2-1 指數運算

1. 指數的定義

(1)正整數指數：設 a 為實數，n 為正整數，則 $a^n=\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{個}}$。

(2)整數指數、有理數指數：設 $a>0$，n 為正整數，m 為整數，則

$a^0=1$、$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$、$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$、$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$。

2. 指數律：設 $a,b>0$ 且 m,n 均為實數

(1) $a^{m+n}=a^m\times a^n$　(2) $a^{m-n}=\frac{a^m}{a^n}$　(3) $(ab)^m=a^mb^m$　(4) $(\frac{a}{b})^m=\frac{a^m}{b^m}$

(5) $a^{mn}=(a^m)^n$　($a^{2x}=(a^x)^2$、$a^{-x}=\frac{1}{a^x}$)

3. 常見題型

【型一】互為倒數和⇒條件限制：當 $x>0$ 時，$x+\frac{1}{x}\geq 2$　$\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\geq\sqrt{x(\frac{1}{x})}\right)$

(1) $x^2+x^{-2}=(x+x^{-1})^2-2$　(2) $x^3+x^{-3}=(x+x^{-1})^3-3(x+x^{-1})$

【型二】若 $a^x=b^y$，則

(1) $a=b^{\frac{y}{x}}$ (同時 $\frac{1}{x}$ 次方)　(2) $b=a^{\frac{x}{y}}$ (同時 $\frac{1}{y}$ 次方)

EXAMPLE 1

計算下列各值：

(1) π^0　(2) 2^{-3}　(3) $25^{\frac{1}{2}}$　(4) $343^{-\frac{2}{3}}$　(5) $(\frac{81}{16})^{-0.25}+(0.25)^{-2.5}$　(6) $20^{2.5}\times5^{-1.5}\times6^{-3}\times14^{-3}\times21^3$

(1) 1　(2) $\frac{1}{8}$　(3) 5　(4) $7^{-2}=\frac{1}{49}$

(5) $(\frac{81}{16})^{-\frac{1}{4}}+(\frac{1}{4})^{-\frac{5}{2}}$
$=(\frac{16}{81})^{\frac{1}{4}}+4^{\frac{5}{2}}$
$=\frac{2}{3}+2^5$
$=\frac{98}{3}$

(6) $20^{\frac{5}{2}}\times5^{-\frac{3}{2}}\times6^{-3}\times14^{-3}\times21^3$
$=2^5\times5^{\frac{5}{2}}\times5^{-\frac{3}{2}}\times2^{-3}\times3^{-3}\times2^{-3}\times7^{-3}\times3^3\times7^3$
$=2^{-1}\times3^0\times5^1\times7^0$
$=\frac{5}{2}$

EXAMPLE 2

設 $a+a^{-1}=4$，求：

(1) a^2+a^{-2} (2) a^3+a^{-3} (3) a^4+a^{-4} (4) $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}$

(1) $a^2+a^{-2}=(a+a^{-1})^2-2=4^2-2=14$

(2) $a^3+a^{-3}=(a+a^{-1})^3-3(a+a^{-1})=4^3-3\times4=52$

(3) $a^4+a^{-4}=(a^2)^2+(a^{-2})^2=(a^2+a^{-2})^2-2=14^2-2=194$

(4) $(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2=a+a^{-1}+2=6$

$\therefore a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{6}$ (取正) $=\sqrt{6}$

EXAMPLE 3

已知 $a^{2x}=\sqrt{2}+1$，求：

(1) $\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}$ (2) $\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}$

[法一] 乘法公式

(1) $a^{2x}-1+a^{-2x}=\sqrt{2}+1-1+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=2\sqrt{2}-1$

(2) $a^{2x}+1+a^{-2x}=\sqrt{2}+1+1+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=2\sqrt{2}+1$

[法二] 偶數次方

(1)為例 $\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}\cdot\dfrac{a^x}{a^x}=\dfrac{a^{4x}+a^{-2x}}{a^{2x}+1}=\dfrac{(3+2\sqrt{2})+(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)+1}$

$=\dfrac{2+3\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\times\dfrac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=2\sqrt{2}-1$

EXAMPLE 4

已知 x,y 均為實數，滿足 $27^x=67$ 且 $81^y=603$，求 $3x-4y$ 的值。

$3^{3x}=67\cdots①$

$3^{4y}=603\cdots②$

$\dfrac{①}{②}$：$3^{3x-4y}=\dfrac{67}{603}=\dfrac{1}{9}$

$\therefore 3x-4y=-2$

EXAMPLE 5

設 a,b 為正實數，且 $a=2^{0.3}$，$b=2^{0.03}$，則下列選項哪些是正確的？

(1) $a=10b$ (2) $a=b^{10}$ (3) $0.5a=2^{0.15}$

(4) $0.5ab=2^{-0.67}$ (5) $2ab^2=2^{1.36}$

(1) $10b=10\cdot2^{0.03}\neq2^{0.3}$ (×)

(2) $b^{10}=(2^{0.03})^{10}=2^{0.3}$ (○)

(3) $0.5a=\frac{1}{2}\cdot2^{0.3}=2^{-1}\cdot2^{0.3}=2^{-0.7}\neq2^{0.15}$ (×)

(4) $0.5ab=\frac{1}{2}\cdot2^{0.3}\cdot2^{0.03}=2^{-1}\cdot2^{0.33}=2^{-0.67}$ (○)

(5) $2ab^2=2^1\cdot2^{0.3}\cdot(2^{0.03})^2=2^{1.36}$ (○)

選 (2)(4)(5)

EXAMPLE 6

某項新實驗中細菌數 1 日後增加 k 倍，已知 3 日後細菌數為 2000，5 日後其細菌數為 32000，若細菌數為 128000 時需 M 日，求數對 (k,M)。

增加 k 倍 ⇒ 增加為 (k+1) 倍.

設一開始細菌數為 N

3日後細菌數為 $N\cdot(k+1)^3=2000\cdots①$

5日後細菌數為 $N\cdot(k+1)^5=32000\cdots②$

$\dfrac{②}{①}$：$(k+1)^2=16$，$k+1=4$，$k=3$

M日後細菌數為 $N\cdot4^M=128000\cdots③$

$\dfrac{③}{②}$：$4^{M-5}=4$，$M-5=1$，$M=6$

EXAMPLE 7

根據統計，目前臺灣每年大約回收 10 萬噸的寶特瓶，總數大約 45 億支。某慈善機構在 108 年回收 2 噸的寶特瓶，並將這些寶特瓶中的 60%再做成紡絲纖維。某個慈善機構往後每年的回收量大約是前一年的 1.5 倍，求幾年後，這個慈善機構就可以製成 100 噸以上的紡絲纖維。

現在可以製成 $2\times60\%=1.2$ 噸紡絲纖維

n 年後可以製成 $1.2\times(1.5)^n>100$

$\Rightarrow(1.5)^n>\dfrac{250}{3}\approx83.\cdots$

計算機 $(1.5)^{10}\approx57.\cdots$

$(1.5)^{11}\approx86.\cdots$ $\Rightarrow n=11$

如何知道按幾次方?? → log

課後練習題

類題 1：

計算下列各值：

(1) $(\sqrt{3})^{-2}\times[(\sqrt{3})^3]^{-\frac{1}{2}}\times(\sqrt{3})^{\frac{11}{2}}$ (2) $(\frac{81}{16})^{-0.25}\times(\frac{8}{27})^{-\frac{2}{3}}\times(0.25)^{-2.5}$ (3) $7^{2+\sqrt{3}}\times 343^{\frac{-\sqrt{3}}{3}}$

(4)設 $a>0$，若 $\sqrt[7]{\sqrt{a}\times\sqrt[4]{\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}}}=a^x$，求 x 值 (5) $5^{2.3}\times 5^{-0.8}\div 5^{2.5}-5^{-2}$

(6) $(2\frac{7}{9})^{0.5}+(0.1)^{-1}+4(2\frac{10}{27})^{-\frac{1}{3}}+(2^{\pi})^{-\frac{3}{\pi}}$ (7) $(2^{\sqrt{5}})^{\sqrt{20}}-2^{1+\pi}\cdot 2^{1-\pi}+\frac{1024^{\sqrt{5}}}{32^{\sqrt{20}}}$

Ans：(1)3 (2)48 (3)49 (4) $\frac{1}{12}$ (5) $\frac{4}{25}$ (6) $\frac{355}{24}$ (7)1021

類題 2：

設 $2^x+2^{-x}=6$，求：

(1) 4^x+4^{-x} (2) $2^{\frac{x}{2}}+2^{-\frac{x}{2}}$ (3) 8^x+8^{-x}

Ans：(1)34 (2) $2\sqrt{2}$ (3)198

類題 3：

(1)已知 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$，求 $\dfrac{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+7}{x^2+x^{-2}+3}$ 的值。

(2)已知 $a^{2x}=3$，求 $\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^{3x}-a^{-5x}}$ 的值。

Ans：(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{9}{40}$

類題 4：

已知 $x,y,z\in\mathbb{R}$，$2^x=3^y=5^z=a$ 且 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$，求 a 值。

Ans：$\sqrt{30}$

類題 5：

已知 $x,y\in\mathbb{R}$，$21^x=27$ 且 $189^y=243$，求 $\frac{3}{x}-\frac{5}{y}$ 的值。

Ans：-2

類題 6：

小明身體不舒服，需依照醫生指示服藥。假設在吞藥後 t 小時，殘留在胃裡的藥量尚有 $M(t)=450\times(0.64)^t$ 毫克，根據此關係回答下面問題：

(1)經過 1.5 小時後，要量殘留多少毫克？

(2)自 t 小時到 $t+1$ 小時吸收的藥量，與第 t 小時殘存藥量比值為何？

Ans：(1)230.4 (2)0.36

2-2 常用對數

1. 常用對數

設$a>0$，當實數x滿足$a=10^x$，則x可用$\log a$表示，即$a=10^{\log a}$。稱$\log a$為a的常用對數。

2. 科學記號

將一個正數x表成$x=a\times10^n$，其中$1\le a<10$，n是整數，這種記法稱為科學記號。

$x=a\times10^n=10^{\log a}\times10^n=10^{n+\log a}$，其中$0\le\log a<1$。

(1) $n\ge0$時，表示x的整數部分為 $n+1$ 位數。

(2) $n<0$時，表示x在小數點後第 $|n|$ 位數字開始不為 0。

EXAMPLE 1

計算下列各值：

(1) $\log100$ (2) $\log\frac{1}{10}$ (3) $\log1$ (4) $\log\sqrt{1000}$

$100=10^{\log100}$ $\frac{1}{10}=10^{\log\frac{1}{10}}$ $1=10^{\log1}$ $\sqrt{1000}=10^{\log\sqrt{1000}}$

$\log100=2$ $\log\frac{1}{10}=-1$ $\log1=0$ $\sqrt{1000}=10^{\frac{3}{2}}$

$\log\sqrt{1000}=\frac{3}{2}$

EXAMPLE 2

已知$a=\log8$、$b=\log2$，求下列各值：

(1) 100^a (2) 10^{2a+b-1}

(1) $100^{\log8}=10^{2\log8}=(10^{\log8})^2=8^2=64$

(2) $10^{2\log8+\log2-1}=\frac{(10^{\log8})^2\times10^{\log2}}{10}=\frac{8^2\times2}{10}$

$=\frac{64}{5}$

EXAMPLE 4

設a,b都大於 0，$\log a=18$，$\log b=16$，則$\log(a-b)$最接近下列哪一個值？

(1) $\frac{3}{2}$ (2) 3 (3) 6 (4) 12 (5) 18

$a=10^{\log a}=10^{18}$

$b=10^{\log b}=10^{16}$

$a-b=10^{18}-10^{16}\approx10^{18}$

$\log(a-b)\approx\log10^{18}=18$，選(5)

EXAMPLE 4

估算2^{-30}小數點後面連續有多少個 0。

(參考數據：$\log2\approx0.3010$)

$2^{-30}=(10^{\log2})^{-30}\approx10^{-30\times0.3010}$

$=10^{-9.03}=10^{0.97}\times10^{-10}$

小數點後第10位始不為0，

故連續有9個"0"。

EXAMPLE 5

科學記號$(\sqrt[3]{49})^{100}=a\times10^n$，其中$1\le a<10$，$n$是正整數。若$a$的整數部分為$m$，求數對$(m,n)$。

(參考數據：$\log2\approx0.3010,\log3\approx0.4771,\log7\approx0.8451$)

$49^{\frac{100}{3}}=7^{\frac{200}{3}}=(10^{\log7})^{\frac{200}{3}}\approx10^{\frac{200}{3}\times0.8451}=10^{56.34}=10^{0.34}\times10^{56}$

$\left(\because 10^{\log2}=2=10^{0.301},\ 10^{\log3}=3=10^{0.4771}\quad\therefore10^{0.34}\approx2.\cdots\right)$

$=2.\cdots\times10^{56}$

故$m=2,n=56$

2-3 對數律(常用對數)

1. 常用對數的對數律：設 x, y 為正實數，r 為實數

(1)加法 $\log x+\log y=$ $\log xy$

(2)減法 $\log x-\log y=$ $\log \frac{x}{y}$

(3)係數積 $r\log x=$ $\log x^r$

指數律

(1) $x=10^{\log x}$ …①
$y=10^{\log y}$ …②
$\Rightarrow$ ①×②：$xy=\boxed{10^{\log x}\cdot 10^{\log y}}\Rightarrow 10^{\log xy}=\boxed{10^{\log x+\log y}}$

