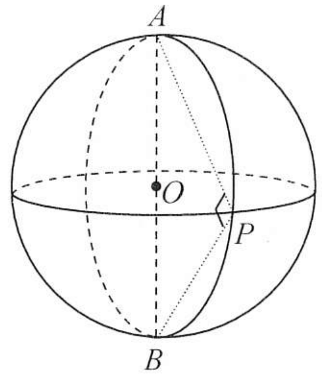
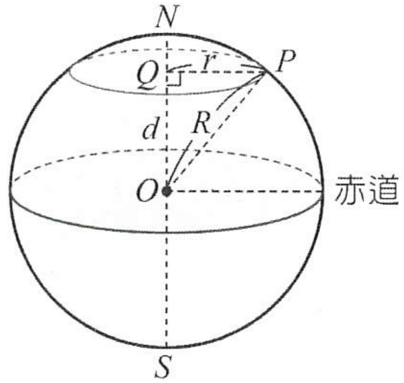
# B-1 球面與經緯線

1. 球面的定義

球上每一點 $P$ 到中心點 $O$ 的距離都等於某一定值。稱此中心點 $O$ 為球心，定值為半徑。




2. 球面與平面的截痕

$O$ 為球心，$R$ 為半徑的球與平面相交時，其截痕為__圓__，且球心在平面的投影點為__圓心__。

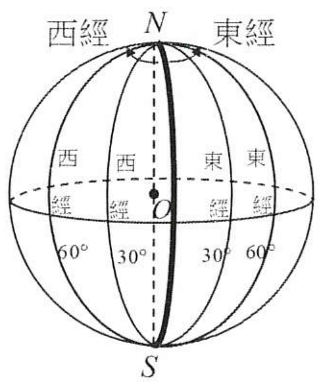
(1)若此平面通過球心時，所截的圓稱為大圓，則大圓半徑為__$R$__。(即為球半徑)

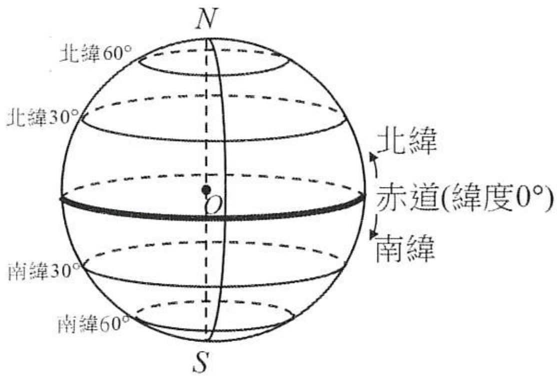
(2)若此平面不通過球心時，所截的圓稱為小圓，如圖所示，則小圓半徑 $r=$ __$\sqrt{R^2-d^2}$__。

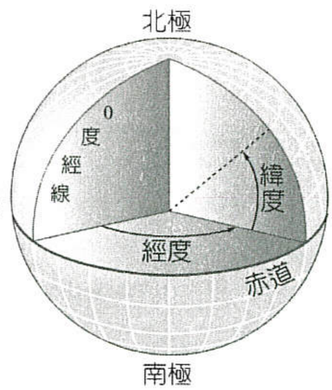
3. 經線

如圖所示，設 $O$ 為圓心，$N,S$ 分別為地球的北極與南極，沿著地表連接 $N,S$ 兩極的大圓上的半圓弧~~段~~ 線，稱為__經線__。我們規定本初子午線為__經度 0 度__，兩側分別為東經及西經。任兩條經線均__等長__。經度就是指該經線所在的平面與本初子午線所在的半平面的夾角度數。

其值範圍為__0度到180度__。




4. 緯線

如圖所示，垂直 $\overline{NS}$ 的平面與球面所交的圓，稱為__緯線__。其中唯一所交出的大圓稱為赤道，規定其為__緯度0度__，上下兩側分別為北緯及南緯。緯度是指緯線上任一點到地心的連線與赤道所在平面的夾角。其值範圍為__0度到90度__。任兩條緯度不同的緯線必__不等長__。

(緯度越大，緯線越__短__)

