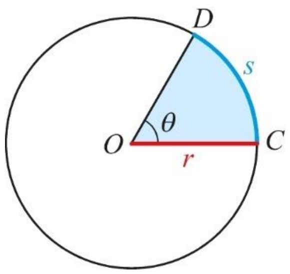
2. 弧度量與度度量的轉換：

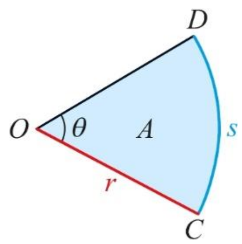
(1)$180° = \pi$ 弧度　　(2)$1° = \dfrac{\pi}{180}$ 弧度　　(3)1 弧度$= \dfrac{180°}{\pi} \approx 57°$

3. 扇形公式：

　　已知扇形的中心角為θ，半徑為r，則

(1)扇形弧長$s =$__________　　(2)扇形面積$A =$__________





EXAMPLE 1

試將下表的空格完成（弧度轉換成度度；度度轉換成弧度）

弧度量(弳)	0			$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{23}{12}\pi$		3
度度量(度)		30°	45°			225°		$\pi°$	

EXAMPLE 2

$a=10$ 弧度，試問 a 是第幾象限角。

EXAMPLE 3

設 θ 與 -55 弳為同界角，且 $0<\theta<2\pi$，求 θ 的值。

EXAMPLE 4

試求下列三角函數的值：

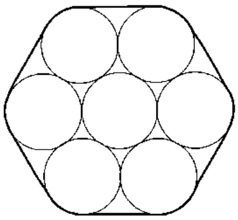
(1) $\sin\frac{3\pi}{2}$　(2) $\cos\frac{5\pi}{4}$　(3) $\tan\frac{7\pi}{6}$

EXAMPLE 5

已知一扇形，其半徑為 5 公分，圓心角為 $\frac{\pi}{6}$，試求此扇形的弧長和面積。

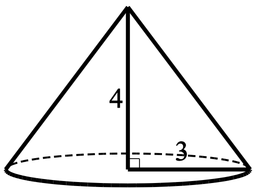
EXAMPLE 6

包裝七根半徑皆為 1 的圓柱，其截面如下圖所示。試問外圍粗黑線條的長度。



EXAMPLE 7

一直圓錐之底半徑為 3，高為 4，今沿其一斜高剖開成一扇形，求側面的表面積。



課後練習題

類題 1：

完成下表中度與弳的換算。

度	$0°$		$45°$		$120°$			$180°$	$270°$	
弳	0	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$			2π

Ans： $30°,90°,135°,150°,360°,\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3},\pi,\frac{3\pi}{2}$

類題 2：

選出所有 $-\frac{2\pi}{3}$ 弳的同界角。

(1) $\frac{2\pi}{3}$ 弳　(2) $\frac{4\pi}{3}$ 弳　(3) $-\frac{8\pi}{3}$ 弳　(4) $\frac{10\pi}{3}$ 弳。Ans：234

類題 3：

求 $-\frac{14\pi}{9}$ 弳是第幾象限角。Ans：第一象限

類題 4：

求下列各式的值：

(1) $\cos\frac{\pi}{4}$。　(2) $\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$。　(3) $\tan\frac{4\pi}{3}$。Ans：(1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $-\sqrt{3}$

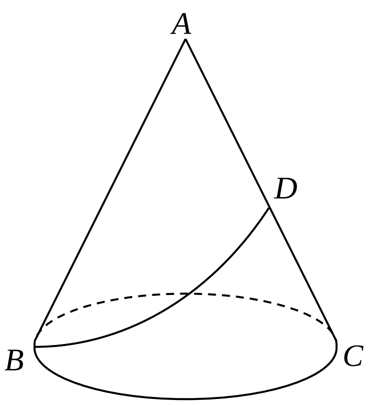
類題 5：

圓半徑為 6，切出一塊扇形，已知扇形周長為圓周長的一半，求此扇形的圓心角。Ans： $\pi-2$

類題 6：

兩條公路 k 及 m ，如果筆直延伸將交會於 C 處成 $60°$夾角，如圖所示。為銜接此二公路，規劃在兩公路各距 C 處 450 公尺的 A 、 B 兩點間開拓成圓弧型公路，使 k 、 m 分別在 A 、 B 與此圓弧相切，求此圓弧長。（公尺以下四捨五入）