(2) $x=10^{\log x}$ …①
$y=10^{\log y}$ …②
$\Rightarrow$ $\frac{①}{②}$：$\frac{x}{y}=\boxed{\frac{10^{\log x}}{10^{\log y}}}\Rightarrow 10^{\log \frac{x}{y}}=\boxed{10^{\log x-\log y}}$

(3) $x=10^{\log x}$，同時 r 次方 $\Rightarrow$ $x^r=\boxed{(10^{\log x})^r}\Rightarrow 10^{\log x^r}=\boxed{10^{r\cdot\log x}}$

EXAMPLE 1

計算下列各值：

(1) $\log 4+\log 25$

$=\log(4\times 25)$

$=\log 100=2$

[法二]

$4=10^{\log 4}$ …①

$25=10^{\log 25}$ …②

①×②：$100=10^{\log 4+\log 25}=10^2$

(2) $\log 200-\log 0.2$

$=\log\frac{200}{0.2}$

$=\log 1000=3$

(3) $\log\frac{1}{6}-\log\frac{125}{42}-\log 56$

$=\log\frac{1}{6}\times\frac{42}{125}\times\frac{1}{56}$

$=\log\frac{1}{1000}=-3$

(4) $2\log\frac{5}{3}+\log\frac{27}{35}-\log\frac{3}{14}$

$=\log\left(\frac{5}{3}\right)^2+\log\frac{27}{35}-\log\frac{3}{14}$

$=\log\frac{25}{9}\times\frac{27}{35}\times\frac{14}{3}$

$=\log 10=1$

EXAMPLE 2

請問下列哪一個選項等於 $\log(2^{(3^5)})$？

(1) $5\log(2^3)$ (2) $3\times 5\log 2$ (3) $5\log 2\times\log 3$

(4) $5(\log 2+\log 3)$ (5) $3^5\log 2$

$\log 2^{(3^5)}=3^5\cdot\log 2$，選(5)

EXAMPLE 3

計算 $(\log 2)^3+(\log 5)(\log 8)+(\log 5)^3$ 之值。

$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

$(\log 2)^3+(\log 5)(\log 2^3)+(\log 5)^3$

$=(\log 2)^3+(\log 5)^3+3(\log 2)(\log 5)\underbrace{(\log 2+\log 5)}_{=1}$

$=(\log 2+\log 5)^3=1^3=1$

課後練習題

類題 1：

化簡 $\log 100+\log 10\sqrt{10}-\log\dfrac{1}{1000}$ 。

Ans：$\dfrac{1}{2}$

類題 2：

設 $a=\log 3$ ， $b=\log 4$ ，求 $100^{2a+\frac{1}{2}b}$ 之值。

Ans：18

類題 3：

設 $\log a=\dfrac{1}{2}$ ， $\log b=4$ ， $\log c=-2$ ，則 $\log\left(\dfrac{abc}{100}\right)=$______ 。

Ans：$\dfrac{1}{2}$

類題 4：

請估計 3^{-50} 從小數點後第幾位開始出現不為 0 的數字。(參考數據： $\log 3\approx 0.4771$)

Ans：24

類題 5：

已知 47^{100} 是 168 位數，求 47^{50} 是幾位數。

Ans：84

類題 6：

計算下列各值：

(1) $\log 2-\log 20$　　(2) $3\log_2\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\log_2 3+\log_2\dfrac{\sqrt{3}}{2}=$　　(3) $\log\dfrac{14}{25}-5\log 2-2\log 3+\log\dfrac{36}{7}=$

Ans：(1) -1　(2) $\dfrac{1}{2}$　(3) -2

類題 7：

計算 $(\log 20)^3-(\log 20)(\log 8)-(\log 2)^3$ 之值。

Ans：1

2-4 對數

1. 對數的定義：設 x, y 為正實數，r 為實數 　　　　 $b = 10^{\log_{10} b}$

　　設 $a, b > 0$ 且 $a \neq 1$，當實數 x 滿足 $b = a^x$，則 x 可用 $\log_a b$ 表示，即 $b = a^{\log_a b}$。稱 $\log_a b$ 為以 a 為底 b 的對數，其中 a 稱為底數，b 稱為真數。

[說明] $a = 10^{\log a}$, $b = 10^{\log b} = a^{\log_a b}$

$10^{\log b} = \left(10^{\log a}\right)^{\log_a b} = 10^{(\log a)\cdot(\log_a b)}$

2. 對數轉換常用對數：

　　設 a, b 為正實數，$\log_a b = \dfrac{\log b}{\log a}$。(換底公式)　$\therefore \log b = (\log a)\cdot \log_a b$, $\log_a b = \dfrac{\log b}{\log a}$

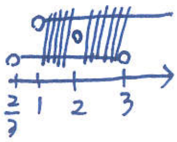
EXAMPLE 1

設 $\log_{x-1}(-3x^2 + 11x - 6)$ 有意義，求 x 的範圍。

Sol：

$\boxed{\text{KEY}}$ $\log_a b$ 有意義 $\Rightarrow$ ① $a > 0$ ② $a \neq 1$ ③ $b > 0$

$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 1 \neq 1 \\ -3x^2 + 11x - 6 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \neq 2 \\ \frac{2}{3} < x < 3 \end{cases} \Rightarrow$



$\Rightarrow 3x^2 - 11x + 6 < 0$

$\Rightarrow (3x-2)(x-3) < 0$

$\therefore 1 < x < 2$ 或 $2 < x < 3$

EXAMPLE 2

已知 $x = \log_2 3$，求 4^x 及 2^{-x} 的值。

$2^x = 2^{\log_2 3} = 3$

$4^x = (2^x)^2 = 3^2 = 9$

$2^{-x} = (2^x)^{-1} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

EXAMPLE 3

設 $\log_5 2 = a$，$\log_4 5 = b$，求 $5^{a - \frac{1}{b} + 1}$ 之值。

$5^a = 5^{\log_5 2} = 2$

$5^{\frac{1}{b}} = 5^{\frac{1}{\log_4 5}} = 5^{\left(\frac{1}{\frac{\log 5}{\log 4}}\right)} = 5^{\frac{\log 4}{\log 5}} = 5^{\log_5 4} = 4$

$5^{a - \frac{1}{b} + 1} = \frac{5^a}{5^{\frac{1}{b}}} \cdot 5^1 = \frac{2}{4} \cdot 5 = \frac{5}{2}$

EXAMPLE 4

以對數表示下列各式中 x 的值：

(1) $2^x = 3$ 　(2) $10^x = 2$ 　(3) $0.3^x = 5$

(1) $x = \log_2 3$

(2) $x = \log_{10} 2 = \log 2$

(3) $x = \log_{0.3} 5$

EXAMPLE 5

求下列各對數的值：

(1) $\log_2 16$ 　(2) $\log_5 \frac{1}{5}$ 　(3) $\log_6 6$ 　(4) $\log_7 49\sqrt{7}$ 　(5) $\log_{\sqrt{2}} 4$ 　(6) $\log_{3\sqrt{3}} \frac{1}{243}$

(1) $= 4$

(2) $= -1$

(3) $= 1$

(4) $= \dfrac{\log 49\sqrt{7}}{\log 7} = \dfrac{\log 7^2 \cdot 7^{\frac{1}{2}}}{\log 7} = \dfrac{\log 7^{\frac{5}{2}}}{\log 7} = \dfrac{\frac{5}{2}\log 7}{\log 7} = \frac{5}{2}$

(5) $= \dfrac{\log 4}{\log \sqrt{2}} = \dfrac{\log 2^2}{\log 2^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{2}{\frac{1}{2}} = 4$

(6) $= \dfrac{\log 3^{-5}}{\log 3^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{-5}{\frac{3}{2}} = \dfrac{-10}{3}$

EXAMPLE 6

求下列各式的值：

(1) $\log_3 15+\frac{1}{2}\log_3 30-\log_3 5\sqrt{5}-\frac{1}{2}\log_3 2$ (2) $\log_{\sqrt{2}} 3\times\log_3 4$ (3) $\frac{2}{\log_2 60}+\frac{1}{\log_3 60}+\frac{1}{\log_5 60}$

(1)
$$=\frac{\log 15}{\log 3}+\frac{\frac{1}{2}\log 30}{\log 3}-\frac{\log 5\sqrt{5}}{\log 3}-\frac{\frac{1}{2}\log 2}{\log 3}$$
$$=\frac{\log 15+\log\sqrt{30}-\log 5\sqrt{5}-\log\sqrt{2}}{\log 3}$$
$$=\frac{\log\frac{15\times\sqrt{30}}{5\sqrt{5}\times\sqrt{2}}}{\log 3}=\frac{\log 3\sqrt{3}}{\log 3}=\frac{\log 3^{\frac{3}{2}}}{\log 3}$$
$$=\frac{\frac{3}{2}\log 3}{\log 3}=\frac{3}{2}$$

(2)
$$=\frac{\log 3}{\log\sqrt{2}}\times\frac{\log 4}{\log 3}$$
$$=\frac{\log 3}{\frac{1}{2}\log 2}\times\frac{2\log 2}{\log 3}$$
$$=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$$

(3)
$$=\frac{2}{\frac{\log 60}{\log 2}}+\frac{1}{\frac{\log 60}{\log 3}}+\frac{1}{\frac{\log 60}{\log 5}}$$
$$=\frac{2\log 2+\log 3+\log 5}{\log 60}$$
$$=\frac{\log 4+\log 3+\log 5}{\log 60}$$
$$=\frac{\log(4\times 3\times 5)}{\log 60}=\frac{\log 60}{\log 60}=1$$

◎對數律：此部分超過課程綱要內容，可自行決定是否學習。

3. 對數律

設 a,b,c,x,y 為正實數且 $a,b,c\neq 1$ ， r,s 為實數。

(1) $\log_a x+\log_a y=$ $\log_a xy$ (2) $\log_a x-\log_a y=$ $\log_a \frac{x}{y}$

(3) $r\log_a x=$ $\log_a x^r$ (5) $\log_{a^s} x^r=$ $\frac{r}{s}\log_a x$

(5) $\log_b c=$ $\frac{\log_a c}{\log_a b}$ (換底公式) (7) $\log_a b=$ $\frac{1}{\log_b a}$ (倒數公式)

(6) $\log_a b\cdot\log_b c=$ $\log_a c$ (8) $x^{\log_a y}=$ $y^{\log_a x}$

課後練習題

類題 1：

設 x 為實數，且使得 $\log_{x-2}\left(6x^2-35x+50\right)$ 有意義，則 x 的範圍為______。

Ans：$x>\frac{10}{3}$ 或 $2<x<\frac{5}{2}$

類題 2：

設 $x=\log_2 7$，求 4^x+2^{-x} 的值。

Ans：$\frac{344}{7}$

類題 3：

求下列各對數的值：

(1) $\log_2 8$　(2) $\log_3 \frac{1}{9}$　(3) $\log_4 1$　(4) $\log_5 5\sqrt{5}$

Ans：(1)2 (2)-2 (3)0 (4)$\frac{3}{2}$

類題 4：

求下列各式的值：

(1) $\log 2-\log 3+\log 15$　(2) $\log 50+\log\frac{3}{7}-\log\frac{3}{14}$　(3) $3\log 2+2\log 5-\log 2$

(4) $3\log\sqrt[3]{4}+\log 25$

Ans：(1)1 (2)2 (3)2 (4)2

◎類題 5：

求下列各式的值：

(1) $\log_6 3+\log_6 8-\log_6\frac{2}{3}$　(2) $\log_5 250+\log_5 10-\log_5 4$　(3) $\log_{18} 2+2\log_{18} 3$

(4) $\log_3 15+\frac{1}{2}\log_3 30-\log_3 5\sqrt{5}-\frac{1}{2}\log_3 2$

Ans：(1)2 (2)4 (3)1 (4)$\frac{3}{2}$

類題 6：

求下列各式的值：

(1) $\left(\log_2\sqrt{7}\right)\times\left(\log_7 2+\log_{49}\frac{1}{8}\right)$　(2) $\frac{1}{\log_3 6}+\frac{1}{\log_{12} 6}$

Ans：(1)$-\frac{1}{4}$ (2)2

2-5 指數函數、對數函數及其圖形

1. 指數函數

設 $a>0$ 且 $a\neq 1$，函數 $f(x)=a^x$ 稱為以 a 為底的的指數函數。

$f(x)=a^x$ 的定義域為 $\{x \mid x\in\mathbb{R}\}$，值域為 $\{y \mid y>0\}$。

2. 對數函數

設 $a>0$ 且 $a\neq 1$，函數 $f(x)=\log_a x$ 稱為以 a 為底的的指數函數。

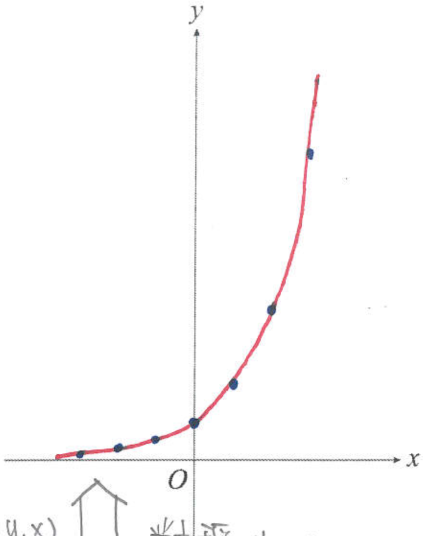
$f(x)=\log_a x$ 的定義域為 $\{x \mid x>0\}$，值域為 $\{y \mid y\in\mathbb{R}\}$。