$\frac{r}{R}=\cos 30^\circ \Rightarrow \frac{北緯30^\circ}{40}=\frac{2\pi r}{2\pi R}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{r}{R}=\cos 20^\circ \Rightarrow \frac{北緯20^\circ,經度20^\circ距}{赤道,經度10^\circ距}=\frac{2\pi r\cdot\frac{40}{360}}{2\pi R\cdot\frac{20}{360}}$

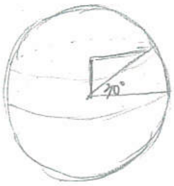
**EXAMPLE 1**

$\Rightarrow 北緯30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 40=20\sqrt{3}$

量測某個地球儀的赤道長為 40 公分，則該地球儀北緯 30 度的緯線長大約多少公分？

($\sqrt{3}\approx 1.732$，四捨五入至整數位)

$R=\frac{40}{2\pi}=\frac{20}{\pi}$



$r=\frac{20}{\pi}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{10\sqrt{3}}{\pi}$

$$\begin{array}{r} 2226 \\ \times 9397 \\ \hline 15582 \\ 20034 \\ 6678 \\ 20034 \\ \hline 20917722 \end{array}$$

r, 60°, R

$\Rightarrow 北緯30^\circ的緯線長=\frac{10\sqrt{3}}{\cancel{\pi}}\times 2\cancel{\pi}$

$=20\sqrt{3}$

$\approx 34.64(cm)$ #

**EXAMPLE 2**

$\Rightarrow \frac{所求}{1113}=2\cos 20^\circ \Rightarrow 所求=1113\times 2\cos 20^\circ \approx 2091.7722$

4

想像地球是一個圓形的球體，已知沿著赤道，經度 10 度間的距離是 1113 公里，那麼沿著北緯 20 度線，經度 20 間的距離最接近下列哪個數值？

2個間隔　4個間隔

(1)1003　(2)1554　(3)1787　(4)2092　(5)2548

($\cos 20^\circ\approx 0.9397$)

$R=1113\times\frac{1}{2\pi}\times\frac{\overset{9}{\cancel{\overset{18}{\cancel{360}}}}}{\cancel{20}}=\frac{10017}{\pi}$

$$\begin{array}{r} 10017 \\ \times 9397 \\ \hline 70119 \\ 90153 \\ 30051 \\ 90153 \\ \hline 94129749 \end{array}$$

$r=\frac{10017}{\pi}\times\cos 20^\circ\approx\frac{9412.975}{\pi}$

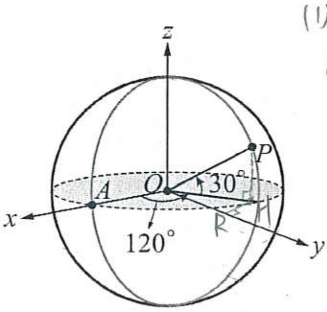
$所求=\frac{\overset{1044.775}{\cancel{9412.975}}}{\cancel{\pi}}\times 2\cancel{\pi}\times\frac{\cancel{40}}{\cancel{360}}=2089.55$

故選(4) #

**EXAMPLE 3**

如圖所示，空間坐標系中，有一個半徑為 1，球心為圓點的球體 $S$，赤道位於 $xy$ 平面上。若 $x$ 軸與赤道交於 $A$ 點，且 $A$ 點落在 0 度經線上。若 $P$ 點位於北緯 30 度與東經 120 度的交點上，$Q$ 點位於南緯 45 度與西經 100 度的交點上，試求：

(1) $P$ 點的直角坐標　(2)若小明、小華同時從 $P$、$Q$ 出發，分別沿著北緯 30 度和南緯 45 度等速向東前進，當小明抵達東經 128 度的時候，小華位在哪條經線上？($\sqrt{6}\approx 2.45$　四捨五入至整數位)




(1) O, P, H, 1, 30°, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow P_z=\overline{PH}=\frac{1}{2}$

O, H, R, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 30°, $\frac{\sqrt{3}}{4}$, $\frac{3}{4}$ $\Rightarrow P_x=-\overline{HR}=-\frac{\sqrt{3}}{4}$, $P_y=\overline{OR}=\frac{3}{4}$

$\therefore P(-\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{2})$ #

(2) $P$: 北30°, 東120° $\xrightarrow{8^\circ}$ 北30°, 東128°

$Q$: 南45°, 西100° $\rightarrow$ 南45°, ?