參考數據：$\sqrt{3} \approx 1.732,\ \pi \approx 3.142$

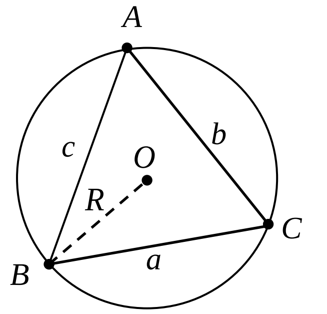


Ans：544

1-3 正弦定理、餘弦定理

1. 正弦定理：使用時機$\Rightarrow$(1)________ (2)____________________ (3)________________

設a,b,c分別表示ΔABC三內角$\angle A,\angle B,\angle C$的對邊長，

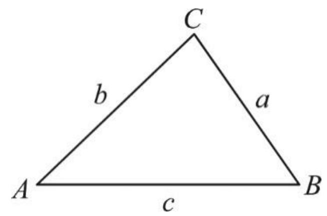


R為ΔABC外接圓半徑，則 ______________________。

換句話說，$a:b:c=$________________________。

2. 餘弦定理：使用時機$\Rightarrow$(1)________ (2)____________________

設a,b,c分別表示ΔABC三內角$\angle A,\angle B,\angle C$的對邊長，則



$a^2=$ ______________________ $\Rightarrow \cos A=$ ______________________

★三角形的判斷：設ΔABC的三邊長$a\ge b\ge c$，則

(1)若$a^2=b^2+c^2$，則ΔABC為________三角形

(2)若$a^2>b^2+c^2$，則ΔABC為________三角形

(3)若$a^2<b^2+c^2$，則ΔABC為________三角形

3. 三角形面積公式

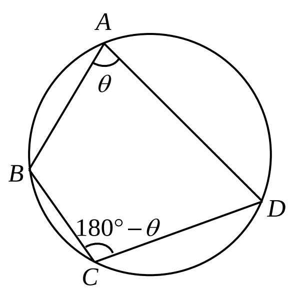
設a,b,c分別表示ΔABC三內角$\angle A,\angle B,\angle C$的對邊長，$R$為$\Delta ABC$外接圓半徑，$r$為為$\Delta ABC$內切圓半徑。

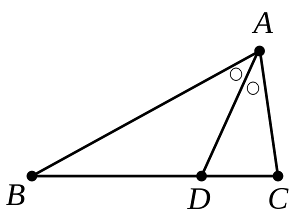
$\Delta ABC=$ __________ $=$ ________________ $=$ ______________________ $=$ __________ $=$ __________

(底、高) (兩邊一夾角) (三邊長，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$) (與R有關) (與r有關)

4. 常用的性質

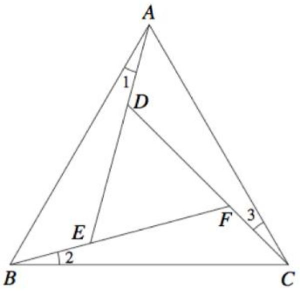
(1)圓內接四邊形$\Rightarrow$________________ (2)內角平分線$\Rightarrow$ __________________





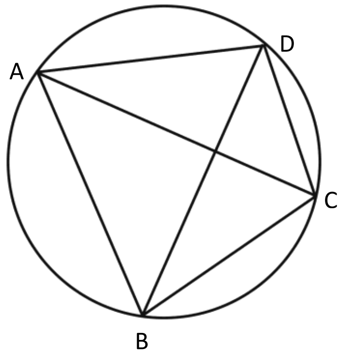
EXAMPLE 1

正三角形 ABC 的邊長為 1，且 $\angle 1=\angle 2=\angle 3=15°$。已知 $\sin 15°=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，求正三角形 DEF 的邊長。



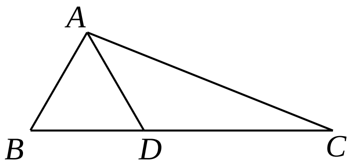
EXAMPLE 2

如圖所示， $ABCD$ 為圓內接四邊形。若 $\angle DBC=30°$、$\angle ABD=45°$、$\overline{CD}=6$，求 $\overline{AD}$。



EXAMPLE 3

如下圖，在 ΔABC 中，$\angle BAC$ 的平分線 AD 交對邊 $\overline{BD}$ 於 D。已知 $\overline{BD}=3$，$\overline{DC}=6$，且 $\overline{AB}=\overline{AD}$，求 $\cos\angle BAD$ 的值。



EXAMPLE 4

四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=1,\overline{BC}=5,\overline{CD}=5,\overline{DA}=7$ 且 $\angle DAB=\angle BCD=90°$，求 $\overline{AC}$。