EXAMPLE 1

描繪下列各函數圖形：(1) $y=2^x$　(2) $y=(\frac{1}{2})^x$　(3) $y=\log_2 x$　(4) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$

(1) $y=2^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

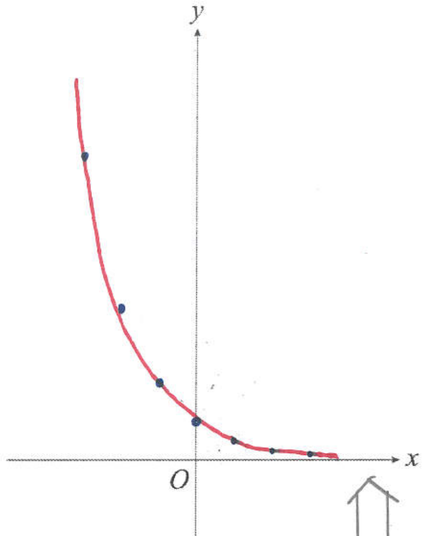


(2) $y=(\frac{1}{2})^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

$(x,y)\leftrightarrow(-x,y)$

對稱y軸

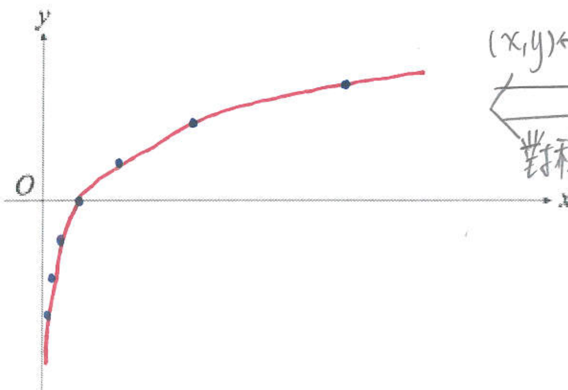


$(x,y)\leftrightarrow(y,x)$　對稱 $y=x$

$(x,y)\leftrightarrow(y,x)$　對稱 $y=x$

(3) $y=\log_2 x$

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	-3	-2	-1	0	1	2	3

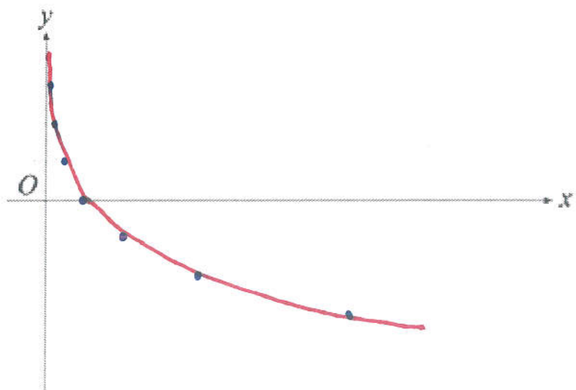


(4) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$

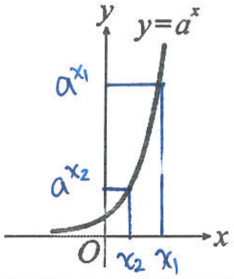
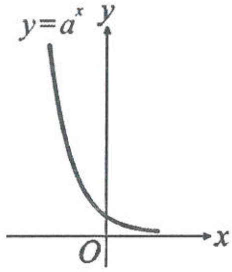
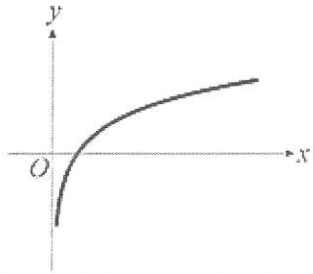
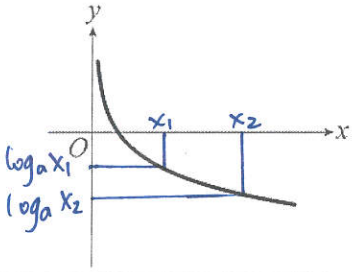
x	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
y	-3	-2	-1	0	1	2	3

$(x,y)\leftrightarrow(x,-y)$

對稱x軸



3. 指數函數與對數函數的圖形及比較

	$a>1$	$0<a<1$	
指數 $y=a^x$			(1)必過 $(0,1)$ (2)恆在 x軸上方 (3)以 x軸 為漸近線
對數 $y=\log_a x$			(1)必過 $(1,0)$ (2)恆在 y軸右側 (3)以 y軸 為漸近線
	遞增函數： 圖形越往右，函數值越大。 $a^{x_1}>a^{x_2}\Rightarrow$ $x_1>x_2$ $\log_a x_1>\log_a x_2\Rightarrow$ $x_1>x_2$	遞減函數：(變號) 圖形越往右，函數值越小。 $a^{x_1}>a^{x_2}\Rightarrow$ $x_1<x_2$ $\log_a x_1>\log_a x_2\Rightarrow$ $x_1<x_2$	

4. 圖形間的對稱 $y=a^{-x}$ $(x,y)\to(-x,y)$

(1) $y=a^x$ 的圖形和 $y=(\frac{1}{a})^x$ 的圖形對稱於 y軸 。

(2) $y=\log_a x$ 的圖形和 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ 的圖形對稱於 x軸 。

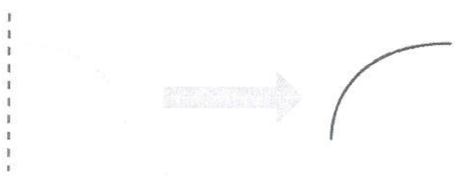
$y=-\log_a x$, $-y=\log_a x$ $(x,y)\to(x,-y)$

(2) $y=a^x$ 的圖形和 $y=\log_a x$ 的圖形對稱於 $y=x$ 。

5. 凹向性

(1)凹口向上：圖形上任兩點的連線（弦）在圖形上方。(如：指數函數圖形 $y=a^x$)

(2)凹口向下：圖形上任兩點的連線（弦）在圖形下方。(如：常用對數函數 $y=\log_{10} x$)

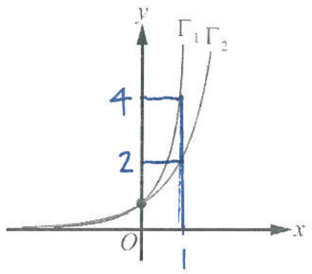


EXAMPLE 2

將下列函數連到所對應的函數圖形之代號上。

$y=2^x$ $\quad$ Γ_1

$y=4^x$ $\quad$ Γ_2



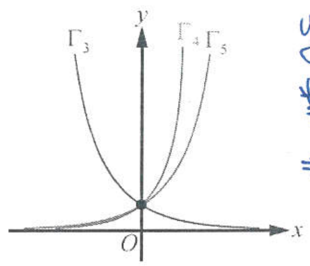
EXAMPLE 3 $\quad$ ※設 $a,b>1$

將下列函數連到所對應的函數圖形之代號上。

$y=a^x$ $\quad$ Γ_3

$y=b^x$ $\quad$ Γ_4

$y=(\frac{1}{a})^x$ $\quad$ Γ_5



$y=a^x$ 和 $y=(\frac{1}{a})^x$

對稱於 y軸

$\Rightarrow \Gamma_3, \Gamma_5$

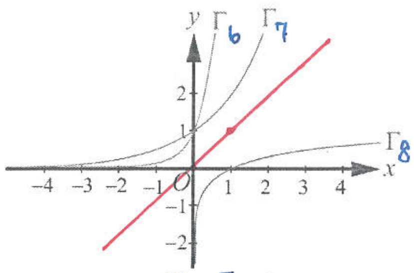
EXAMPLE 4

將下列函數連到所對應的函數圖形之代號上。

$y=2^x$ $\quad$ Γ_6

$y=10^x$ $\quad$ Γ_7

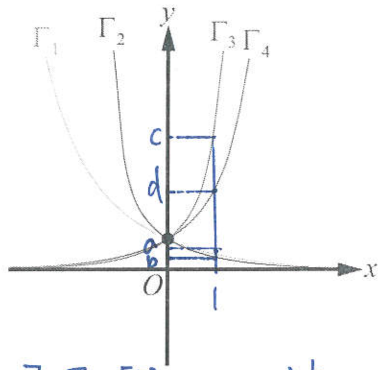
$y=\log x$ $\quad$ Γ_8



$y=10^x$ 和 $y=\log x$ 對稱於 $y=x \Rightarrow \Gamma_6、\Gamma_8$

EXAMPLE 5

如下圖，$\Gamma_1: y=a^x$、$\Gamma_2: y=b^x$、$\Gamma_3: y=c^x$、$\Gamma_4: y=d^x$，請比較 a、b、c、d 的大小。



由 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ 與 $x=1$ 的交點 $(1,a),(1,b),(1,c),(1,d)$ 知 $\Rightarrow b<a<d<c$

EXAMPLE 6

請選出下列關於函數圖形的敘述哪些選項正確？

(1) $y=\log x$ 的圖形必過點 $(0,1)$

(2) $y=3^x$ 的圖形有漸近線 $y=0$

(3) $y=\log x$ 的圖形凹口向下

(4) 已知 $a\geq 0$ 且 $a\neq 1$，$y=a^x$ 的圖形凹口向上

(5) 若 P、Q 是 $y=\log x$ 上的相異兩點，則直線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 的斜率必為負

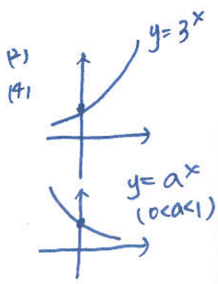
(1) 必過 $(1,0)$ $\quad$ (×)

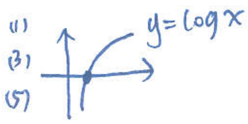
(2) 正確

(3) 正確

(4) 正確

(5) 斜率為正 $\quad$ (×)



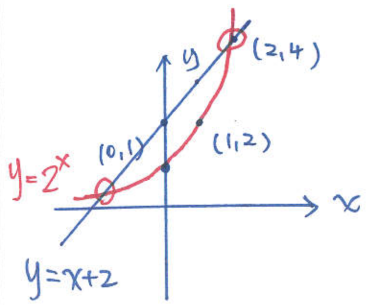


選 (2)(3)(4)

EXAMPLE 7

求方程式 $2^x-x-2=0$ 有幾個實數解。

$2^x=x+2$ 想成 $\begin{cases} y=2^x \\ y=x+2 \end{cases}$



有2個交點 即方程式有2個實根

2-6 指數與對數方程式及不等式

1. 一對一性質（用於解方程式）

(1)若 $a^{x_1}=a^{x_2}$，則 $x_1=x_2$。

(2)若 $\log x_1=\log x_2$，則 $x_1=x_2$。

2. 遞增遞減性質（用於比較數值大小及解不等式）

(1)當 $a>1$ 時，圖形遞增。若 $a^{x_1}>a^{x_2}$，則 $x_1>x_2$。若 $\log_{10}x_1>\log_{10}x_2$，則 $x_1>x_2$。

(2)當 $0<a<1$ 時，圖形遞減。若 $a^{x_1}>a^{x_2}$，則 $x_1<x_2$。

EXAMPLE 1

請比較下列各數的大小：

$A=2\sqrt[3]{4}$、$B=4^{-0.25}$、$C=(0.25)^{-2}$、$D=(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$。

Sol：

$\boxed{\text{KEY}}$ 指對數比大小⇒化同底

$A=2^1\cdot 2^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{5}{3}}$

$B=(2^2)^{-0.25}=2^{-0.5}$

$C=(2^{-2})^{-2}=2^4$

$D=(2^{\frac{1}{2}})^{\sqrt{2}}=2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$\because -0.5<\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{5}{3}<4$

$\therefore B<D<A<C$

EXAMPLE 2

請比較下列各數的大小：

$A=\log 2$、$B=\log\frac{1}{3}$、$C=-\log 4$、$D=1$。

$C=-\log 4=\log 4^{-1}=\log\frac{1}{4}$

$D=1=\log_{10}10^1=\log 10$

$\because \frac{1}{4}<\frac{1}{3}<2<10$

$\therefore C<B<A<D$

EXAMPLE 3

解下列指數方程式及不等式：

(1) $(0.5)^x=2^{-2x+3}$

$(\frac{1}{2})^x=2^{-2x+3}$

$\Rightarrow 2^{-x}=2^{-2x+3}$

$\Rightarrow -x=-2x+3$

$\Rightarrow x=3$

(2) $4^x-2^{x+1}=8$

$(2^x)^2-2\cdot 2^x-8=0$

$\Rightarrow (2^x+2)(2^x-4)=0$

$\Rightarrow 2^x=\underset{(不合)}{-2}$ or 4

$\Rightarrow x=2$

(3) $(\sqrt{2})^{x^2-3}>2^x$

$(2^{\frac{1}{2}})^{x^2-3}>2^x$

$\Rightarrow 2^{\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}}>2^x$

$\Rightarrow \frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}>x$

$\Rightarrow x^2-2x-3>0$

$\Rightarrow (x+1)(x-3)>0$

$\Rightarrow x<-1$ 或 $x>3$

EXAMPLE 4

⑩ 檢查：真數大於0

解下列對數方程式：

(1) $\log_2 x = \log_4 7$

$$\Rightarrow \frac{\log x}{\log 2} = \frac{\log 7}{\log 4}$$

$$\Rightarrow \log x = \log 2 \cdot \frac{\log 7}{2\log 2}$$

$$\Rightarrow \log x = \frac{1}{2}\log 7$$

$$\Rightarrow \log x = \log 7^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow x = 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$$