北緯30°: $r_1=R\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

南緯45°: $r_2=R\cos 45=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$2\pi r_1\cdot\frac{8}{360}=2\pi r_2\cdot\frac{\theta}{360}$

$\theta=\frac{r_1}{r_2}\times 8=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\times 8=4\sqrt{6}\approx 9.8$

$\therefore$ 小華位於西經 $100^\circ-9.8^\circ=90.2^\circ$ #

**EXAMPLE 4**

1.4

有一個半徑為 20 公分的地球儀(視為球體)置於桌上，已知兩條相鄰的整數度緯線間的經線長度稱為的「緯距」，緯距隨緯度改變大致相等；兩條相鄰的整數度經線間的緯線長度稱為的「經距」，經距隨緯度改變而變化，在赤道時最長，請選出正確選項。

(1)該地球儀的緯距約$\frac{\pi}{9}$　(2)北緯 20 度的經距和南緯 70 度的經距約相等

(3)東經 120 度和東經 150 度在北緯 60 度的經距為$\frac{5\sqrt{3}}{3}\pi$　(4)東經 120 度的經線長為$20\pi$

(5)拿一個強力於地球儀的斜上方，對著球心照射，則在桌面上的投影圖形為圓形

✓(1) 一條經線長 $2\pi \overset{20}{R}\times\frac{1}{2}=20\pi$

緯距 $=20\pi\times\frac{1}{180}=\frac{\pi}{9}$

✓(4) 經線長 $2\pi R\times\frac{1}{2}=20\pi$

✗(5) 橢圓

✗(2) $20^\circ N$的半徑: $r_1=20\cos 20^\circ \Rightarrow 經距=\frac{40\cos 20^\circ\pi}{360}$ #

$70^\circ S$ 〃 : $r_2=20\cos 70^\circ \Rightarrow 經距=\frac{40\cos 70^\circ\pi}{360}=\frac{40\sin 70^\circ\pi}{360}$

✗(3) $60^\circ N$ 〃 : $r_3=20\cos 60^\circ=10$

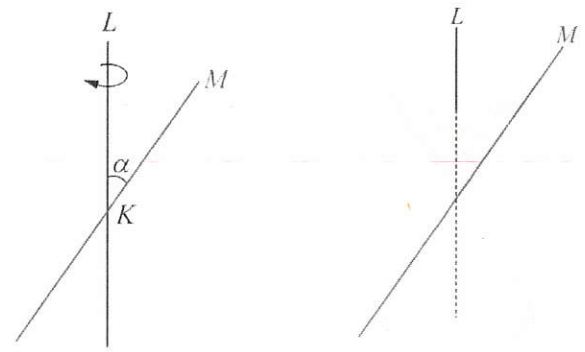
$120^\circ E$和$150^\circ E$的經距 $=\overset{5}{\cancel{20}}\pi\times\frac{\cancel{30}}{\underset{3,12}{\cancel{360}}}=\frac{5}{3}\pi$

故選(1)(4) #

# B-2 圓錐截痕

1. 圓錐曲面

設兩直線 $L,M$ 交於一點 $K$ 且夾角為 $\alpha$，其中 $0° < \alpha < 90°$。將直線 $M$ 繞 $L$ 旋轉一圈，夾角保持不變，則直線 $M$ 旋轉所掃出的曲面稱為圓錐曲面。其中 K 稱為<u>頂點</u>，$L$ 稱為<u>軸</u>，$M$ 稱為<u>母線</u>。