EXAMPLE 5

已知△ABC 中，$\angle A$ 、$\angle B$ 、$\angle C$ 的對邊長為 a 、b 、c，則下列條件△ABC 必為鈍角三角形？

(1) $a^2+b^2<c^2$　(2) $\sin A=\sin B=\dfrac{1}{3}$

(3) $a:b:c=5:6:7$　(4) $b=4$ ，$c=6$ ，$\angle B=30°$

(5) △ABC 的三個高長度為 9、12、15

EXAMPLE 6

△ABC 中，已知 $\overline{AB}=8$ ，$\overline{AC}=6$ ，$\angle A=120°$ ，若 $\overline{AD}$ 為 $\angle A$ 的內角平分線，如圖所示，求 $\overline{AD}$ 。

EXAMPLE 7

ΔABC 的三邊長分別為 6、7、9，試求：

(1) ΔABC 的面積

(2) ΔABC 的內切圓半徑

(3) ΔABC 的外接圓半徑

EXAMPLE 8

△ABC 中，$\overline{AB}=10$ ，$\overline{AC}=9$ ，$\cos\angle BAC=\dfrac{3}{8}$ ，設點 P 、Q 分別在 $\overline{AB}$ 、$\overline{AC}$ 上使得△APQ 的面積為△ABC 面積的一半，求 $\overline{PQ}$ 的最小值。

EXAMPLE 9

一塔高 120 公尺，樹 A 在塔的正西方，樹 B 在塔的西 $30°$ 南。小明從塔的頂端測得樹 A 底部的俯角為 $45°$，樹 B 底部的俯角為 $60°$ ，求兩樹的距離。

課後練習題

類題 1：

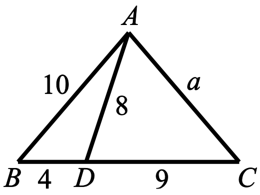
設 D 為 $\triangle ABC$ 中 $\overline{BC}$ 邊上的一點，已知 $\angle ABC = 75°$ 、 $\angle ACB = 45°$ 、 $\angle ADB = 60°$。求 $\overline{BD}:\overline{DC}$ 。

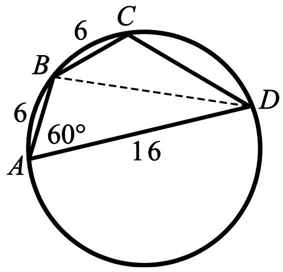
Ans： $2:1$

類題 2：

如下圖所示，在 $\triangle ABC$ 中，D 為 $\overline{BC}$ 邊上一點，且 $\overline{AB} = 10$，$\overline{AD} = 8$，$\overline{BD} = 4$，$\overline{DC} = 9$，設 $\overline{AC} = a$ ，求 a 的值。

Ans：10





類題 3：

設四邊形 $ABCD$ 內接於一圓，如上圖。其中 $\angle A = 60°$ ， $\overline{AB} = \overline{BC} = 6$ ， $\overline{AD} = 16$ ，求：

(1) $\overline{CD}$ 。　　　(2)四邊形 $ABCD$ 的面積。

Ans：(1)10 (2) $39\sqrt{3}$

類題 4：

圓內接四邊形 $ABCD$ ，設 $\overline{AB} = 5$ ， $\overline{BC} = 3$ ， $\overline{CD} = 2$ ， $\angle D = 120°$ ，則下列選項哪些是正確的？

(1) $\overline{AD} = 3$　　(2) $\overline{AC} = 3\sqrt{2}$　　(3)四邊形 $ABCD$ 的面積為 $\dfrac{21\sqrt{3}}{4}$　　(4)此圓的半徑為 $\dfrac{\sqrt{19}}{3}$

(5)此圓的半徑為 $\dfrac{\sqrt{57}}{3}$

Ans：135

類題 5：

$\triangle ABC$ 中，周長為 20， $\angle A = 60°$ ，其外接圓半徑 R 為 $\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$ ，求 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑。

Ans： $\sqrt{3}$

類題 6：

下列關於 $\triangle ABC$ 的敘述，哪些選項是正確的？

(1)若 $\cos A = -\dfrac{1}{3}$ ，則 $\triangle ABC$ 為鈍角三角形

(2)若 $\sin A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ，則 $\triangle ABC$ 可能是鈍角三角形

(3)若 $\angle C > 90°$ ，則 $\sin^2 C > \sin^2 A + \sin^2 B$

(4)若 a 、 b 、 c 分別為 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的對邊長，且 $a^2 < b^2 + c^2$ ，則 $\triangle ABC$ 為銳角三角形

(5)若 $\sin A : \sin B : \sin C = 2:3:4$ ，則 $\triangle ABC$ 是鈍角三角形

Ans：1235

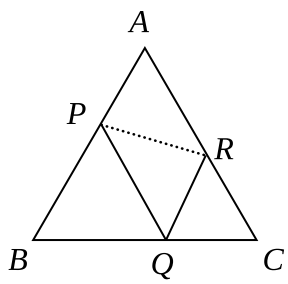
類題 7：

某人在O點測量遠處有一物體作等速直線運動，開始的時候，物體的位置在P點，一分鐘之後，位置在Q點且$\angle POQ = 90°$。再過一分鐘之後，物體的位置在R點，且$\angle QOR = 30°$，求$\tan^2\left(\angle OPQ\right)$。