(2) $\log_3(x+1) = 2$

$$\Rightarrow \frac{\log(x+1)}{\log 3} = 2$$

$$\Rightarrow \log(x+1) = 2\log 3$$

$$\Rightarrow \log(x+1) = \log 3^2$$

$$\Rightarrow x+1 = 3^2 = 9$$

$$\Rightarrow x = 8$$

(3) $\log 2x + \log(x+5) = 2$

$$\Rightarrow \log[(2x)\cdot(x+5)] = \log 10^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 10x = 100$$

$$\Rightarrow x^2 + 5x - 50 = 0$$

$$\Rightarrow (x+10)(x-5) = 0$$

$$\Rightarrow x = -10 \text{ 或 } 5$$

(不合)

EXAMPLE 5

解對數不等式 $2\log x > \log(x+2)$ 。

⑩ 先找真數大於0的條件

真數大於0 $\begin{cases} x > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -2 \end{cases} \Rightarrow x > 0 \cdots ①$

原式：$\log x^2 > \log(x+2)$

$$\Rightarrow x^2 > x+2$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 > 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x-2) > 0$$

$$\Rightarrow x < -1 \text{ 或 } x > 2 \cdots ②$$

①、② 取交集得 $x > 2$

課後練習題

類題 1：

請比較下列各數的大小：

$A=(\frac{3}{10})^3$、$B=(\frac{3}{10})^{-2}$、$C=(0.09)^{\frac{5}{2}}$、$D=1$。

Ans：C < A < D < B

類題 2：

解下列指數方程式及不等式：

(1) $3^{x-1}=9^{x^2-2}$ (2) $(0.5)^x-(0.25)^{x+1}=1$ (3) $(\frac{1}{10})^x>(\frac{1}{\sqrt{10}})^x$

Ans：(1) $\frac{3}{2}$ 或 -1 (2) -1 (3) $x<0$

類題 3：

解下列對數方程式：

(1) $\log(x+10)=1+\log(x-8)$ (2) $\log_{\sqrt{3}}(x-2)=\log_3(2x-1)$

Ans：(1)10 (2)5

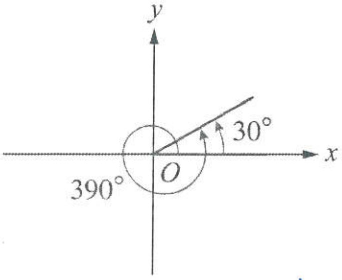
類題 4：

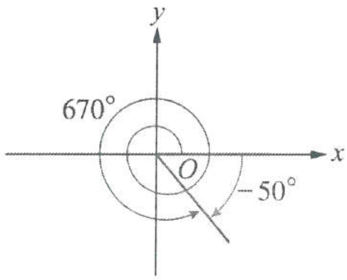
解對數不等式 $\log(x-1)<\log 2$。

Ans：$1<x<3$

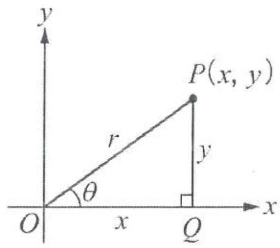
1-1 廣義角三角函數

1. 廣義角(標準位置角)：以正 x 軸為始邊，旋轉到終邊的角度。
   (1)方向：逆時針方向旋轉為正角$(+)$，順時針方向旋轉為負角$(-)$。
   (2)同界角：終邊相同，稱為同界角。如：$30°$ 和 $390°$ 、$-50°$ 和 $670°$ 。





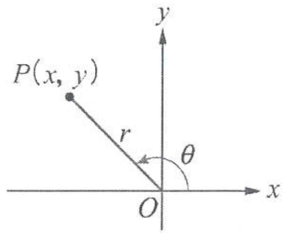
2. 廣義角三角函數：看與 x軸 的夾角(對 x 軸做垂線)
   當廣義角 θ 是一個標準位置角時，在 θ 的終邊上任取異於原點的一點 $P(x, y)$，定義



正弦 $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$ (對/斜) ，其中 $r = \sqrt{x^2+y^2} > 0$

餘弦 $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$ (鄰/斜)

正切 $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ (對/鄰)



3. 特殊角的三角函數值

	30°	45°	60°	0°	90°	180°	270°	I	II	III	IV
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	1	0	−1	+	+	−	−
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	−1	0	+	−	−	+
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	0	×	0	×	+	−	+	−

4. 廣義角化銳角三角函數
   (1)值(不看正負)：與 x 軸之夾角相同，值就相同。
   (2)正負：看象限。

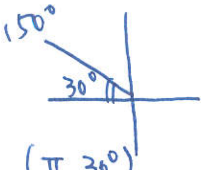
5. 基本關係：(所有三角函數均可以化成 $\sin\theta$ 、 $\cos\theta$)
   (1)平方關係：$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
   (2)餘角關係：$\cos(90°-\theta) = \sin\theta$ 、 $\sin(90°-\theta) = \cos\theta$
   (3)商數關係：$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

EXAMPLE 1

試求下列三角函數的值：

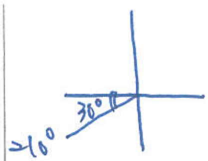
(1) $\sin 150°$　(2) $\cos 210°$　(3) $\tan(-60°)$　(4) $\sin(-1230°)$　(5) $\cos 2010°$　(6) $\tan(765°)$

$-1230° + 1440° = 210°$　$2010° - 1800° = 210°$　$765° - 720° = 45°$



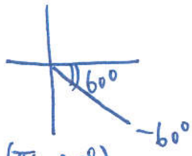
$(\text{II}, 30°)$

$\sin 150° = +\sin 30° = \frac{1}{2}$



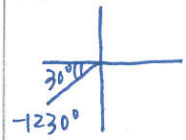
$(\text{III}, 30°)$

$\cos 210° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



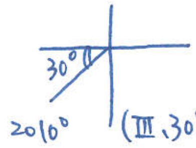
$(\text{IV}, 60°)$

$\tan(-60°) = -\tan 60° = -\sqrt{3}$



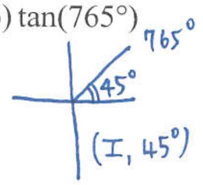
$(\text{III}, 30°)$

$\sin(-1230°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$



$(\text{III}, 30°)$

$\cos 2010° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



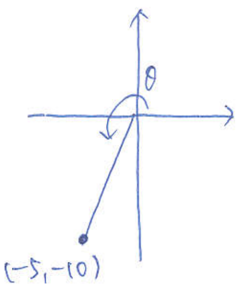
$(\text{I}, 45°)$

$\tan(765°) = \tan 45° = 1$

EXAMPLE 2

設設 $P(-5, y)$ 為 θ 之終邊的一點。已知 $\tan\theta = 2$，求 $\sin\theta$ 與 $\cos\theta$ 的值。

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{y}{-5} = 2$，$y = -10$



$r = \sqrt{(-5)^2 + (-10)^2} = 5\sqrt{5}$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-10}{5\sqrt{5}} = \frac{-2}{\sqrt{5}}$

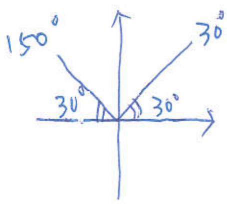
$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-5}{5\sqrt{5}} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$

EXAMPLE 3

已知 $0° \le x < 360°$，求下列各條件的 x 值：

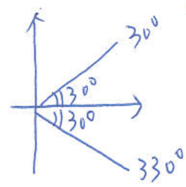
(1) $\sin x = \frac{1}{2}$　(2) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$　(3) $\tan x = -1$

(1) I, II, 30°



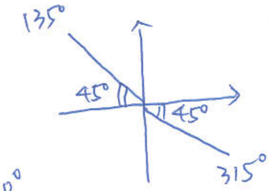
$x = 30°$ or $150°$

(2) I, IV, 30°



$x = 30°$ or $330°$

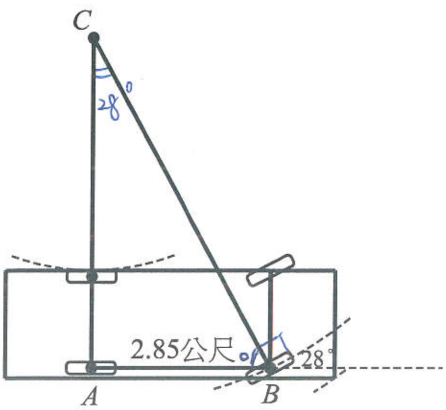
(3) II, IV, 45°



$x = 135°$ or $315°$

EXAMPLE 4

右圖為汽車迴轉示意圖。汽車迴轉時，將方向盤轉動到極限，以低速讓汽車進行轉向圓周運動，汽車轉向時所形成的圓周的半徑就是迴轉半徑，如圖中的 $\overline{BC}$ 即是。已知在低速前進時，圖中 A 處的輪胎行進方向與 $\overline{AC}$ 垂直，B 處的輪胎行進方向與 $\overline{BC}$ 垂直。在圖中，已知軸距 $\overline{AB}$ 為 2.85 公尺，方向盤轉到極限時，輪子方向偏了 28 度，試問此車的迴轉半徑 $\overline{BC}$ 為多少公尺（小數點後第一位以下四捨五入，$\sin 28° \approx 0.4695$，$\cos 28° \approx 0.8829$）。



$\triangle ABC$ 中

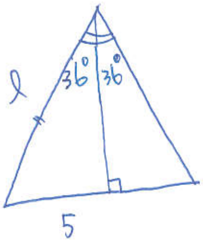
$\sin 28° = \frac{AB}{BC} = \frac{2.85}{BC}$

$\therefore \overline{BC} = \frac{2.85}{0.4695} = 6.07\cdots \approx 6.1$

EXAMPLE 5

有一個等腰三角形底邊為 10，頂角 72°，下列何者可以表示腰長？

(1) $5\sin 36^\circ$　(2) $5\tan 36^\circ$　(3) $\dfrac{5}{\tan 36^\circ}$　(4) $\dfrac{5}{\sin 36^\circ}$



設腰長 l

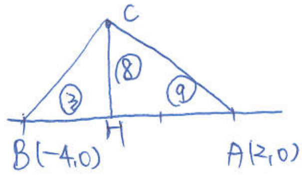
$\sin 36^\circ = \dfrac{5}{l}$，$l = \dfrac{5}{\sin 36^\circ}$

選(4)

EXAMPLE 6

x 軸上有 $A(2,0)$、$B(-4,0)$ 兩觀測站同時觀察 x 軸上方的目標 C 點，測得 $\angle BAC$ 和 $\angle ABC$ 之值後，通知砲台 $D(\dfrac{5}{2},-8)$ 此二角正切值分別為 $\dfrac{8}{9}$ 和 $\dfrac{8}{3}$。求 $\overline{CD}$ 的距離。

設 C 到 AB 之垂足為 H



$\tan\angle BAC = \dfrac{CH}{AH} = \dfrac{8}{9}$

$\tan\angle ABC = \dfrac{CH}{BH} = \dfrac{8}{3}$

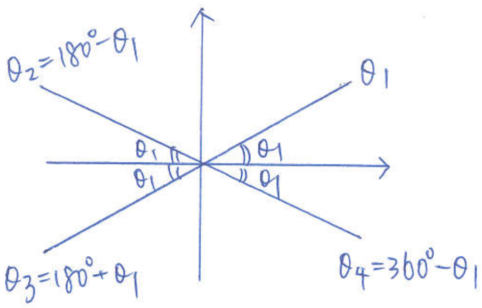
$\therefore \overline{AH} : \overline{BH} = 9:3$，$H(-\frac{5}{2}, 0)$

$\therefore C(\frac{-5}{2}, 4) \Rightarrow \overline{CD} = \sqrt{5^2+12^2} = 13$

EXAMPLE 5

設 θ_1，θ_2，θ_3，θ_4 分別為第一、第二、第三、第四象限角，且都介於 0° 與 360° 之間。已知 $|\cos\theta_1| = |\cos\theta_2| = |\cos\theta_3| = |\cos\theta_4| = \dfrac{1}{3}$，請問下列哪些選項是正確的？

(1) $\theta_1 < 45^\circ$　(2) $\theta_1 + \theta_2 = 180^\circ$　(3) $\cos\theta_3 = -\dfrac{1}{3}$　(4) $\sin\theta_4 = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　(5) $\theta_4 = \theta_3 + 90^\circ$



(1) $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{3} = \cos\theta$

$\therefore 45^\circ < \theta$ (x)

(2) $\theta_2 = 180^\circ - \theta_1 \Rightarrow \theta_1 + \theta_2 = 180^\circ$ (o)

(3) $\cos\theta_3 = -\frac{1}{3}$ (o)

(4) $\sin\theta_4 = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (x)

(5) $\theta_4 = 360^\circ - \theta_1$

$\theta_3 = 180^\circ + \theta_1$

$\Rightarrow \theta_3 + \theta_4 = 540^\circ$ (x)

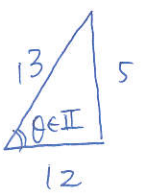
或 $\theta_4 = \theta_3 + 180^\circ - 2\theta_1$

選(2)(3)

EXAMPLE 5

已知 θ 為第二象限角，$\sin\theta = \dfrac{5}{13}$，求下列各值：

(1) $\sin(180^\circ + \theta)$　(2) $\cos(180^\circ - \theta)$　(3) $\tan(-\theta)$



(1) $\sin(180^\circ + \theta) = -\sin\theta = -(\frac{5}{13}) = \frac{-5}{13}$

(2) $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta = -(\frac{-12}{13}) = \frac{12}{13}$