2. 圓錐截痕

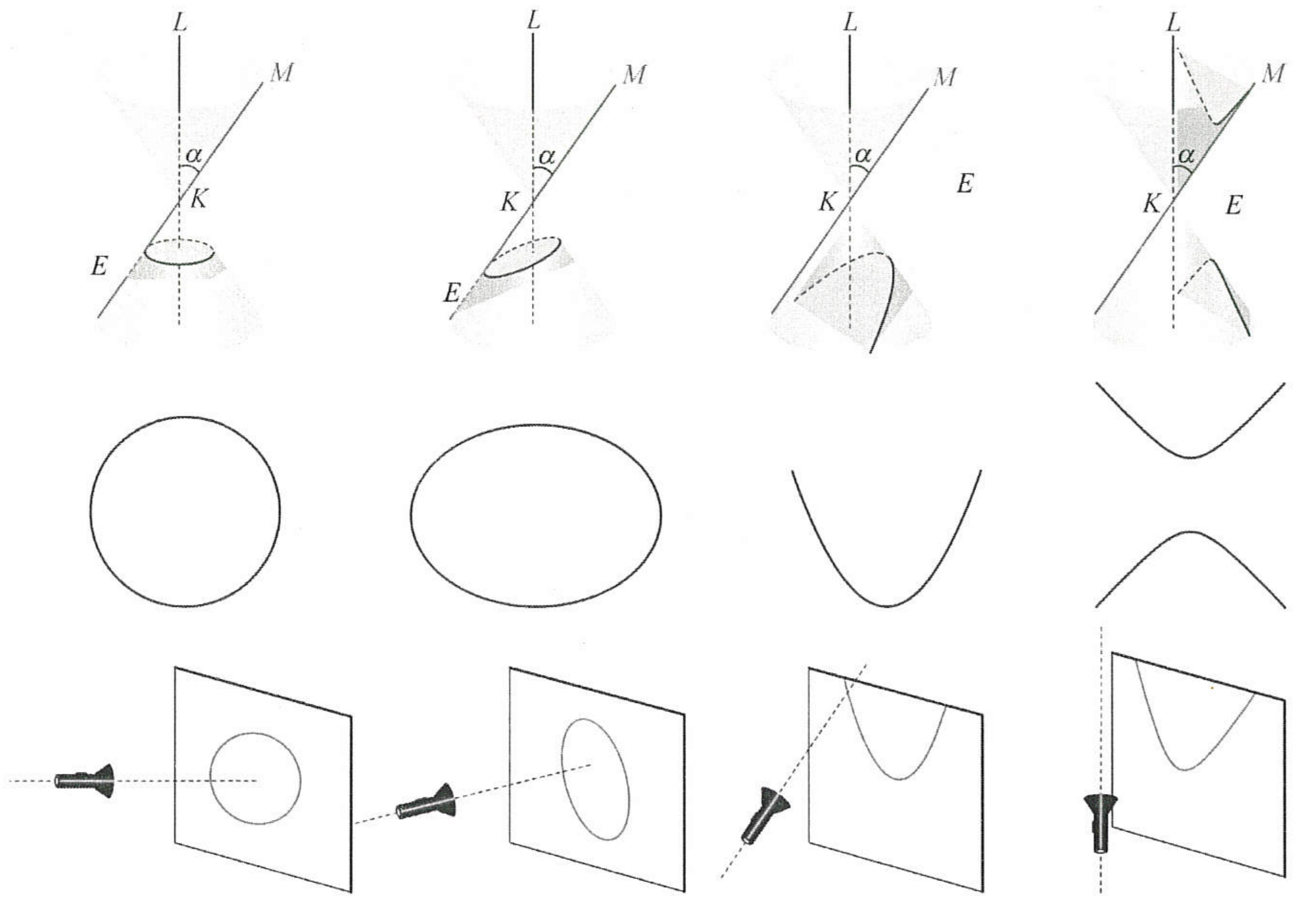
設平面 $E$ 不通過圓錐曲面 $\Gamma$ 的頂點，

(1)當平面 $E$ 與中心軸 $L$ 垂直時，平面 $E$ 在 $\Gamma$ 上的截痕為<u>圓</u>。

(2)當平面 $E$ 傾斜度小於母線 $M$ 時，平面 $E$ 在 $\Gamma$ 上的截痕為<u>橢圓</u>。

(3)當平面 $E$ 與母線 $M$ 平行時，平面 $E$ 在 $\Gamma$ 上的截痕為<u>拋物線</u>。

(4)當平面 $E$ 傾斜度大於母線 $M$ 時，平面 $E$ 在 $\Gamma$ 上的截痕為<u>雙曲線</u>。



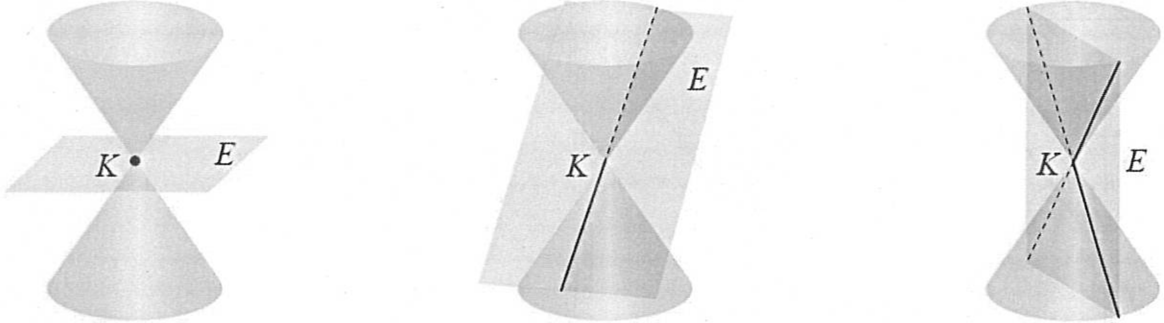
3. 圓錐截痕的退化

設平面 $E$ 通過圓錐曲面 $\Gamma$ 的頂點，

(1)當平面 $E$ 傾斜度小於母線 $M$ 時，平面 $E$ 在 $\Gamma$ 上的截痕為 一點 。

(2)當平面 $E$ 與母線 $M$ 平行時，平面 $E$ 在 $\Gamma$ 上的截痕為 一線 。

(3)當平面 $E$ 傾斜度大於母線 $M$ 時，平面 $E$ 在 $\Gamma$ 上的截痕為 二相交直線 。

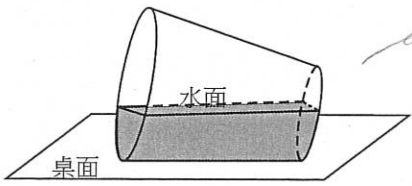



