數學 A 考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(2)	(3)	(4)	(2)	(3)	(1)(2)(4)(5)	(2)(3)
8.	9.	10.				
(1)(2)(5)	(4)(5)	(3)				

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (2)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：一維數據分析

解析：某地區目前疫苗「接種人口涵蓋率」為 35 %

$\Rightarrow \dfrac{\text{第一劑疫苗接種人數}}{2400\text{萬}}=35\ \%$

$\Rightarrow$ 第一劑疫苗接種人數$=2400$ 萬$\times 35\ \%$

$=840$ 萬(人)

30 天內達成「接種人口涵蓋率」為 60 %

$\Rightarrow \dfrac{\text{第一劑疫苗接種人數}}{2400\text{萬}}=60\ \%$

$\Rightarrow$ 第一劑疫苗接種人數$=2400$ 萬$\times 60\ \%$

$=1440$ 萬(人)

則平均每天第一劑疫苗接種之施打量為

$\dfrac{1440-840}{30}=\dfrac{600}{30}=20$ 萬劑

故選(2)。

2. (3)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：期望值計算

解析：機率總和為 $\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n}+\dfrac{4}{n}+\dfrac{5}{n}+\dfrac{6}{n}=1\Rightarrow n=21$

k	1	2	3	4	5	6
機率	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$
$7-k$	6	5	4	3	2	1

每投擲 1 次的期望值為

$\dfrac{1}{21}\times 6+\dfrac{2}{21}\times 5+\dfrac{3}{21}\times 4+\dfrac{4}{21}\times 3+\dfrac{5}{21}\times 2+\dfrac{6}{21}\times 1$

$=\dfrac{56}{21}=\dfrac{8}{3}$(張)

連投 3 次的期望值為 $3\times\dfrac{8}{3}=8$(張)

故選(3)。

3. (4)

出處：第三冊〈平面向量〉

目標：面積與二階行列式

解析：$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 兩向量所張成的平行四邊形面積為

$\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AC}\end{vmatrix}\right|=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin 60^\circ$

$=3\times 5\times\sin 60^\circ$

$=\dfrac{15\sqrt{3}}{2}$

$2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$ 兩向量所張成的平行四邊形面積為

$\left|\begin{vmatrix}2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\end{vmatrix}\right| \times(-2) =\left|\begin{vmatrix}7\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\end{vmatrix}\right|$

$=7\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\end{vmatrix}\right| \times 2 =7\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AB}\end{vmatrix}\right|=7\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AC}\end{vmatrix}\right|$

$=7\times\dfrac{15\sqrt{3}}{2}=\dfrac{105\sqrt{3}}{2}$

故選(4)。

〔另解〕

由 $|\overrightarrow{AB}|=3$，$|\overrightarrow{AC}|=5$，$\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 的夾角為 60°

可令 $\overrightarrow{AB}=(3,0)$，$\overrightarrow{AC}=\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

則 $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=\left(\dfrac{27}{2},\dfrac{15\sqrt{3}}{2}\right)$，

$\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=(-2,-5\sqrt{3})$

以坐標數據進行二階行列式運算

故選(4)。

4. (2)

出處：第四冊〈矩陣〉

目標：用乘法反方陣解線性方程組

解析：因為 $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$，且 $\begin{bmatrix}e&f\\g&h\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\7\end{bmatrix}$

所以 $\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e&f\\g&h\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}5&3\\4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix}$

因此 $\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&3\\4&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&\frac{3}{2}\\2&-\frac{5}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{9}{2}\\-\frac{13}{2}\end{bmatrix}$

$\Rightarrow m-n=\dfrac{9}{2}-\left(-\dfrac{13}{2}\right)=11$

故選(2)。

5. (3)

出處：第四冊〈機率〉

目標：獨立事件

解析：每擲一次均勻的硬幣，由三人中的其中 1 人付費與無法分出結果的機率皆為 $\dfrac{1}{4}$

若只擲 1 次硬幣，甲無須付費的機率為 $\dfrac{1}{2}$

若只擲 2 次硬幣，甲無須付費的機率為 $\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$

若擲 3 次硬幣，甲無須付費的機率為 $\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{32}$

故此次用餐甲無須付費的機率為 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{32}=\dfrac{21}{32}$