(3) $\tan(-\theta) = -\tan\theta = -(\frac{-5}{12}) = \frac{5}{12}$

EXAMPLE 6

已知 $3\sin\theta + 4\cos\theta = 5$，求 $\sin\theta$ 的值。

$\begin{cases} 3\sin\theta + 4\cos\theta = 5 \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{5-3\sin\theta}{4} \\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{5-3\sin\theta}{4}\right)^2 + \sin^2\theta = 1$

$\Rightarrow 25 - 30\sin\theta + 9\sin^2\theta + 16\sin^2\theta = 16$

$\Rightarrow 25\sin^2\theta - 30\sin\theta + 9 = 0$

$\Rightarrow (5\sin\theta - 3)^2 = 0$，$\sin\theta = \dfrac{3}{5}$

課後練習題

類題 1：

試求下列三角函數的值：

(1) $\sin 210°$ (2) $\cos 765°$ (3) $\tan(-150°)$ (4) $\sin 225°$ (5) $\tan 135°$

Ans：(1) $-\frac{1}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (5) 1

類題 2：

設 $P(x,3)$ 是第二象限角 θ 終邊上一點。已知 $\overline{OP}=5$，求 $\sin\theta+\cos\theta$ 的值。 Ans：$\frac{-1}{5}$

類題 3：

已知 $0°\le x<360°$，求下列各條件的 x 值：

(1) $\sin x=1$ (2) $\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (3) $\tan x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ Ans：(1) $x=0°$ (2) $x=45°$ *or* $315°$ (3) $x=150°$ *or* $330°$

類題 4：

已知 θ 為第四象限角，且 $\cos\theta=\frac{3}{5}$，求下列各式的值：

(1) $\sin\theta$ (2) $\cos(\theta-90°)$ (3) $\tan(180°+\theta)$ Ans：(1) $\frac{-4}{5}$ (2) $\frac{-4}{5}$ (3) $\frac{-4}{3}$

類題 5：

設 θ 為銳角且 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$，試求下列各值：

(1) $\sin\theta\cos\theta$ (2) $\sin\theta+\cos\theta$ (3) $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$ Ans：(1) $\frac{3}{8}$ (2) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ (3) $\frac{8}{3}$

類題 6：

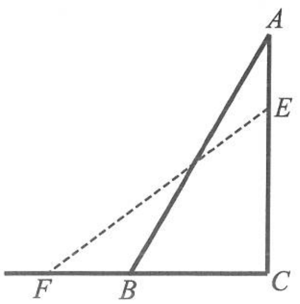
設 θ_1，θ_2，θ_3，θ_4 分別為第一、第二、第三、第四象限角，且都介於 0° 與 360° 之間。已知 $|\sin\theta_1|=|\sin\theta_2|=|\sin\theta_3|=|\sin\theta_4|=\frac{2}{3}$，則下列哪些選項是正確的?

(1) $\theta_1+\theta_2=180°$ (2) $\theta_2+\theta_3=360°$ (3) $\theta_1+\theta_4=360°$ (4) $\sin\theta_2=\frac{2}{3}$ (5) $\cos\theta_3=-\frac{\sqrt{5}}{3}$

Ans：12345

類題 7：

如下圖所示(只是示意圖)，將梯子 $\overline{AB}$ 靠在與地面垂直的牆 AC 上，測得與水平地面的夾角 $\angle ABC$ 為 60°。將在地面上的底 B 沿著地面向外拉 51 公分到點 F (即 $\overline{FB}=51$ 公分)，此時梯子 $\overline{EF}$ 與地面的夾角 $\angle EFC$ 之正弦值為 $\sin\angle EFC=0.6$，求梯子長 $\overline{AB}$。

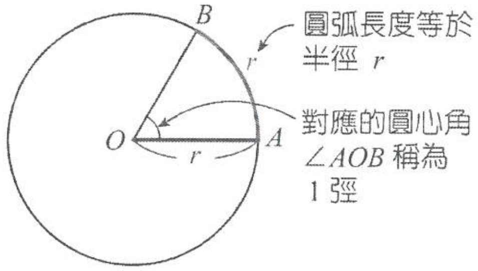


Ans：170

1-2 弧度

1. 弧度量：

在半徑為r，圓心為O的圓周上任取A、B兩點，若AB的弧長為r，則定義弧AB所對應的圓心角$\angle AOB$為 1 弳(或稱 1 弧度)。依此類推，若$CD = 2r$，則其所對應的圓心角$\angle COD$為 2 弳。



2. 弧度量與度度量的轉換：

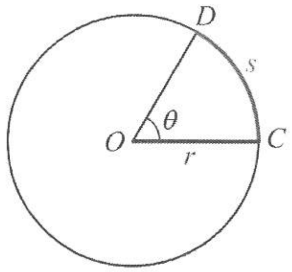
(1) $180° = \pi$ 弧度　　(2) $1° = \dfrac{\pi}{180}$ 弧度　　(3) 1 弧度 $= \dfrac{180°}{\pi} \approx 57°$

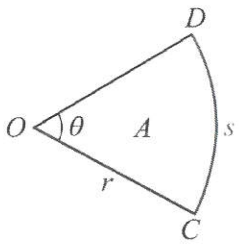
圓周長 $= 2\pi r$，得 2π 弧度是一圈的圓心角，即 2π(弳) $= 360°$.

3. 扇形公式：

已知扇形的中心角為θ，半徑為r，則

(1)扇形弧長 $s =$ $r \cdot \theta$　　(2)扇形面積 $A =$ $\frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \theta$





(1) 圓周長 $= 2\pi r$

$S = 2\pi r \times \dfrac{\theta\ (弳)}{2\pi\ (弳)} = r \cdot \theta$

(2) 圓面積 $= \pi r^2$

$A = \pi r^2 \times \dfrac{\theta}{2\pi} = \frac{1}{2} r^2 \theta$

EXAMPLE 1

試將下表的空格完成（弧度轉換成度度；度度轉換成弧度）

弧度量(弳)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{23}{12}\pi$	$\frac{\pi^2}{180}$	3
度度量(度)	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$225°$	$345°$	$\pi°$	$\left(\frac{540}{\pi}\right)°$

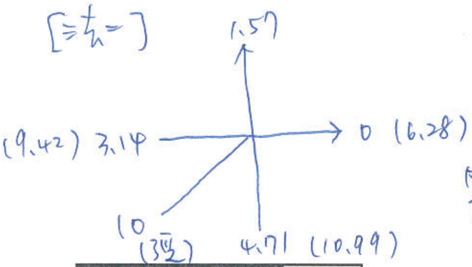
EXAMPLE 2

$a=10$ 弧度，試問 a 是第幾象限角。

[法一] $a=10$ 弳 $\approx 570^\circ$

$\Rightarrow$ 第三象限

[法二]



第三象限

EXAMPLE 3

設 θ 與 -55 弳為同界角，且 $0<\theta<2\pi$，求 θ 的值。

$\dfrac{55}{2\pi} \approx \dfrac{55}{6.28} = 8.\cdots$

$-55+8\times 2\pi < 0$

$-55+9\times 2\pi > 0$

$\therefore \theta = -55+9\times 2\pi = -55+18\pi$

EXAMPLE 4

試求下列三角函數的值：

(1) $\sin\dfrac{3\pi}{2}$ (2) $\cos\dfrac{5\pi}{4}$ (3) $\tan\dfrac{7\pi}{6}$

$=\sin 270^\circ$ $=\cos 225^\circ$ $=\tan 210^\circ$

$=-1$ $=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

EXAMPLE 5

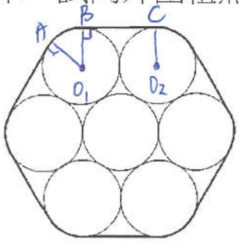
已知一扇形，其半徑為 5 公分，圓心角為 $\dfrac{\pi}{6}$，試求此扇形的弧長和面積。

弧長 $s=r\cdot\theta=5\cdot\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5}{6}\pi$

面積 $A=\dfrac{1}{2}r^2\theta=\dfrac{1}{2}\times 5^2\times\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{25}{12}\pi$

EXAMPLE 6

包裝七根半徑皆為 1 的圓柱，其截面如下圖所示。試問外圍粗黑線條的長度。



弧長 $\overset{\frown}{AB}=r\cdot\theta=1\cdot\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$

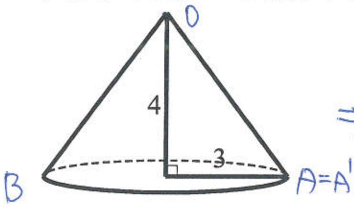
線段 $\overline{BC}=2$

粗黑線條 $=6\times\left(\dfrac{\pi}{6}+2\right)$

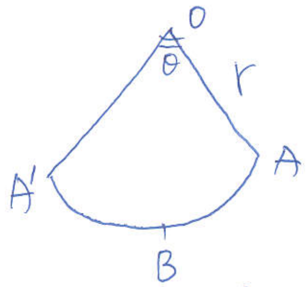
$=\pi+12$

EXAMPLE 7

一直圓錐之底半徑為 3，高為 4，今沿其一斜高剖開成一扇形，求側面的表面積。



$\Rightarrow$



將 OA 剪開的展開圖，如右上。是一扇形。

$\overline{OA}=r=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$\overset{\frown}{ABA'}=$ 底圓周長 $=2\pi\times 3=6\pi$

$5\cdot\theta=6\pi$, $\theta=\dfrac{6}{5}\pi$

扇形面積 $=\dfrac{1}{2}\cdot 5^2\cdot\dfrac{6}{5}\pi=15\pi$

課後練習題

類題 1：

完成下表中度與弳的換算。

度	$0°$		$45°$		$120°$			$180°$	$270°$	
弳	0	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$			2π

Ans：$30°, 90°, 135°, 150°, 360°, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{3\pi}{2}$

類題 2：

選出所有 $-\frac{2\pi}{3}$ 弳的同界角。

(1) $\frac{2\pi}{3}$ 弳　(2) $\frac{4\pi}{3}$ 弳　(3) $-\frac{8\pi}{3}$ 弳　(4) $\frac{10\pi}{3}$ 弳。Ans：234

類題 3：

求 $-\frac{14\pi}{9}$ 弳是第幾象限角。Ans：第一象限

類題 4：

求下列各式的值：

(1) $\cos\frac{\pi}{4}$。　(2) $\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$。　(3) $\tan\frac{4\pi}{3}$。Ans：(1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　(2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　(3) $-\sqrt{3}$

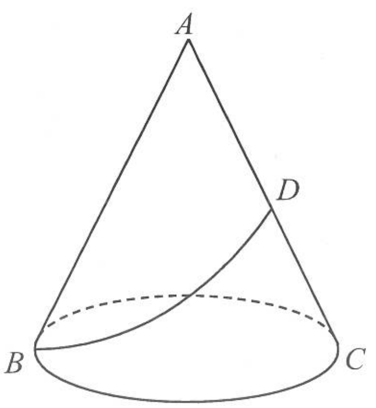
類題 5：

圓半徑為 6，切出一塊扇形，已知扇形周長為圓周長的一半，求此扇形的圓心角。Ans：$\pi-2$

類題 6：

兩條公路 k 及 m，如果筆直延伸將交會於 C 處成 $60°$ 夾角，如圖所示。為銜接此二公路，規劃在兩公路各距 C 處 450 公尺的 A、B 兩點間開拓成圓弧型公路，使 k、m 分別在 A、B 與此圓弧相切，求此圓弧長。(公尺以下四捨五入)

參考數據：$\sqrt{3} \approx 1.732,\ \pi \approx 3.142$



Ans：544

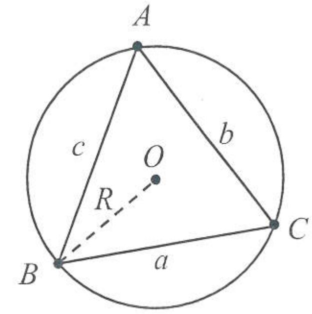
1–3 正弦定理、餘弦定理

1. 正弦定理：使用時機⇒(1) 角多 (2) 一邊及其對角 (3) 與 R 有關

設 a,b,c 分別表示 ΔABC 三內角 $\angle A,\angle B,\angle C$ 的對邊長，

R 為 ΔABC 外接圓半徑，則 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$。

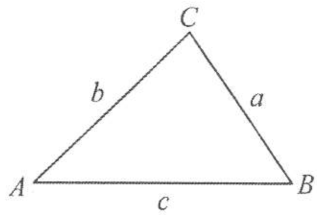
換句話說，$a:b:c=$ $\sin A:\sin B:\sin C$。



2. 餘弦定理：使用時機⇒(1) 邊多 (2) 求角度

設 a,b,c 分別表示 ΔABC 三內角 $\angle A,\angle B,\angle C$ 的對邊長，則

$a^2=$ $b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$ $\Rightarrow \cos A=$ $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$



★三角形的判斷：設 ΔABC 的三邊長 $a\ge b\ge c$，則

$\because a\geq b\geq c$ $\therefore \angle A$ 為最大角

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

(1)若 $a^2=b^2+c^2$，則 ΔABC 為 直角 三角形 $\Leftrightarrow \cos A=0$

(2)若 $a^2>b^2+c^2$，則 ΔABC 為 鈍角 三角形 $\Leftrightarrow \cos A<0$

(3)若 $a^2<b^2+c^2$，則 ΔABC 為 銳角 三角形 $\Leftrightarrow \cos A>0$

3. 三角形面積公式

設 a,b,c 分別表示 ΔABC 三內角 $\angle A,\angle B,\angle C$ 的對邊長，R 為 ΔABC 外接圓半徑，r 為為 ΔABC 內切圓半徑。