Ans：$\dfrac{3}{4}$

類題 8：

在邊長為13的正三角形ABC上各邊分別取一點P,Q,R，使得$APQR$形成一平行四邊形，如下圖所示：若平行四邊形$APQR$的面積為$20\sqrt{3}$，求線段PR的長度。



Ans：7

類題 9：

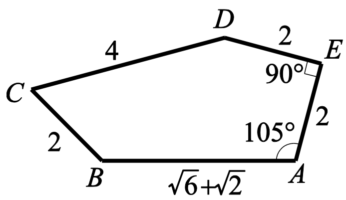
有一個三角形公園，其三頂點為 O、A、B，在頂點 O 處有一座 150 公尺高的觀景台，某人站在觀景台上觀測地面上另兩個頂點 A、B 與 $\overline{AB}$ 的中點 C，測得其俯角分別為 30°、60°、45°。求此三角形公園的面積。

Ans：$7500\sqrt{2}$

類題 10：

最近數學家發現一種新的可以無縫密舖平面的凸五邊形 $ABCDE$，其示意圖如下。關於這五邊形，請選出正確的選項。

(1) $\overline{AD} = 2\sqrt{2}$　(2) $\angle DAB = 45°$　(3) $\overline{BD} = 2\sqrt{6}$　(4) $\angle ABD = 45°$　(5) $\triangle BCD$的面積為$2\sqrt{2}$

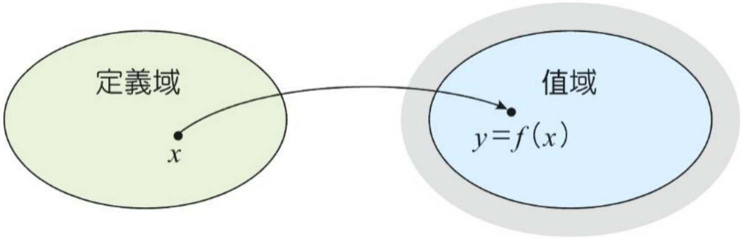


Ans：14

1-4 正弦函數的圖形

1. 函數

對於一個函數 $f(x)$ 而言，能讓 $f(x)$ 有意義的所有 x 所成的集合，稱為此函數的定義域；所有 x 所對應的 $f(x)$ 可能的函數值所成的集合，稱為此函數的值域。