故選(3)。

二、多選題

6. (1)(2)(4)(5)

出處：第四冊〈空間向量〉、

第四冊〈空間中的平面與直線〉

目標：三元一次聯立方程式、空間向量

解析：(1)○：∵ $\overline{PB}=\overline{PD}=\sqrt{3}$

∴P 點會落在 $\overline{BD}$ 的垂直平分面 $x-y=0$ 上

(2)○：∵$A(0,0,0)$、$B(t,0,0)$、$D(0,t,0)$、$E(0,0,t)$

由 $\overline{PA}=\sqrt{2}$ ，$\overline{PB}=\overline{PD}=\sqrt{3}$ ，$\overline{PE}=1$，可得

$$\begin{cases}a^2+b^2+c^2=2\\(a-t)^2+b^2+c^2=3\\a^2+(b-t)^2+c^2=3\\a^2+b^2+(c-t)^2=1\end{cases}$$

$\Rightarrow a=\dfrac{t^2-1}{2t}$，$b=\dfrac{t^2-1}{2t}$，$c=\dfrac{t^2+1}{2t}$

代入 $a^2+b^2+c^2=2$，得 $t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $\sqrt{3}$

∵ $\overline{AG}=\sqrt{3}t$ 且 $\overline{AG}>\overline{PA}$

∴$t=\sqrt{3}$ 與 $(a,b,c)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

故 $c=2a$

(3)×：正立方體的體積為 $t^3=3\sqrt{3}$

(4)○：$\cos\angle PAB=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{AP}^2-\overline{PB}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{AP}}$

$=\dfrac{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}{2\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

〔另解〕

$\cos\angle PAB=\dfrac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AB}|}$

$=\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)\cdot(\sqrt{3},0,0)}{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

(5)○：∵ $\overline{PB}=\overline{PD}=\sqrt{3}$

∴△PBD 是等腰三角形，且 $\overline{BD}=\sqrt{6}$

P 點與直線 BD 的距離為 P 點與線段 BD 中點的連線段長 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

故選(1)(2)(4)(5)。

7. (2)(3)

出處：第一冊〈數與式〉、第二冊〈數據分析〉、第三冊〈平面向量〉、第四冊〈矩陣〉

目標：乘法公式、算術平均數、標準差、面積與二階行列式、內積

解析：根據矩陣乘法我們得到 $\begin{cases}a+b=12\\c+d=36\\a^2+b^2=74\\ac+bd=212\\c^2+d^2=656\end{cases}$

(1)×：a，b，c，d 的算術平均數為

$\dfrac{a+b+c+d}{4}=\dfrac{12+36}{4}=12$

(2)○：a，b，c，d 的標準差為

$\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}-12^2}=\sqrt{\dfrac{74+656}{4}-144}$

$=\sqrt{\dfrac{77}{2}}$

(3)○：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\Rightarrow 12^2=74+2ab$

$\Rightarrow ab=35$

則 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$=12\times(74-35)=468$

(4)×：$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=ac+bd=212$

(5)×：△OAB 的面積為

$\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}a&-d\\b&c\end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{2}|ac+bd|=106$

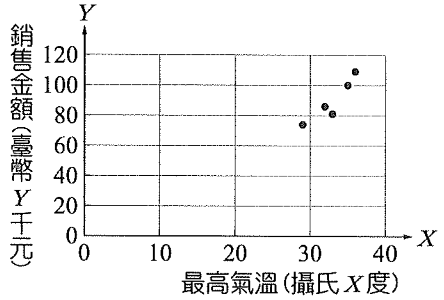
故選(2)(3)。

8. (1)(2)(5)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：二維數據分析

解析：(1)○：利用散布圖判斷，兩組變數呈高度正相關



(2)○：$U=\dfrac{9}{5}X+32$，$V=\dfrac{1}{30}Y$

∵ $\dfrac{9}{5}$ 與 $\dfrac{1}{30}$ 同號 ∴$r_1=r_2$

(3)×：$m_1=r_1\cdot\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}$，$m_2=r_2\cdot\dfrac{\sigma_V}{\sigma_U}$