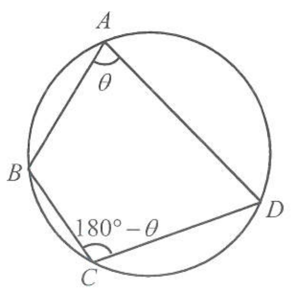
$\Delta ABC=$ $\frac{1}{2}\times$底$\times$高 $=$ $\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin C$ $=$ $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $=$ $\frac{abc}{4R}$ $=$ $r\cdot s$

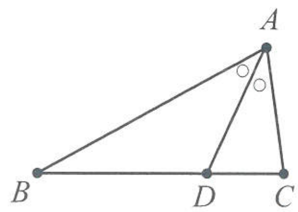
(底、高)　(兩邊一夾角)　(三邊長，$s=\frac{a+b+c}{2}$)　(與 R 有關)　(與 r 有關)

4. 常用的性質

(1)圓內接四邊形⇒ 對角互補

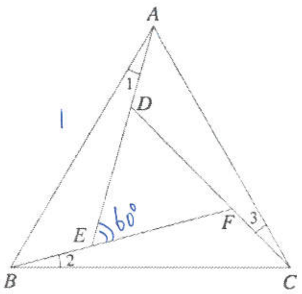
(2)內角平分線⇒ $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$





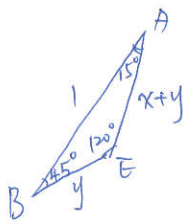
EXAMPLE 1

正三角形 ABC 的邊長為 1，且 $\angle 1=\angle 2=\angle 3=15°$。已知 $\sin 15°=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，求正三角形 DEF 的邊長。



設 △DEF 邊長 x，$\overline{BE}=\overline{AD}=\overline{CF}=y$

考慮 △ABE，



$$\frac{1}{\sin 120°}=\frac{y}{\sin 15°}=\frac{x+y}{\sin 45°}$$

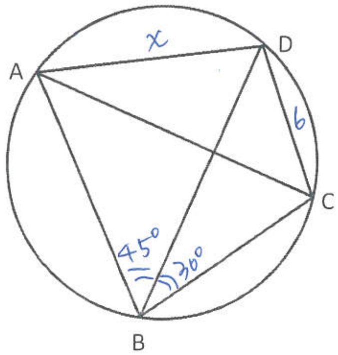
$$\Rightarrow y=1\cdot\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}\times\frac{2}{\sqrt3}=\frac{\frac{\sqrt6-\sqrt2}{2}}{\sqrt3}$$

$$x+y=1\cdot\frac{\sqrt2}{2}\times\frac{2}{\sqrt3}=\frac{\sqrt2}{\sqrt3}$$

$$x=(x+y)-y=\frac{\frac{3\sqrt2-\sqrt6}{2}}{\sqrt3}=\frac{\sqrt6-\sqrt2}{2}$$

EXAMPLE 2

如圖所示，$ABCD$ 為圓內接四邊形。若 $\angle DBC=30°$、$\angle ABD=45°$、$\overline{CD}=6$，求 $\overline{AD}$。



△ABD 和 △CBD 有相同外接圓，設半徑R

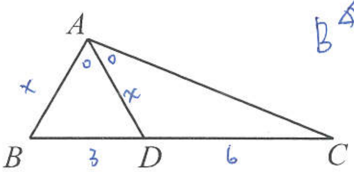
$$\frac{x}{\sin 45°}=2R=\frac{6}{\sin 30°}$$

$$\Rightarrow x=6\times\frac{\sqrt2}{2}\times\frac{2}{1}=6\sqrt2$$

EXAMPLE 3

如下圖，在 ΔABC 中，$\angle BAC$ 的平分線 AD 交對邊 $\overline{BD}$ 於 D。已知 $\overline{BD}=3$，$\overline{DC}=6$，且 $\overline{AB}=\overline{AD}$，求 $\cos\angle BAD$ 的值。

$\Rightarrow \cos B$



∵ $\overline{AD}$ 為角平分線

∴ $\frac{AB}{AC}=\frac{3}{6}$，設 $\overline{AB}=\overline{AD}=x$，則 $\overline{AC}=2x$

△ABD　　　△ABC

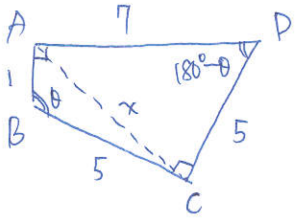
$$\cos B=\frac{x^2+3^2-x^2}{2\cdot x\cdot 3}=\frac{x^2+9^2-(2x)^2}{2\cdot x\cdot 9}$$

$$\Rightarrow 27=81-3x^2$$

EXAMPLE 4

四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=1,\overline{BC}=5,\overline{CD}=5,\overline{DA}=7$ 且 $\angle DAB=\angle BCD=90°$，求 $\overline{AC}$。

設 $\overline{AC}=x$



$$\cos\theta=\frac{1^2+5^2-x^2}{2\cdot1\cdot5}$$

$$\cos(180°-\theta)=\frac{7^2+5^2-x^2}{2\cdot7\cdot5}$$

∵ $\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$

∴ $\frac{74-x^2}{2\cdot7\cdot5}=-\frac{26-x^2}{2\cdot1\cdot5}\Rightarrow 74-x^2=-7(26-x^2)$

$\Rightarrow 8x^2=256$，$x^2=32$，$x=4\sqrt2$

EXAMPLE 5

已知△ABC中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的對邊長為 a、b、c，則下列條件△ABC必為鈍角三角形？

(1) $a^2+b^2<c^2$　　(2) $\sin A=\sin B=\dfrac{1}{3}$

(3) $a:b:c=5:6:7$　　(4) $b=4$，$c=6$，$\angle B=30°$

(5)△ABC的三個高長度為 9、12、15

(1) $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<0$, $\angle C$為鈍角 (o)

(2) 若$\angle A$、$\angle B$均為銳角

$\sin A=\frac{1}{3}<\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin 45°$, ∴$\angle A$、$\angle B$皆小於45°

∴$\angle C$為鈍角 (o)

(3) $\angle C$為最大角 ⇒ $\cos C=\dfrac{5^2+6^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 6}>0$, $\angle C$為銳角(x)

(4) $\dfrac{4}{\sin 30°}=\dfrac{6}{\sin C}$, $\sin C=\frac{3}{4}$. $\angle C$可能是銳角或鈍角(x)

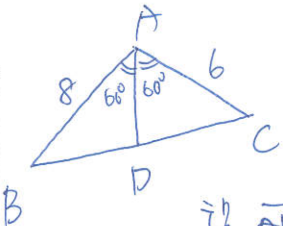
(5) 設三邊長 a,b,c ⇒ △ABC面積 $=\frac{1}{2}\times a\times 9=\frac{1}{2}\times b\times 12=\frac{1}{2}\times c\times 15$. 故 $a:b:c=20:15:12$

$\angle A$為最大角, $\cos A=\dfrac{15^2+12^2-20^2}{2\cdot 15\cdot 12}<0$

∴$\angle A$為鈍角(o). 選(1)(2)(5)

EXAMPLE 6

△ABC中，已知$\overline{AB}=8$，$\overline{AC}=6$，$\angle A=120°$，若$\overline{AD}$為$\angle A$的內角平分線，如圖所示，求$\overline{AD}$。



[題型]

△ABC面積 = △ABD + △ACD

設 $\overline{AD}=x$

△ABC面積 = △ABD + △ACD

$\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 6\cdot\sin 120°=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot x\cdot\sin 60°+\frac{1}{2}\cdot x\cdot 6\cdot\sin 60°$

⇒ $24=7x$, $x=\frac{24}{7}$

EXAMPLE 7

ΔABC的三邊長分別為 6、7、9，試求：

(1) ΔABC的面積

(2) ΔABC的內切圓半徑

(3) ΔABC的外接圓半徑

(1) △ABC 面積 $=\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$,

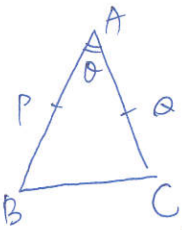
$S=\dfrac{6+7+9}{2}=11$　　$=\sqrt{11\times 5\times 4\times 2}=2\sqrt{110}$

(2) $2\sqrt{110}=r\cdot S$, $r=\dfrac{2\sqrt{110}}{11}$

(3) $2\sqrt{110}=\dfrac{abc}{4R}$, $R=\dfrac{6\times 7\times 9}{4\times 2\sqrt{110}}=\dfrac{189\sqrt{110}}{440}$

EXAMPLE 8

△ABC中，$\overline{AB}=10$，$\overline{AC}=9$，$\cos\angle BAC=\dfrac{3}{8}$，設點$P$、$Q$分別在$\overline{AB}$、$\overline{AC}$上使得△$APQ$的面積為△$ABC$面積的一半，求$\overline{PQ}$的最小值。



設 $\overline{AP}$ 長為 p, $\overline{AQ}$ 長為 q, $\angle BAC=\theta$

△APQ面積 $=\frac{1}{2}\times$△ABC面積

⇒ $\frac{1}{2}\cdot p\cdot q\cdot\sin\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}10\cdot 9\cdot\sin\theta\right)$ ⇒ $pq=45$

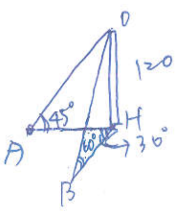
$\overline{PQ}$長為 $\sqrt{p^2+q^2-2pq\cdot\cos\theta}=\sqrt{p^2+q^2-2\times 45\times\frac{3}{8}}$

$=\sqrt{p^2+q^2-\frac{135}{4}}\geq\sqrt{90-\frac{135}{4}}=\sqrt{\frac{225}{4}}=\frac{15}{2}$

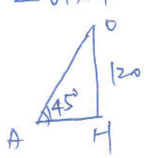
(∵ $\dfrac{p^2+q^2}{2}\geq\sqrt{p^2q^2}$ ⇒ $p^2+q^2\geq 2\times 45=90$)

EXAMPLE 9

一塔高 120 公尺，樹A在塔的正西方，樹B在塔的西30°南。小明從塔的頂端測得樹A底部的俯角為45°，樹B底部的俯角為60°，求兩樹的距離。

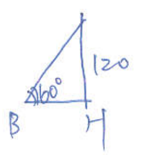


△OAH



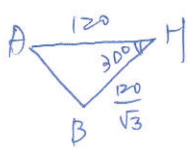
$\overline{AH}=120$

△OBH



$\overline{BH}=\dfrac{120}{\sqrt{3}}$

△AHB



$\overline{AB}=\sqrt{(120)^2+\left(\dfrac{120}{\sqrt{3}}\right)^2-2(120)\left(\dfrac{120}{\sqrt{3}}\right)\cos 30°}$

$=120\sqrt{1+\frac{1}{3}-2\times 1\times\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$=\dfrac{120}{\sqrt{3}}=40\sqrt{3}$

課後練習題

類題 1：

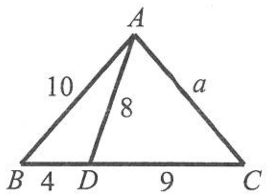
設 D 為 $\triangle ABC$ 中 $\overline{BC}$ 邊上的一點，已知 $\angle ABC = 75°$ 、 $\angle ACB = 45°$ 、 $\angle ADB = 60°$。求 $\overline{BD}:\overline{DC}$ 。

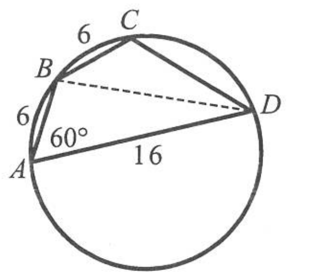
Ans：$2:1$

類題 2：

如下圖所示，在 $\triangle ABC$ 中，D 為 $\overline{BC}$ 邊上一點，且 $\overline{AB}=10$，$\overline{AD}=8$，$\overline{BD}=4$，$\overline{DC}=9$，設 $\overline{AC}=a$，求 a 的值。

Ans：10





類題 3：

設四邊形 $ABCD$ 內接於一圓，如上圖。其中 $\angle A = 60°$ ，$\overline{AB}=\overline{BC}=6$ ，$\overline{AD}=16$ ，求：

(1) $\overline{CD}$ 。 (2)四邊形 $ABCD$ 的面積。

Ans：(1)10 (2)$39\sqrt{3}$

類題 4：

圓內接四邊形 $ABCD$ ，設 $\overline{AB}=5$ ，$\overline{BC}=3$ ，$\overline{CD}=2$ ，$\angle D = 120°$ ，則下列選項哪些是正確的？

(1) $\overline{AD}=3$ (2) $\overline{AC}=3\sqrt{2}$ (3)四邊形 $ABCD$ 的面積為 $\dfrac{21\sqrt{3}}{4}$ (4)此圓的半徑為 $\dfrac{\sqrt{19}}{3}$

(5)此圓的半徑為 $\dfrac{\sqrt{57}}{3}$

Ans：135

類題 5：

$\triangle ABC$ 中，周長為 20，$\angle A = 60°$，其外接圓半徑 R 為 $\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$，求 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑。

Ans：$\sqrt{3}$

類題 6：

下列關於 $\triangle ABC$ 的敘述，哪些選項是正確的？

(1)若 $\cos A = -\dfrac{1}{3}$ ，則 $\triangle ABC$ 為鈍角三角形

(2)若 $\sin A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ，則 $\triangle ABC$ 可能是鈍角三角形