**EXAMPLE 1**

2

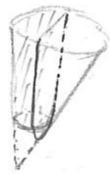
假設某飲料杯封口後為圓錐台的形狀（即上底與下底皆為圓形且下底半徑略小於上底半徑，且過兩圓心的直線同時垂直上底圓與下底圓），如圖一。今將該飲料杯裝半滿的水，在封口後側置於平坦的水平桌面上，如圖二所示。當飲料杯靜止不動時，此時水面與飲料杯側面的截痕為何？（注意：不考慮與兩底面的截痕，只考慮飲料杯側面的截痕。）

圖一



圖二

→ 水面 // 母線

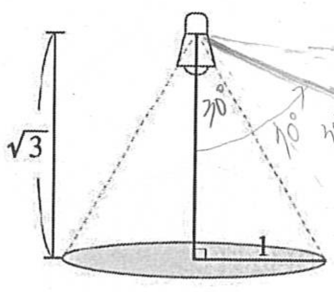


(1)某橢圓的一部分　(2)某拋物線的一部分　(3)某雙曲線的一部分
(4)某兩條平行直線的一部分　(5)某兩條相交直線的一部分

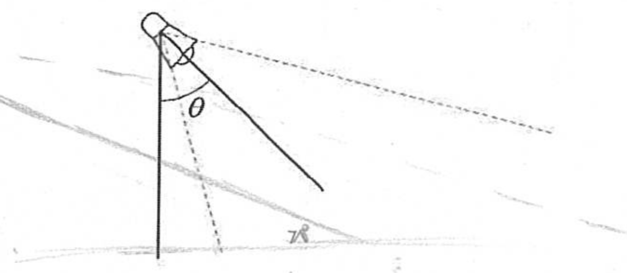
**EXAMPLE 2**

4.

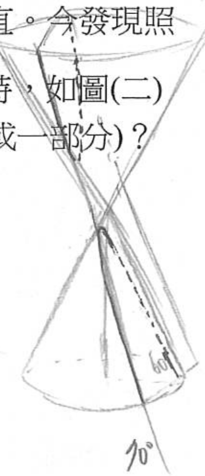
某人家中一盞燈離地 $\sqrt{3}$ 公尺，其照射的燈光形成直圓錐狀，且直圓錐的軸與地板垂直。今發現照在地板的區域形成半徑 1 公尺的圓，如圖(一)所示。已知燈可旋轉，且旋轉角度為 $\theta$ 時，如圖(二)所示。若 $\theta = 70°$ 時，則其地板上照亮區域所形成邊界的圖形為下列哪個選項的圖形(或一部分)？