∵$r_1=r_2$，$\sigma_V=\dfrac{1}{30}\sigma_Y$，$\sigma_U=\dfrac{9}{5}\sigma_X$

∴ $\dfrac{m_2}{m_1}=\dfrac{1}{54}$，故 $m_2<m_1$

(4)×：Y 對 X 的最適直線通過點 $(\mu_X,\mu_Y)=(33,90)$，因此 $(33,81)$ 不在直線上

(5)○：V 對 U 的最適直線通過點 (μ_U,μ_V)，其中

$\mu_U=\dfrac{9}{5}\times33+32=91.4$，$\mu_V=\dfrac{1}{30}\times90=3$

故選(1)(2)(5)。

9. (4)(5)

出處：第四冊〈空間向量〉、第四冊〈空間中的平面與直線〉

目標：空間中兩直線的關係

解析：(1)×：$(3,a,6)\,//\,(2,3,b)$ 時，得 $a=\dfrac{9}{2}$，$b=4$

(2)×：點 $(7,3,8)$ 與點 $(6,4,0)$ 距離為 $\sqrt{66}$

但兩點連線與向量 $(2,3,4)$ 並不垂直

(3)×：此時 L_1 與 L_2 互為歪斜線

(4)○：$(3,6,6)$ 與 $(2,3,2)$ 有一公垂向量 $(2,-2,1)$

則包含 L_1 且與 L_2 平行的平面為 $2x-2y+z=16$

而點 $(6,4,0)$ 與此平面的距離為 4

(5) ○：若正四面體的兩個不相交稜邊分別在 L_1，L_2 上

$\Rightarrow \overrightarrow{\ell_1} \perp \overrightarrow{\ell_2} \Rightarrow \overrightarrow{\ell_1} \cdot \overrightarrow{\ell_2} = 6+3a+6b=0$

$\Rightarrow a+2b=-2$

$|\overrightarrow{\ell_1}|^2+|\overrightarrow{\ell_2}|^2$

$=(\sqrt{3^2+a^2+6^2})^2+(\sqrt{2^2+3^2+b^2})^2$

$=a^2+b^2+58$

已知乘積和求平方和最小 $\Rightarrow$ 利用柯西不等式

$(a^2+b^2)(1^2+2^2) \ge (a+2b)^2=(-2)^2$

$\Rightarrow a^2+b^2 \ge \dfrac{4}{5} \Rightarrow |\overrightarrow{\ell_1}|^2+|\overrightarrow{\ell_2}|^2 \ge \dfrac{4}{5}+58=\dfrac{294}{5}$

故選(4)(5)。

10. (3)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉、第四冊〈機率〉

目標：期望值的計算

解析：(1) ╳：玩一次能獲得獎金，則兩張牌數字和為奇數，即(奇,偶)或(偶,奇)

所求機率為 $\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{12}{25}$

(2) ╳：玩一次獲得獎金的金額與機率如下表

獎金金額	300 元	500 元	700 元	900 元
數字和種類	(1 , 2)，(2 , 1)	(1 , 4)，(4 , 1)，(2 , 3)，(3 , 2)	(2 , 5)，(5 , 2)，(3 , 4)，(4 , 3)	(4 , 5)，(5 , 4)
機率	$\dfrac{2}{25}$	$\dfrac{4}{25}$	$\dfrac{4}{25}$	$\dfrac{2}{25}$

所以玩一次獲得獎金的期望值為

$\dfrac{2}{25}\times300+\dfrac{4}{25}\times500+\dfrac{4}{25}\times700+\dfrac{2}{25}\times900$

$-\dfrac{13}{25}\times600=-24$ (元)

(3) ○：連續玩兩次且最終結算金額大於 0 元，則可能(兩次都獲得獎金)或(一次得 700 元或 900 元另一次賠 600 元)

所求機率為

$\dfrac{12}{25}\times\dfrac{12}{25}+2\times\dfrac{4}{25}\times\dfrac{13}{25}+2\times\dfrac{2}{25}\times\dfrac{13}{25}=\dfrac{12}{25}$

(4) ╳：連續玩兩次且最終結算金額超過 1000 元，則有 (300 , 900)，(500 , 700)，(500 , 900)，(700 , 700)，(700 , 900)，(900 , 900) 六種可能

所求機率為

$2\times\dfrac{2}{25}\times\dfrac{2}{25}+2\times\dfrac{4}{25}\times\dfrac{4}{25}+2\times\dfrac{4}{25}\times\dfrac{2}{25}$