(3)若 $\angle C > 90°$ ，則 $\sin^2 C > \sin^2 A + \sin^2 B$

(4)若 a 、b 、c 分別為 $\angle A$ 、$\angle B$ 、$\angle C$ 的對邊長，且 $a^2 < b^2 + c^2$ ，則 $\triangle ABC$ 為銳角三角形

(5)若 $\sin A : \sin B : \sin C = 2:3:4$ ，則 $\triangle ABC$ 是鈍角三角形

Ans：1235

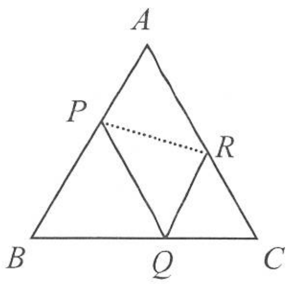
類題 7：

某人在 O 點測量遠處有一物體作等速直線運動，開始的時候，物體的位置在 P 點，一分鐘之後，位置在 Q 點且 $\angle POQ = 90°$。再過一分鐘之後，物體的位置在 R 點，且 $\angle QOR = 30°$，求 $\tan^2(\angle OPQ)$。

Ans：$\dfrac{3}{4}$

類題 8：

在邊長為13的正三角形 ABC 上各邊分別取一點 P,Q,R，使得 $APQR$ 形成一平行四邊形，如下圖所示：若平行四邊形 $APQR$ 的面積為 $20\sqrt{3}$，求線段 PR 的長度。



Ans：7

類題 9：

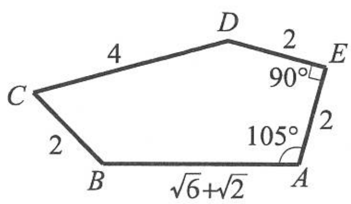
有一個三角形公園，其三頂點為 O、A、B，在頂點 O 處有一座 150 公尺高的觀景台，某人站在觀景台上觀測地面上另兩個頂點 A、B 與 $\overline{AB}$ 的中點 C，測得其俯角分別為 30°、60°、45°。求此三角形公園的面積。

Ans：$7500\sqrt{2}$

類題 10：

最近數學家發現一種新的可以無縫密舖平面的凸五邊形 $ABCDE$，其示意圖如下。關於這五邊形，請選出正確的選項。

(1) $\overline{AD} = 2\sqrt{2}$　(2) $\angle DAB = 45°$　(3) $\overline{BD} = 2\sqrt{6}$　(4) $\angle ABD = 45°$　(5) $\triangle BCD$ 的面積為 $2\sqrt{2}$

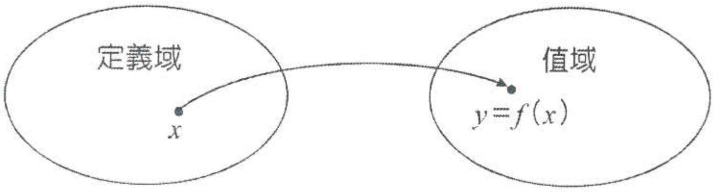


Ans：14

1-4 正弦函數的圖形

1. 函數

　　對於一個函數 $f(x)$ 而言，能讓 $f(x)$ 有意義的所有 x 所成的集合，稱為此函數的定義域；所有 x 所對應的 $f(x)$ 可能的函數值所成的集合，稱為此函數的值域。

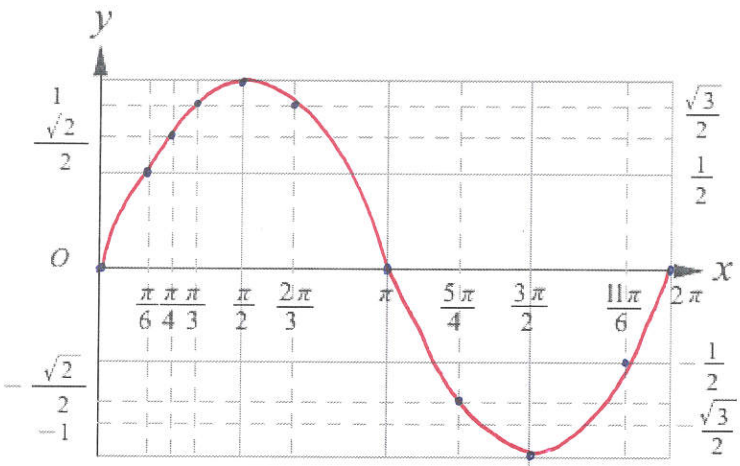


2. 正弦函數的圖形

　　將廣義角 x (弳)對應到正弦值 $\sin x$ 的函數稱為正弦函數，即 $y=f(x)=\sin x$ 。

EXAMPLE 1

試著描繪 $y=\sin x$ 的圖形：在下方標出 $(x,\sin x)$ 的點坐標，並用平滑曲線連起來。



3. 正弦函數圖形的性質

(1)定義域與值域： $y=\sin x$ 的定義域為 $\{x \mid x\in\mathbb{R}\}$ ，值域為 $\{y \mid -1\le y\le 1\}$ 。

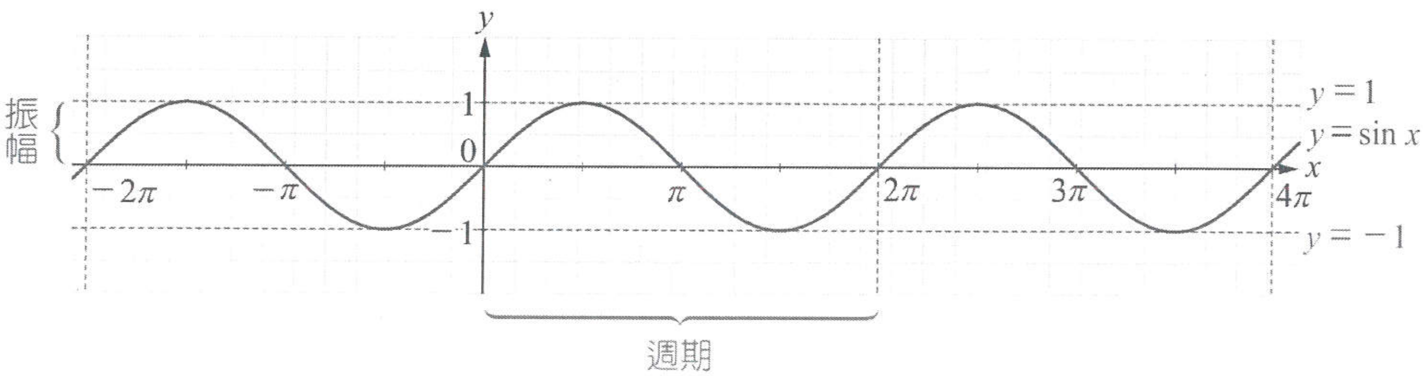
(2)週期： $\sin(x+2\pi)=\sin x$ ，所以 $y=\sin x$ 的週期為 2π 。

(3)振幅：中線(x 軸)上下震盪的大小為 1，所以 $y=\sin x$ 的振幅為 1 。

(4)對稱性

　①點對稱：圖形與 x 軸交點 $(k\pi,0)$ 均為對稱中心， k 為整數。例如： $y=\sin x$ 對稱於原點。

　②線對稱：圖形通過最高或最低點的鉛直線 $x=\dfrac{k\pi}{2}$ ， k 為奇數。例如： $y=\sin x$ 對稱於 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 。

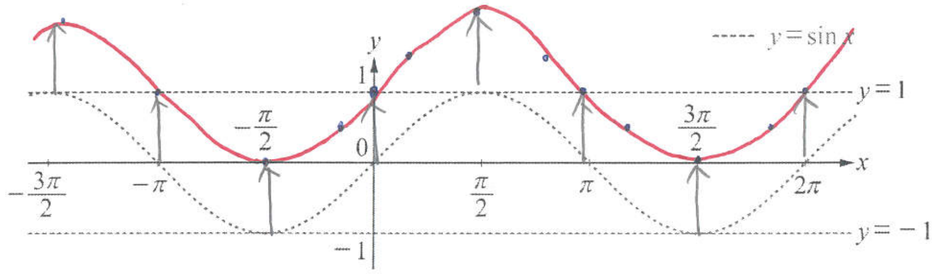


EXAMPLE 2

利用 $y=\sin x$ 的圖形(虛線)，描繪下列各函數的圖形，並觀察圖形變化及週期與振幅。

(1) $y=\sin x+1$　　(2) $y=\sin x-1$　　(3) $y=\sin(x+\dfrac{\pi}{2})$　　(4) $y=\sin(x-\dfrac{\pi}{4})$

(1) $y=\sin x+1$



$y-1=\sin x$

$y=\sin x \to y=\sin x+1$

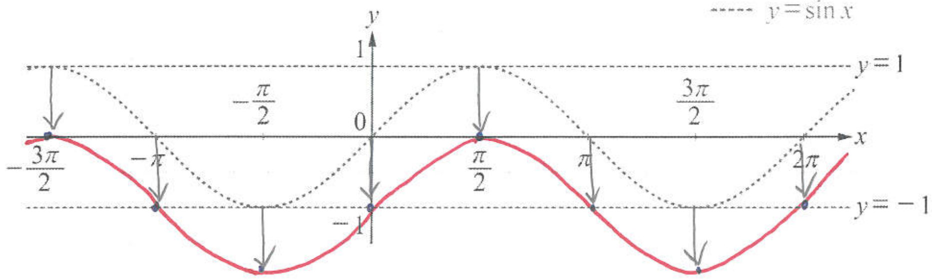
方程式：$(x,y)\to(x,y-1)$

圖形　：$y=\sin x$ 向上移 1 單位

週期　：$2\pi \to 2\pi$

振幅　：$1 \to 1$

(2) $y=\sin x-1$



$y+1=\sin x$

$y=\sin x \to y=\sin x-1$

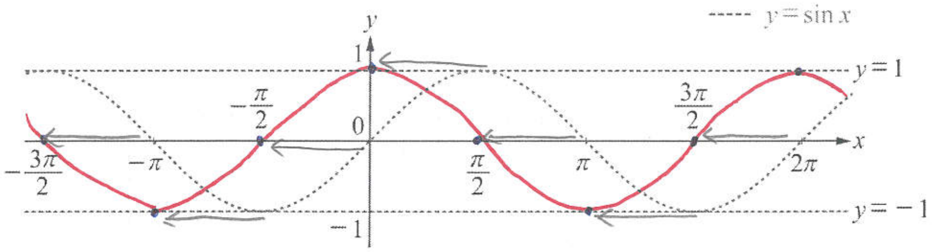
方程式：$(x,y)\to(x,y+1)$

圖形　：$y=\sin x$ 向下移 1 單位

週期　：$2\pi \to 2\pi$

振幅　：$1 \to 1$

(3) $y=\sin(x+\dfrac{\pi}{2})$



$y=\sin x \to y=\sin(x+\dfrac{\pi}{2})$

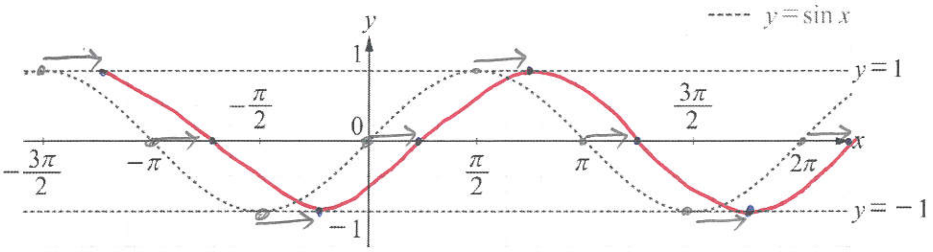
方程式：$(x,y)\to(x+\frac{\pi}{2},y)$

圖形　：$y=\sin x$ 向左移 $\frac{\pi}{2}$ 單位

週期　：$2\pi \to 2\pi$

振幅　：$1 \to 1$

(4) $y=\sin(x-\dfrac{\pi}{4})$



$y=\sin x \to y=\sin(x-\dfrac{\pi}{4})$

方程式：$(x,y)\to(x-\frac{\pi}{4},y)$

圖形　：$y=\sin x$ 向右移 $\frac{\pi}{4}$ 單位

週期　：$2\pi \to 2\pi$

振幅　：$1 \to 1$

4. 函數圖形的平移

(1)水平方向平移：$(x,y)\to(x-h,y)$，如：$y=\sin x \xrightarrow{(x,y)\to(x-h,y)} y=\sin(x-h)$。

當 $h>0$ 表示向右平移 h 單位；當 $h<0$ 表示向左平移 $|h|$ 單位。

(2)鉛直方向平移：$(x,y)\to(x,y-k)$，如：$y=\sin x \xrightarrow{(x,y)\to(x,y-k)} y-k=\sin x$ (即 $y=\sin x+k$)。