圖(一)



圖(二)




(1)圓　(2)橢圓　(3)拋物線　(4)雙曲線　(5)無圖形

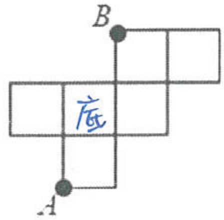
# B-3 立體展開

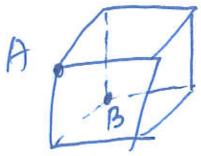
1. 立體展開圖

我們常利用立體展開圖，將立體圖形轉成平面，進而解決問題。

**EXAMPLE 1**

下圖為稜長為 1 的正立方體展開圖，則組合成正立方體時，$\overline{AB}$ 的長度為何？

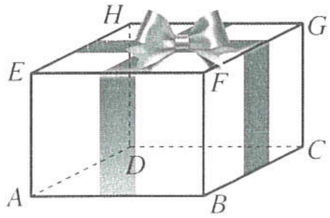


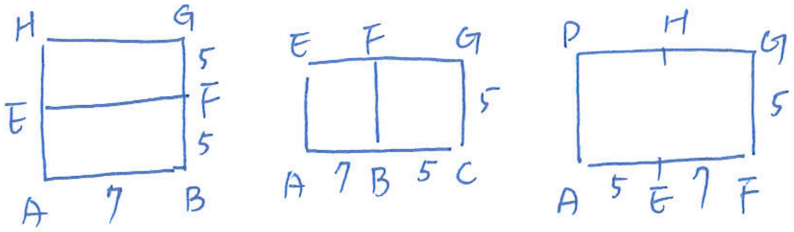




$\overline{AB}=\sqrt{2}$ #

**EXAMPLE 2**

如下圖是一個長方形包裝盒，已知 $\overline{AD}=\overline{AE}=5$，$\overline{EF}=7$，試求有一隻螞蟻在包裝盒表面從 $A$ 點走到 $G$ 點的最短距離。



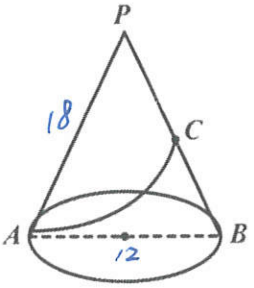




$\sqrt{7^2+10^2}=\sqrt{149}$　　$\sqrt{12^2+5^2}=13$　　$\sqrt{12^2+5^2}=13$

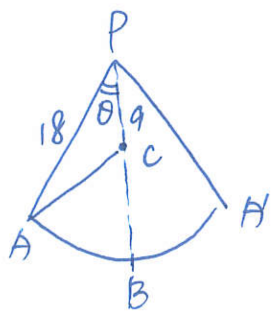
最短距離 $\sqrt{149}$ #

**EXAMPLE 3**

如下圖所示，已知直圓錐底圓直徑 $\overline{AB}=12$，$C$ 為線段 $\overline{PB}$ 的中點，且 $\overline{PA}=18$，試求有一隻螞蟻在直圓錐表面從 $A$ 點走到 $C$ 點的最短距離。




⇒




底圓周長 $=12\pi=\overset{\frown}{AA'}$

$\therefore \overset{\frown}{AB}=6\pi$，$\angle APB=\theta$

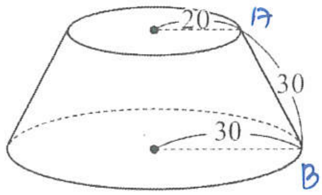
$\Rightarrow 18\cdot\theta=6\pi$，$\theta=\frac{\pi}{3}$

$\overline{AC}=\sqrt{18^2+9^2-2\times18\times9\times\cos\frac{\pi}{3}}$

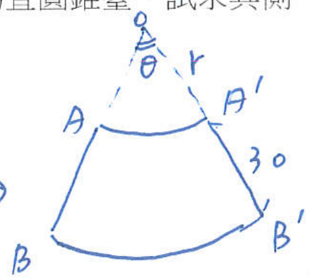
$=9\sqrt{4+1-2}=9\sqrt{3}$ #

**EXAMPLE 4**

下圖為運動會時閱兵站立的直圓錐臺，試求其側面的表面積。




⇒




$\overset{\frown}{AA'}=40\pi$

$\overset{\frown}{BB'}=60\pi$

$\begin{cases} r\theta=40\pi \cdots ① \\ (r+30)\cdot\theta=60\pi \cdots ② \end{cases}$