$+\dfrac{4}{25}\times\dfrac{4}{25}+2\times\dfrac{4}{25}\times\dfrac{2}{25}+\dfrac{2}{25}\times\dfrac{2}{25}=\dfrac{92}{625}$

(5) ╳：所求為條件機率，由(3)、(4)的結果得機率為

$\dfrac{\frac{92}{625}}{\frac{12}{25}}=\dfrac{23}{75}$

故選(3)。

三、選填題

11. 60

出處：第三冊〈指數與對數函數〉

目標：對數與科學記號的轉換

解析：因為 $\log x=-7.2219=-8+0.7781$

$=\log 10^{-8}+0.3010+0.4771$

$\approx \log 10^{-8}+\log 2+\log 3=\log(6\times10^{-8})$

所以 $x \approx 6\times10^{-8}=60\times10^{-9}$，因此該病毒的直徑最接近的整數為 60 奈米。

12. $\dfrac{5}{9}$

出處：第三冊〈平面向量〉

目標：向量的線性組合

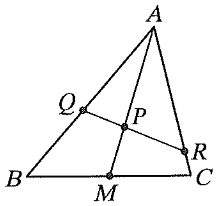
解析：$\because P$ 點為 $\triangle ABC$ 的重心，設 $\overline{BC}$ 的中點為 M

$\therefore \overrightarrow{AP}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$

$=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{a}\overrightarrow{AQ}+\dfrac{2}{3a}\overrightarrow{AR}\right)$

$=\dfrac{1}{3a}\overrightarrow{AQ}+\dfrac{2}{9a}\overrightarrow{AR}$



$\because Q$、P、R 三點共線 $\therefore \dfrac{1}{3a}+\dfrac{2}{9a}=1$

$\Rightarrow \dfrac{5}{9a}=1 \Rightarrow a=\dfrac{5}{9}$。

13. $\dfrac{1}{2}$

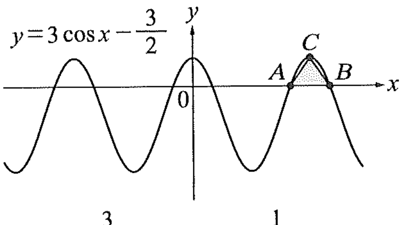
出處：第三冊〈三角函數〉

目標：三角函數的圖形

解析：將 $y=3\cos x-\dfrac{3}{2}$ 的圖形向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 可得

$y=3\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)-\dfrac{3}{2}$ 的圖形，平移後面積不變

故考慮 $y=3\cos x-\dfrac{3}{2}$ 的圖形即可



當 $3\cos x-\dfrac{3}{2}=0 \Rightarrow \cos x=\dfrac{1}{2}$

由上圖可知圖形與 x 軸交於 $A\left(\dfrac{5\pi}{3}, 0\right)$，$B\left(\dfrac{7\pi}{3}, 0\right)$

$y=3\cos x-\dfrac{3}{2}$ 的最大值為 $3-\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$，

$\triangle ABC$ 的面積為 $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\pi}{3}\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}\pi$

故著色三角形的面積為 $\dfrac{1}{2}\pi$。

14. $8+4\sqrt{3}$

出處：第一冊〈數與式〉、第三冊〈三角函數〉

目標：算幾不等式、餘弦定理、三角形面積公式

解析：令 A 點坐標為 $(\sqrt{3}t\,,t)$，B 點坐標為 $(a\,,0)$，t，$a>0$

則 $\overline{OA}=2t$，$\overline{OB}=a$，$\angle AOB=30^\circ$

由餘弦定理得 $16=4t^2+a^2-4at\cos 30^\circ$

$=4t^2+a^2-2\sqrt{3}at$

由算幾不等式可知

$$\frac{4t^2+a^2}{2}\geq\sqrt{4a^2t^2}$$

$\Rightarrow 4t^2+a^2\geq 2\sqrt{4a^2t^2}=4at$

$\Rightarrow 4t^2+a^2-16\geq 4at-16$

因此 $2\sqrt{3}at=4t^2+a^2-16\geq 4at-16$

$\Rightarrow 4at-2\sqrt{3}at\leq 16$

$\Rightarrow at\leq\dfrac{16}{4-2\sqrt{3}}=8(2+\sqrt{3})$

又$\triangle OAB$ 面積為

$\dfrac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}\times\sin\angle AOB$