當 $h>0$ 時，表示向上平移 h 單位；當 $h<0$ 時，表示向下平移 $|h|$ 單位。

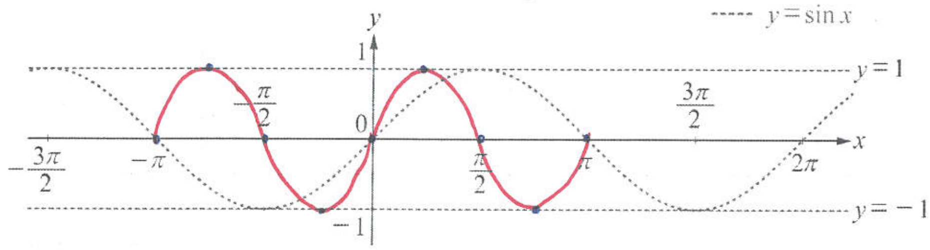
★平移不會改變週期和振幅

EXAMPLE 3

利用 $y=\sin x$ 的圖形(虛線)，描繪下列各函數的圖形，並觀察圖形變化及週期與振幅。

(1) $y=\sin 2x$　　(2) $y=\sin\frac{x}{2}$　　(3) $y=2\sin x$　　(4) $y=\frac{1}{2}\sin x$

(1)　$y=\sin 2x$



$y=\sin x \to y=\sin 2x$

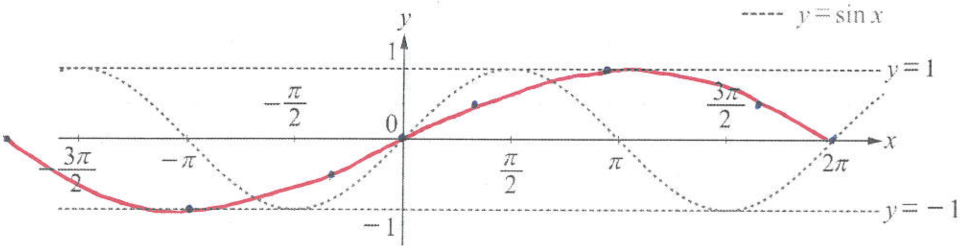
方程式：$(x,y)\to(2x,y)$

圖形　：$y=\sin x$ 水平縮小 $\frac{1}{2}$ 倍

週期　：$2\pi \to \pi$

振幅　：$1 \to 1$

(2)　$y=\sin\frac{x}{2}$



$y=\sin x \to y=\sin\frac{x}{2}$

方程式：$(x,y)\to(\frac{x}{2},y)$

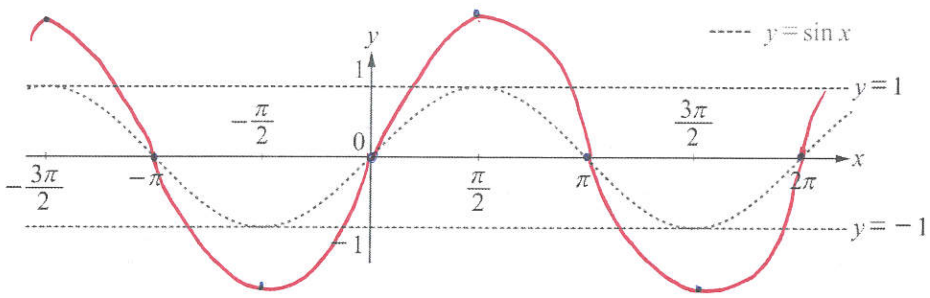
圖形　：$y=\sin x$ 水平放大 2 倍

週期　：$2\pi \to 4\pi$

振幅　：$1 \to 1$

$\frac{y}{2}=\sin x$

(3) $y=2\sin x$



$y=\sin x \to y=2\sin x$

方程式：$(x,y)\to(x,\frac{y}{2})$

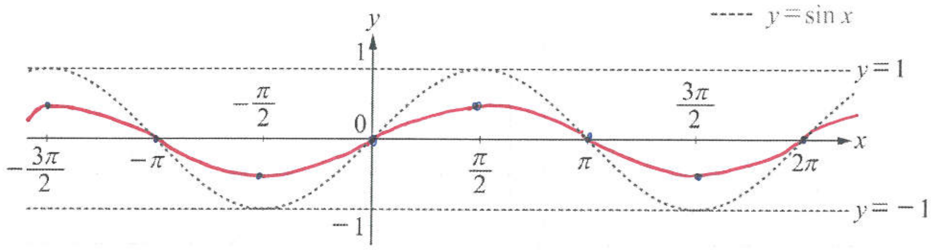
圖形　：$y=\sin x$ 鉛直放大 2 倍

週期　：$2\pi \to 2\pi$

振幅　：$1 \to 2$

$2y=\sin x$

(4) $y=\frac{1}{2}\sin x$



$y=\sin x \to y=\frac{1}{2}\sin x$

方程式：$(x,y)\to(x,2y)$

圖形　：$y=\sin x$ 鉛直縮小 $\frac{1}{2}$ 倍

週期　：$2\pi \to 2\pi$

振幅　：$1 \to \frac{1}{2}$

5.　函數圖形的平移

(1)水平方向伸縮：$(x,y)\to(\frac{x}{a},y)$，週期變為 a 倍。如：$y=\sin x \xrightarrow{(x,y)\to(\frac{x}{a},y)} y=\sin\frac{x}{a}$。

當 $a>1$ 時，表示水平方向放大為 a 倍；當 $0<a<1$ 時，表示水平方向縮短為 a 倍。

(2)鉛直方向伸縮：$(x,y)\to(x,\frac{y}{b})$，振幅變為 b 倍。如：$y=\sin x \xrightarrow{(x,y)\to(x,\frac{y}{b})} \frac{y}{b}=\sin x$ (即 $y=b\sin x$)。

當 $b>1$ 時，表示水平方向放大為 b 倍；當 $0<b<1$ 時，表示水平方向縮短為 b 倍。

6. 函數 $y=a\sin(bx+c)+d$ 的平移伸縮 $\Rightarrow$ 習慣 先伸縮再平移

$$y=\sin x \xrightarrow[\text{鉛直伸縮}a\text{倍}]{(x,y)\to(x,\frac{y}{a})} y=a\sin x \xrightarrow[\text{水平伸縮}\frac{1}{b}\text{倍}]{(x,y)\to(bx,y)} y=a\sin bx$$

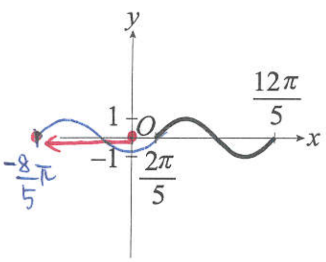
$$\xrightarrow[\text{水平向右位移}\frac{-c}{b}]{(x,y)\to(x+\frac{c}{b},y)} y=a\sin[b(x+\frac{c}{b})] \xrightarrow[\text{鉛直向上位移}d]{(x,y)\to(x,y-d)} y=a\sin(bx+c)+d$$

(1) $y=a\sin(bx+c)+d$ 的週期為 $\frac{2\pi}{b}$

(2) $y=a\sin(bx+c)+d$ 的振幅為 $|a|$

EXAMPLE 4

已知下圖為 $y=\sin(x+h)$ 一個週期的圖形，其中 $0<h<2\pi$，求 h 的值。



$y=\sin x$ 必過 $(0,0)$

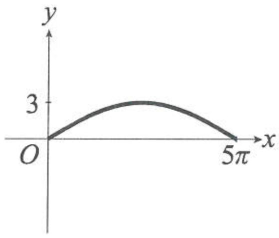
向左移 h 單位得左圖

∵ $0<h<2\pi$,

故 $h=\frac{8}{5}\pi$

EXAMPLE 5

已知右圖為 $y=a\sin bx$ 半個週期的圖形，其中 $a>0$，$b>0$，求 a 與 b 的值。



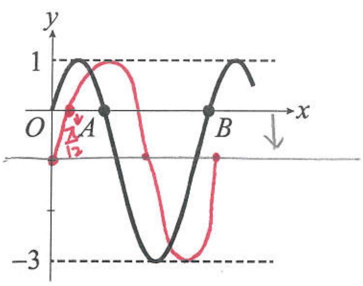
$y=a\sin bx$ 之

振幅為 $a=3$

週期為 $\frac{2\pi}{b}=10\pi$, $b=\frac{1}{5}$

EXAMPLE 6

右圖為函數 $y=a\sin(bx+c)+d$ 的部分圖形，其中 $a>0$，$b>0$，$-\frac{\pi}{2}\le c\le\frac{\pi}{2}$，$A(\frac{\pi}{3},0)$，$B(\pi,0)$，求常數 a，b，c，d 的值。



振幅 $=a=\frac{1-(-3)}{2}=2$

以圖基準線為 $y=-1$

$y=\sin x$ 的基準線為 $y=0$.

∴向下移 1 單位 $\Rightarrow d=-1$

O 到 B 點間的圖形恰為一週期

∴週期 $\frac{2\pi}{b}=\pi$, $b=2$

$y=2\sin 2x-1$ 的圖形如左（紅線）

與 x 軸第一個交點坐標為 $(\frac{\pi}{12},0)$.

$(2\sin 2x-1=0,\ \sin 2x=\frac{1}{2},\ 2x=\frac{\pi}{6},\ x=\frac{\pi}{12})$

故黑線為 $y=2\sin[2(x+\frac{\pi}{12})]-1$

$=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})-1$

∴ $a=2$

$b=2$

$c=\frac{\pi}{6}$

$d=-1$

EXAMPLE 7

有一圓形摩天輪，當摩天輪開始運轉時，小龍恰坐在離地最近的位置上，x 分鐘後，小龍離地的高度 y（公尺）可表為 $y=20\sin\left(\frac{2\pi}{15}x-\frac{\pi}{2}\right)+22$。

(1)小龍離地最高為多少公尺？

(2)摩天輪轉一圈需幾分鐘？

(1) $y=20\sin(\frac{2\pi}{15}x-\frac{\pi}{2})+22$

$\le 20\times1+22=42$

∴離地最高 42 公尺

(2) 週期 $=\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{15}}=15$

∴轉一圈 15 分鐘

EXAMPLE 8

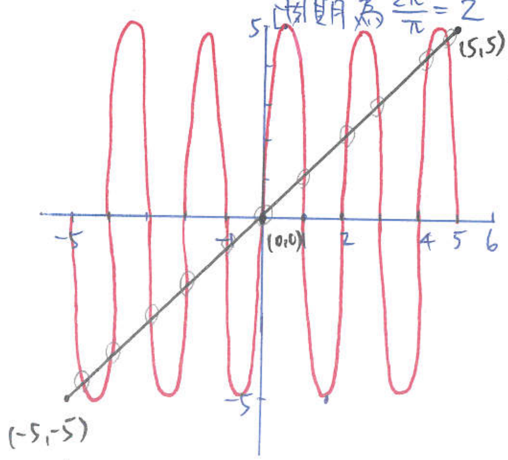
求方程式 $5\sin\pi x-x=0$ 有幾個實數解。

$5\sin\pi x=x$

$\Rightarrow$ 想成 $\begin{cases}y=5\sin\pi x\\ y=x\end{cases}$ 交點數

$y=5\sin\pi x$ 的振幅為 5

週期為 $\frac{2\pi}{\pi}=2$



共 11 個交點

故有 11 個實數解

課後練習題

類題 1：

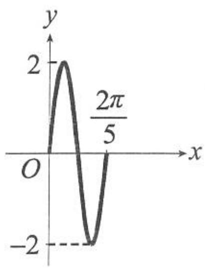
$y=\sin(x+\frac{\pi}{4})$的圖形如何由$y=\sin x$的圖形平移得到？

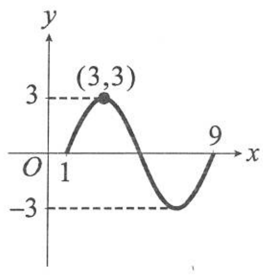
(1)往左平移$\frac{\pi}{4}$單位 (2)往右平移$\frac{\pi}{4}$單位 (3)往左平移$\frac{7\pi}{4}$單位 (4)往右平移$\frac{7\pi}{4}$單位。

類題 2：

已知右圖為$y=a\sin bx$一個週期的圖形，其中$a>0$，$b>0$，求a與b的值。

Ans：$a=2,b=5$





類題 3：

如上圖，函數$y=a\sin(bx+c)$（$a>0$，$b>0$，$|c|<\pi$）一個週期的圖形，求實數a,b,c的值。

Ans：$a=3,b=\frac{\pi}{4},c=\frac{\pi}{4}$

類題 4：

阿南欲觀察月球亮面的比例，遂在某一月(共 30 天)的每天夜晚同一時間拍攝月球照片，並計算月球亮面的比例。最後擬合所得的資料，繪製如右的圖形，並發現可用正弦函數

$y=a\sin(bx-c)+d$(其中$a>0$，$b>0$，$0\le c\le\frac{\pi}{2}$)來描述所觀察的資料。試回答下列問題：

(1)此函數的週期 (2)此函數的振幅 (3)求a, b, c, d的值

Ans：(1)28 (2)$\frac{1}{2}$ (3)$a=\frac{1}{2},b=\frac{\pi}{14},c=\frac{3\pi}{14},d=\frac{1}{2}$

類題 5：

假設小華某段時間的血壓變化可用函數$f(t)=24\sin(100\pi t)+90$來模擬，其中$f(t)$為血壓（單位：毫米汞柱），t為時間（單位：分鐘）。若$f(t)$的最大值稱為收縮壓，而兩個收縮壓的時間間隔為 1 次心跳的時間，求小華的心跳速率為每分鐘幾次。

Ans：50

類題 6：

一物體以彈簧懸掛。已知該物體離平衡點的位移y（公分）與時間x（秒）可用函數

$y=3\sin\left(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$表示，求：(1)彈簧最大的伸長量(位移) (2)往返完成一次振動所需要的時間。

Ans：(1)3 公分 (2)4 秒

類題 7：

求方程式$\sin x=\frac{x}{5}$解的個數。

Ans：3