$\frac{②}{①}$：$\frac{r+30}{r}=\frac{3}{2}$，$2r+60=3r$，$r=60$，$\theta=\frac{2\pi}{3}$

側表面積 $=\frac{1}{2}\cdot90^2\cdot\frac{2\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot60^2\cdot\frac{2\pi}{3}$

$=\frac{\pi}{3}\times4500=1500\pi$

# B-4 其他題型

【型一】七二法則

**EXAMPLE 1**

根據 72 法則可知，若投資年報酬率 $N$%的商品，以複利計算，經過 $\frac{72}{N}$ 年資產可以翻倍。今假設林先生將 100 萬元投資年報酬率 12%的商品，經過 18 年後，100 萬元會變成多少?

(1) 200 萬元　(2) 400 萬元　(3) 600 萬元　(4) 800 萬元

$\frac{72}{12}=6 \Rightarrow 6$ 年翻倍　$100\times 2^{\frac{18}{6}}=800$，選(4)#

【型二】紙張的比例

**EXAMPLE 2**

ISO 定義 $B$ 系列紙張尺寸是編號相同與編號前一號的 $A$ 系列紙張的幾何平均。舉例來說，$B1$ 的長與寬分別是 $A1$ 和 $A0$ 的長與寬的幾何平均，無條件捨去至整數位。已知 $A2$ 紙張的長 594 毫米，寬為 420 毫米，試求 $B3$ 紙張的長約為多少毫米。

(1) 460　(2) 470　(3) 480　(4) 490　(5) 500。

$B_3$ 的長為 $A_2$長和 $A_3$長的幾何平均

又 $A_3$長 $=A_2$寬　∴ $B_3$長 $=\sqrt{594\times 420}=\sqrt{249480}\approx 500$

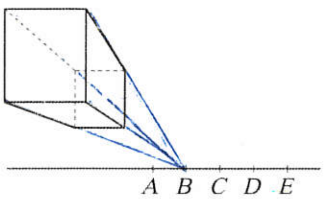
選(5)#

【型三】單點透視

**EXAMPLE 3**

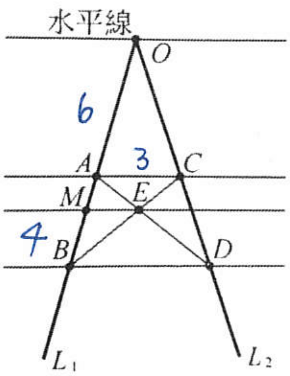
請問附圖正方體的單點透視圖，其消失點會是下圖中哪一點？

(1) $A$　(2) $B$　(3) $C$　(4) $D$　(5) $E$。




**EXAMPLE 4**

在單點透視圖中，消失點 $O$，給定兩平行線 $L_1, L_2$，若 $A, B$ 是直線 $L_1$ 上兩點，過 $A, B$ 分別作直線平行水平線交於 $C, D$ 兩點，連接 $AD$ 和 $BC$ 交於 $E$ 點過 $E$ 點平行水平線交 $AB$ 於 $M$，則 $M$ 是 $\overline{AB}$ 的中點，若 $\overline{OA}=6, \overline{AB}=4, \overline{AC}=3$，求 $\overline{AM}$ 長。




$\frac{\overline{OA}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{OB}}{\overline{BD}} \Rightarrow \overline{BD}=5$

$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{ED}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}=\frac{3}{5}$

$\overline{AM}=\frac{3}{8}\times 4=\frac{3}{2}$

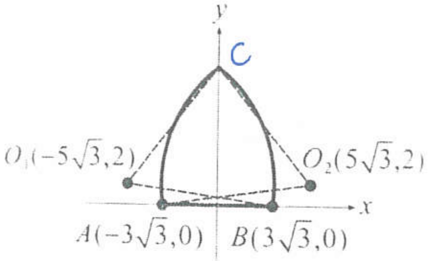
【型三】哥德式建築

**EXAMPLE 5**

哥德式尖拱建築是歐洲常見的建築代表，它是由兩個半徑相等之圓弧所組成。尖拱的一種類型可以用平面坐標上的圖來描述，如圖所示。以 $O_1(-5\sqrt{3},2)$ 與 $O_2(5\sqrt{3},2)$ 為圓心，取相同的半徑畫圓弧 $\overset{\frown}{BC}$ 與 $\overset{\frown}{AC}$，而兩圓弧交於尖點 $C$ 且分別交 $x$ 軸於 $B(3\sqrt{3},0)$ 與 $A(-3\sqrt{3},0)$ 兩點，試求：