$=\dfrac{1}{2}\times 2t\times a\times\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}at$

$\leq\dfrac{1}{2}\times 8(2+\sqrt{3})=4(2+\sqrt{3})=8+4\sqrt{3}$

故$\triangle OAB$ 面積的最大值為 $8+4\sqrt{3}$。

15. 100

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：兩平行線距離

解析：設 $(0\,,8)$、$(9\,,2)$、$(6\,,0)$、$(-5\,,4)$ 所在的直線方程式分別為 L_1：$ax+by=c_1$、L_3：$bx-ay=c_3$、L_2：$ax+by=c_2$、L_4：$bx-ay=c_4$

將點代入分別得到 $\begin{cases}8b=c_1\\9b-2a=c_3\\6a=c_2\\-5b-4a=c_4\end{cases}$ ……$(*)$

又正方形的邊長為兩平行線 L_1，L_2 或 L_3，L_4 的距離

令正方形邊長為 ℓ，則

$$\ell=\frac{|c_2-c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|c_4-c_3|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

將$(*)$的值代入得

$$\ell=\frac{|6a-8b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|-2a-14b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$\Rightarrow 4a=-3b$ 或 $2a=11b$

代回 ℓ 得到正方形邊長為 $2\sqrt{5}$ 或 10

故該田地最大面積為 100 平方單位。

〔另解〕

可改設直線方程式為 $mx-y+8=0$、$x+my-9-2m=0$、$mx-y-6m=0$、$x+my+5-4m=0$。

16. $3\sqrt{5}+\dfrac{13}{2}$

出處：第三冊〈三角函數〉

目標：正餘弦函數的疊合

解析：令 $\angle POB=\theta\ (0^\circ<\theta<180^\circ)$

根據餘弦定理 $\overline{PC}=\sqrt{13-12\cos\theta}$

$OCDP$ 面積為$\triangle OPC+\triangle PCD$

$=\dfrac{1}{2}\times 2\times 3\times\sin\theta+\dfrac{1}{2}\times\overline{PC}^2$

$=3\sin\theta+\dfrac{13}{2}-6\cos\theta$

$=3\sqrt{5}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\sin\theta-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\cos\theta\right)+\dfrac{13}{2}$

$=3\sqrt{5}\sin(\theta-\phi)+\dfrac{13}{2}$

其中 $\sin\phi=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\phi=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

故 $OCDP$ 面積的最大值為 $3\sqrt{5}+\dfrac{13}{2}$，

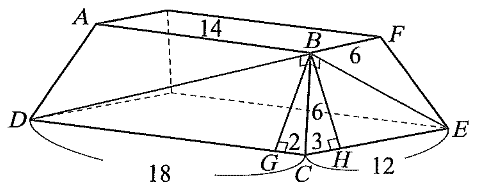
此時 $\theta=90^\circ+\phi$，$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\theta=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$。

17. $\dfrac{\sqrt{6}}{12}$

出處：第四冊〈空間向量〉

目標：兩面角的計算

解析：



如上圖，過 B 作 $\overline{BG}$ 垂直 $\overline{CD}$ 於 G，過 B 作 $\overline{BH}$ 垂直 $\overline{CE}$ 於 H，由等腰梯形得 $\overline{CG}=2$，連 $\overline{BD}$

$\because\triangle BCD\sim\triangle GCB(SAS)$ $\therefore\overline{BD}\perp\overline{BC}$

同理得 $\overline{BE}\perp\overline{BC}$

故平面 $ABCD$ 與平面 $BFEC$ 的兩面角即為$\triangle BDE$ 中的 $\angle DBE$

$\overline{BD}=\sqrt{\overline{CD}^2-\overline{BC}^2}=\sqrt{18^2-6^2}=12\sqrt{2}$

$\overline{BE}=\sqrt{\overline{CE}^2-\overline{BC}^2}=\sqrt{12^2-6^2}=6\sqrt{3}$

$\overline{DE}=\sqrt{\overline{CD}^2+\overline{CE}^2}=\sqrt{18^2+12^2}=6\sqrt{13}$

$$\therefore|\cos\theta|=|\cos\angle DBE|=\left|\frac{\overline{BD}^2+\overline{BE}^2-\overline{DE}^2}{2\times\overline{BD}\times\overline{BE}}\right|$$

$$=\left|\frac{(12\sqrt{2})^2+(6\sqrt{3})^2-(6\sqrt{13})^2}{2\times 12\sqrt{2}\times 6\sqrt{3}}\right|$$

$$=\left|\frac{8+3-13}{2\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{3}}\right|$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{12}\text{。}$$