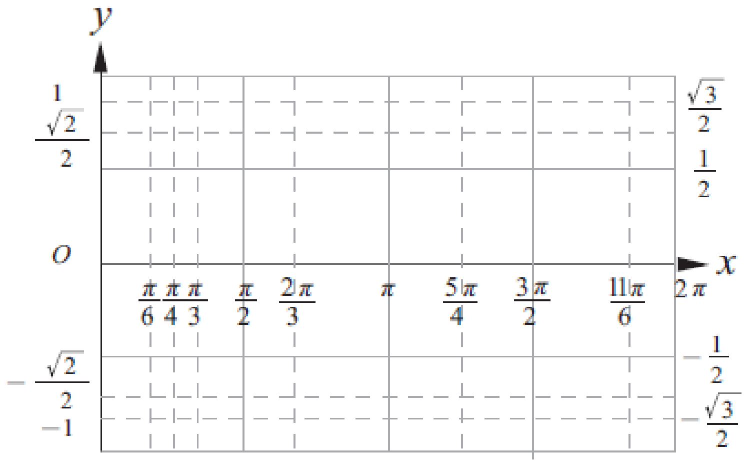


2. 正弦函數的圖形

將廣義角 x (弳)對應到正弦值 $\sin x$ 的函數稱為正弦函數，即 $y=f(x)=\sin x$ 。

EXAMPLE 1

試著描繪 $y=\sin x$ 的圖形：在下方標出 $(x,\sin x)$ 的點坐標，並用平滑曲線連起來。



3. 正弦函數圖形的性質

(1)定義域與值域： $y=\sin x$ 的定義域為__________，值域為__________。

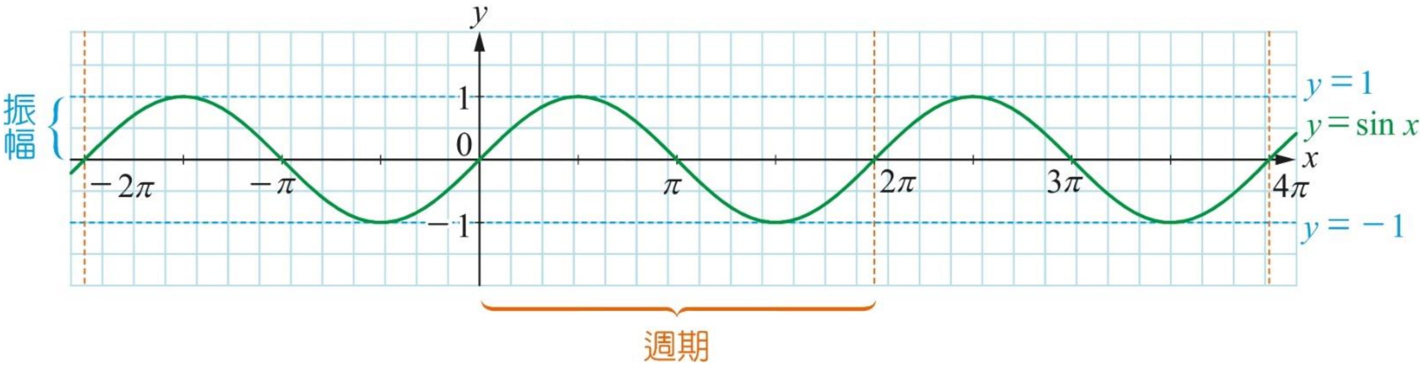
(2)週期： $\sin(x+2\pi)=\sin x$ ，所以 $y=\sin x$ 的週期為______。

(3)振幅：中線(x 軸)上下震盪的大小為 1，所以 $y=\sin x$ 的振幅為____。

(4)對稱性

①點對稱：圖形與 x 軸交點 $(k\pi,0)$ 均為對稱中心， k 為整數。例如： $y=\sin x$ 對稱於原點。

②線對稱：圖形通過最高或最低點的鉛直線 $x=\dfrac{k\pi}{2}$ ， k 為奇數。例如： $y=\sin x$ 對稱於 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 。

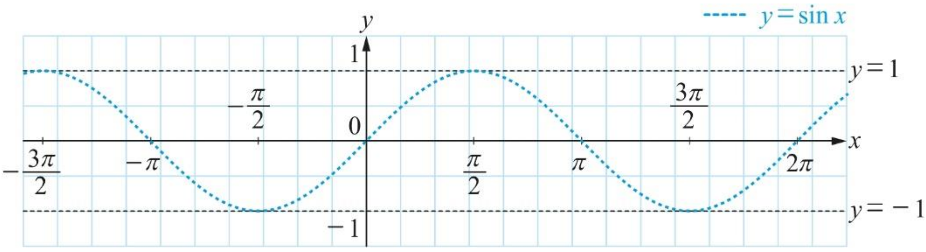


EXAMPLE 2

利用 $y=\sin x$ 的圖形(虛線)，描繪下列各函數的圖形，並觀察圖形變化及週期與振幅。

(1) $y=\sin x+1$ (2) $y=\sin x-1$ (3) $y=\sin(x+\dfrac{\pi}{2})$ (4) $y=\sin(x+\dfrac{\pi}{2})$