(1)兩圓弧半徑　　(2)尖點 $C$ 至尖拱底部 $\overline{AB}$ 的距離(即尖拱建築的高度)

(3)兩圓弧 $\overset{\frown}{BC}$ 與 $\overset{\frown}{AC}$ 的圓心角 $\theta$




(1) $r=\overline{O_1B}=\overline{O_2A}=\sqrt{(8\sqrt{3})^2+2^2}=\sqrt{196}=14$

(2) 設 $C(0,y)$，$\overline{O_1C}=r \Rightarrow \sqrt{(5\sqrt{3})^2+(y-2)^2}=14$，

$75+(y-2)^2=196$，$(y-2)^2=121$，$y-2=\pm 11$，$y=13$ 或 $-9$ (取正)

(3) $\theta=\angle AO_2C=\angle BO_1C$

$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{O_2A}\cdot\overrightarrow{O_2C}}{|\overrightarrow{O_2A}||\overrightarrow{O_2C}|}=\dfrac{(-8\sqrt{3},-2)\cdot(-5\sqrt{3},11)}{14\times 14}=\dfrac{120-22}{14\times 14}=\dfrac{1}{2}$

$\theta=60^\circ$

√【型四】黃金比例

**EXAMPLE 6**

杜拜是阿拉伯聯合大公國人口最多的城市，也是中東地區的經濟和金融中心，而觀光業也是杜拜主要發展的產業之一，在杜拜有許多知名的景點，比如：哈理發塔、杜拜購物中心、帆船飯店…等等，近年來在杜拜又打造世界之最的旅遊新地標：「杜拜相框（The Dubai Frame）」，在 2018 年 1 月落成，其為 50 層樓高，沒有中間形體，以完全中空、四邊鑲金框架面貌示人的超現實建物，為世界上最大的相框。由兩座 150 公尺、50 層樓高的塔樓，頂端由玻璃空橋連接而成的杜拜相框，它的高度以及寬度的比例滿足「黃金比例」（$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$），也成為一個特點。

現有一畫家帶著一名身高為 180 公分的模特兒來到這，想畫出一幅以杜拜相框為相框，模特兒在相框中的畫作。畫家選定了在杜拜相框正前方 60 公尺的地方，以單點透視法作畫，他將畫布放在他面前適當距離的位置後，請模特兒站在他面前 1.2 公尺處，便開始認真作畫了。

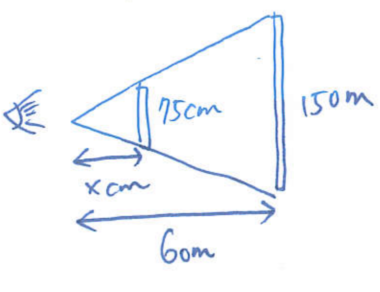
(1)已知杜拜相框高度為 150 公尺，試估算其寬度約為幾公尺。( $\sqrt{5}\approx 2.236$ )

(2)在畫家的畫布中，杜拜相框的高度有 75 公分，估算畫中模特兒的身高約為幾公分。

(答案四捨五入至整數位)

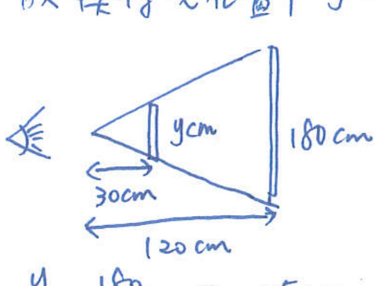
(1) $\dfrac{150}{x}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$x=150\times\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}=75(\sqrt{5}-1)$

(2) 設眼睛離畫布 $x$ cm　，設模特兒在畫中 $y$ cm




$\dfrac{75}{x}=\dfrac{150}{60}$

$x=30$




$\dfrac{y}{30}=\dfrac{180}{120}$，$y=45$ cm