(1) $y=\sin x+1$



$y=\sin x \to y=\sin x+1$

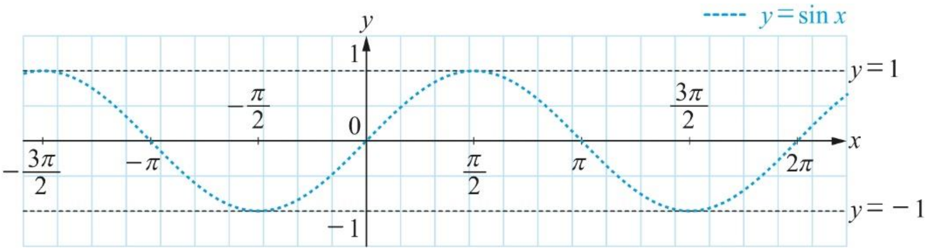
方程式： $(x,y)\to$

圖形 ： $y=\sin x$

週期 ： $2\pi \to$

振幅 ： $1 \to$

(2) $y=\sin x-1$



$y=\sin x \to y=\sin x-1$

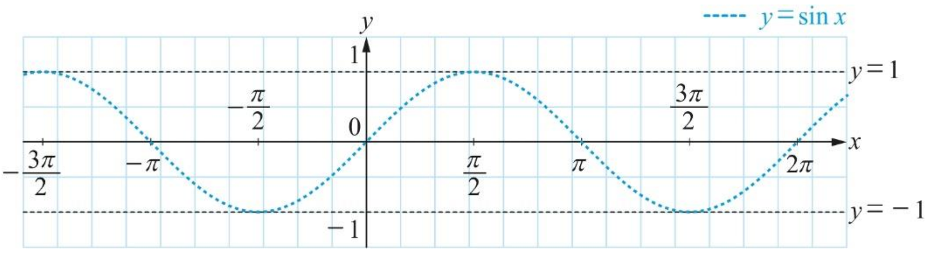
方程式： $(x,y)\to$

圖形 ： $y=\sin x$

週期 ： $2\pi \to$

振幅 ： $1 \to$

(3) $y=\sin(x+\dfrac{\pi}{2})$



$y=\sin x \to y=\sin(x+\dfrac{\pi}{2})$

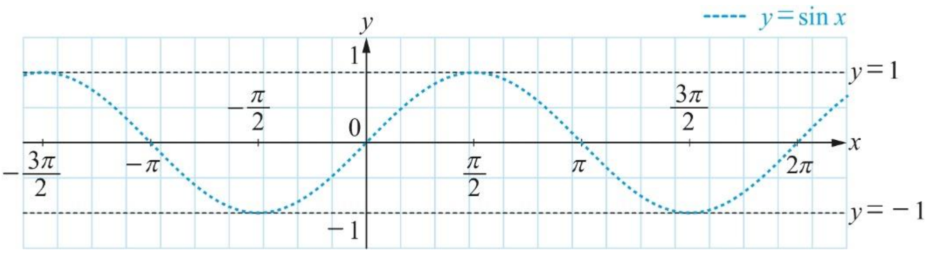
方程式： $(x,y)\to$

圖形 ： $y=\sin x$

週期 ： $2\pi \to$

振幅 ： $1 \to$

(4) $y=\sin(x+\dfrac{\pi}{2})$



$y=\sin x \to y=\sin(x-\dfrac{\pi}{4})$

方程式： $(x,y)\to$

圖形 ： $y=\sin x$

週期 ： $2\pi \to$

振幅 ： $1 \to$

4. 函數圖形的平移

(1)水平方向平移：$(x,y)\to(x-h,y)$，如：$y=\sin x \xrightarrow{(x,y)\to(x-h,y)} y=\sin(x-h)$。

當 $h>0$ 表示向右平移 h 單位；當 $h<0$ 表示向左平移 $|h|$ 單位。

(2)鉛直方向平移：$(x,y)\to(x,y-k)$，如：$y=\sin x \xrightarrow{(x,y)\to(x,y-k)} y-k=\sin x$ (即 $y=\sin x+k$)。

當 $h>0$ 時，表示向上平移 h 單位；當 $h<0$ 時，表示向下平移 $|h|$ 單位。

★平移不會改變週期和振幅

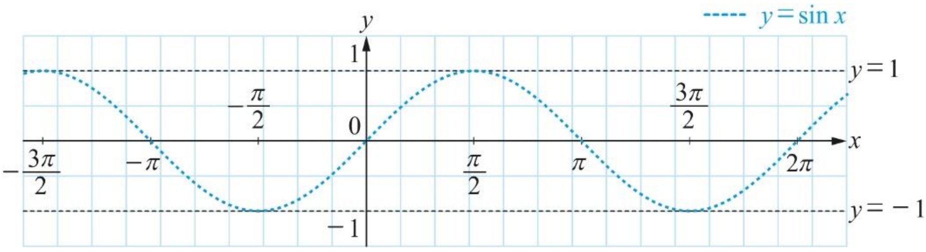
EXAMPLE 3

利用 $y=\sin x$ 的圖形(虛線)，描繪下列各函數的圖形，並觀察圖形變化及週期與振幅。

(1) $y=\sin 2x$　　(2) $y=\sin\dfrac{x}{2}$　　(3) $y=2\sin x$　　(4) $y=\dfrac{1}{2}\sin x$

(1) $y=\sin 2x$

$y=\sin x \to y=\sin 2x$



方程式：$(x,y)\to$

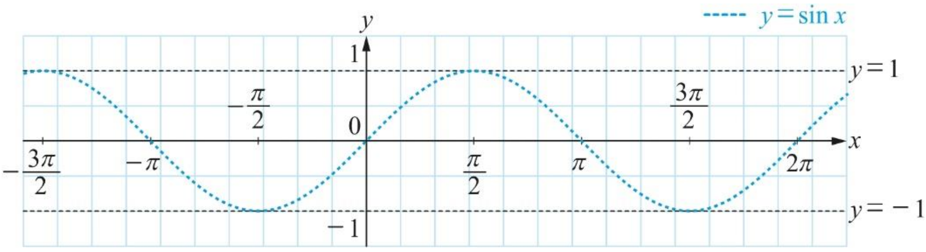
圖形：$y=\sin x$

週期：$2\pi \to$

振幅：$1 \to$

(2) $y=\sin\dfrac{x}{2}$

$y=\sin x \to y=\sin\dfrac{x}{2}$



方程式：$(x,y)\to$

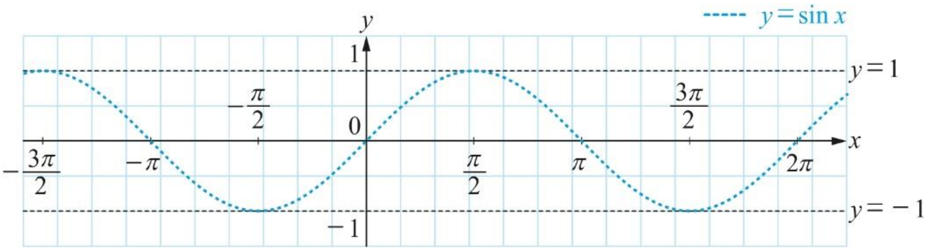
圖形：$y=\sin x$

週期：$2\pi \to$

振幅：$1 \to$

(3) $y=2\sin x$

$y=\sin x \to y=2\sin x$



方程式：$(x,y)\to$

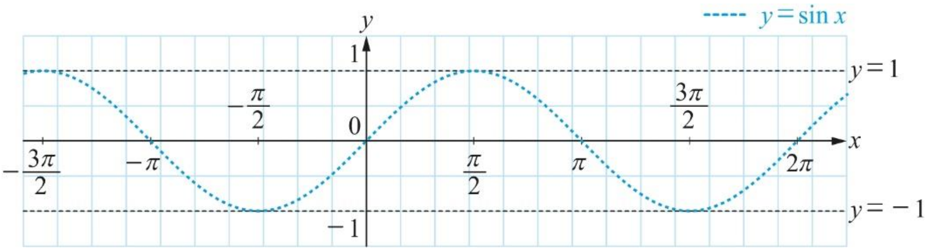
圖形：$y=\sin x$

週期：$2\pi \to$

振幅：$1 \to$

(4) $y=\dfrac{1}{2}\sin x$

$y=\sin x \to y=\dfrac{1}{2}\sin x$



方程式：$(x,y)\to$

圖形：$y=\sin x$

週期：$2\pi \to$

振幅：$1 \to$

5. 函數圖形的平移

(1)水平方向伸縮：$(x,y)\to(\dfrac{x}{a},y)$，週期變為 a 倍。如：$y=\sin x \xrightarrow{(x,y)\to(\frac{x}{a},y)} y=\sin\dfrac{x}{a}$。

當 $a>1$ 時，表示水平方向放大為 a 倍；當 $0<a<1$ 時，表示水平方向縮短為 a 倍。

(2)鉛直方向伸縮：$(x,y)\to(x,\dfrac{y}{b})$，振幅變為 b 倍。如：$y=\sin x \xrightarrow{(x,y)\to(x,\frac{y}{b})} \dfrac{y}{b}=\sin x$ (即 $y=b\sin x$)。

當 $b>1$ 時，表示水平方向放大為 b 倍；當 $0<b<1$ 時，表示水平方向縮短為 b 倍。

6. 函數 $y=a\sin(bx+c)+d$ 的平移伸縮 ⇒ 習慣____________________

$$y=\sin x \xrightarrow[\text{鉛直伸縮}a\text{倍}]{(x,y)\to(x,\frac{y}{a})} y=a\sin x \xrightarrow[\text{水平伸縮}\frac{1}{b}\text{倍}]{(x,y)\to(bx,y)} y=a\sin bx$$

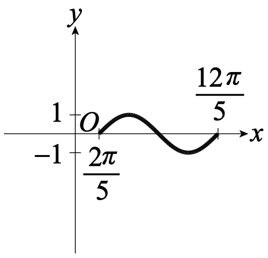
$$\xrightarrow[\text{水平向右位移}\frac{-c}{b}]{(x,y)\to(x+\frac{c}{b},y)} y=a\sin[b(x+\frac{c}{b})] \xrightarrow[\text{鉛直向上位移}d]{(x,y)\to(x,y-d)} y=a\sin(bx+c)+d$$

(1) $y=a\sin(bx+c)+d$ 的週期為________

(2) $y=a\sin(bx+c)+d$ 的振幅為________

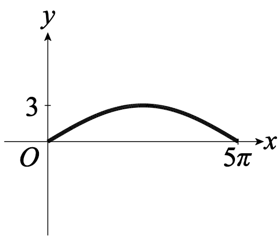
EXAMPLE 4

已知下圖為 $y=\sin(x+h)$ 一個週期的圖形，其中 $0<h<2\pi$，求 h 的值。



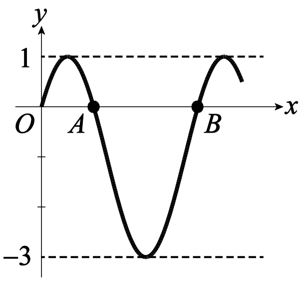
EXAMPLE 5

已知右圖為 $y=a\sin bx$ 半個週期的圖形，其中 $a>0$，$b>0$，求 a 與 b 的值。



EXAMPLE 6

右圖為函數 $y=a\sin\left(bx+c\right)+d$ 的部分圖形，其中 $a>0$，$b>0$，$-\frac{\pi}{2}\le c\le\frac{\pi}{2}$，$A(\frac{\pi}{3},0)$，$B\left(\pi,0\right)$，求常數 a，b，c，d 的值。

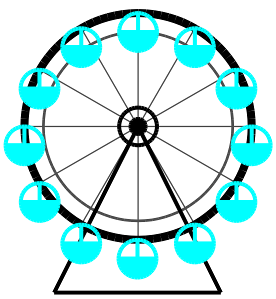


EXAMPLE 7

有一圓形摩天輪，當摩天輪開始運轉時，小龍恰坐在離地最近的位置上，x 分鐘後，小龍離地的高度 y（公尺）可表為 $y=20\sin\left(\frac{2\pi}{15}x-\frac{\pi}{2}\right)+22$。

(1)小龍離地最高為多少公尺？

(2)摩天輪轉一圈需幾分鐘？



EXAMPLE 8

求方程式 $5\sin\pi x-x=0$ 有幾個實數解。

課後練習題

類題 1：

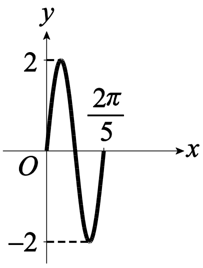
$y=\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$ 的圖形如何由 $y=\sin x$ 的圖形平移得到？

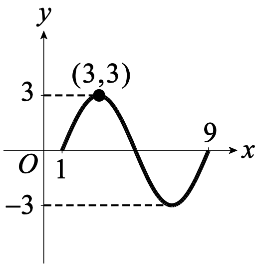
(1)往左平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 單位 (2)往右平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 單位 (3)往左平移 $\dfrac{7\pi}{4}$ 單位 (4)往右平移 $\dfrac{7\pi}{4}$ 單位。

類題 2：

已知右圖為 $y=a\sin bx$ 一個週期的圖形，其中 $a>0$ ，$b>0$ ，求 a 與 b 的值。

Ans： $a=2, b=5$





類題 3：

如上圖，函數 $y=a\sin(bx+c)$（ $a>0$ ，$b>0$ ，$|c|<\pi$ ）一個週期的圖形，求實數 a,b,c 的值。

Ans： $a=3, b=\dfrac{\pi}{4}, c=\dfrac{\pi}{4}$

類題 4：

阿南欲觀察月球亮面的比例，遂在某一月(共 30 天) 的每天夜晚同一時間拍攝月球照片，並計算月球亮面的比例。最後擬合所得的資料，繪製如右的圖形，並發現可用正弦函數

$y=a\sin(bx-c)+d$ (其中 $a>0$，$b>0$，$0\le c\le\dfrac{\pi}{2}$) 來描述所觀察的資料。試回答下列問題：

(1)此函數的週期 (2)此函數的振幅 (3)求 a , b , c , d 的值

Ans：(1)28 (2) $\dfrac{1}{2}$ (3) $a=\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{\pi}{14}, c=\dfrac{3\pi}{14}, d=\dfrac{1}{2}$

類題 5：

假設小華某段時間的血壓變化可用函數 $f(t)=24\sin(100\pi t)+90$ 來模擬，其中 $f(t)$為血壓（單位：毫米汞柱），t 為時間（單位：分鐘）。若 $f(t)$的最大值稱為收縮壓，而兩個收縮壓的時間間隔為 1 次心跳的時間，求小華的心跳速率為每分鐘幾次。

Ans：50

類題 6：

一物體以彈簧懸掛。已知該物體離平衡點的位移 y（公分）與時間 x（秒）可用函數

$y=3\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 表示，求：(1)彈簧最大的伸長量（位移） (2)往返完成一次振動所需要的時間。

Ans：(1)3 公分 (2)4 秒

類題 7：

求方程式 $\sin x=\dfrac{x}{5}$ 解的個數。

Ans：3