〔另解〕

由 $\overline{BC}$ 中點 M 作 $\overline{MP}$ 垂直 $\overline{CD}$ 於 P，過 M 作 $\overline{MQ}$ 垂直 $\overline{CE}$ 於 Q，

利用側面等腰梯形邊長比例可得

$\overline{BP}=6\sqrt{2}$，$\overline{CP}=9$，$\overline{BQ}=3\sqrt{3}$，$\overline{CQ}=6$，

且 $\overline{PQ}=3\sqrt{13}$

$$\text{故}|\cos\theta|=\left|\frac{(6\sqrt{2})^2+(3\sqrt{3})^2-(3\sqrt{13})^2}{2\times 6\sqrt{2}\times 3\sqrt{3}}\right|$$

$$=\left|\frac{-18}{36\sqrt{6}}\right|=\frac{\sqrt{6}}{12}\text{。}$$

第貳部分、混合題或非選擇題

18. (1)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：三次函數的圖形

解析：$f(x)$ 的首項係數 $2>0 \Rightarrow$ 圖形的趨勢為右上左下

(1)(3)(5)符合

又 $f(x)$ 的常數項為 5，所以 $y=f(x)$ 的圖形通過 $(0, 5)$

故選(1)。

19. $8x+5$

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：除法原理

解析：$\because f(0)=5$，$f(2)=16+4a-4a+5=21$

令 $f(x)=x(x-2)\,q(x)+mx+n$

$\because f(0)=n=5$

$f(2)=2m+n=21 \Rightarrow m=8$

$\therefore f(x)=x(x-2)\,q(x)+8x+5$

故餘式為 $8x+5$。

〔另解〕

利用長除法

$$\begin{array}{rl} & 2x+(a+4) \\ x^2-2x\,\big) & 2x^3+a\,x^2-2a\,x+5 \\ & 2x^3-4\,x^2 \\ \hline & (a+4)x^2-2a\,x+5 \\ & (a+4)x^2-2(a+4)x \\ \hline & 8\,x+5 \end{array}$$

故餘式為 $8x+5$。

◎評分原則

$\because f(0)=5$，$f(2)=16+4a-4a+5=21$

令 $f(x)=x(x-2)\,q(x)+mx+n$ (2 分)

$\because f(0)=n=5$

$f(2)=2m+n=21 \Rightarrow m=8$ (2 分)

$\therefore f(x)=x(x-2)\,q(x)+8x+5$

故餘式為 $8x+5$。 (2 分)

〔另解〕

利用長除法

$$\begin{array}{rl} & 2x+(a+4) \\ x^2-2x\,\big) & 2x^3+a\,x^2-2a\,x+5 \\ & 2x^3-4\,x^2 \\ \hline & (a+4)x^2-2a\,x+5 \quad (3\text{ 分}) \\ & (a+4)x^2-2(a+4)x \\ \hline & 8\,x+5 \end{array}$$

故餘式為 $8x+5$。 (3 分)

20. 0.9

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：一次近似函數

解析：$y=f(x)$ 的圖形向左平移 1 單位，向下平移 1 單位之後會通過原點

$\Rightarrow y=f(x)$ 的圖形通過 $(1, 1)$

$f(1)=2+a-2a+5=1 \Rightarrow a=6$

$\Rightarrow y=f(x)=2x^3+6x^2-12x+5$

連續利用綜合除法，可得

$f(x)=2(x-1)^3+12(x-1)^2+6(x-1)+1$

故 $g(x)=6(x-1)+1$

則 $g(0.99)=6\cdot(-0.01)+1=0.94\approx 0.9$。

〔另解〕

$y=f(x)$ 的圖形向左平移 1 單位，向下平移 1 單位之後會通過原點

$\Rightarrow y=f(x)$ 的圖形通過 $(1, 1)$

$f(1)=2+a-2a+5=1 \Rightarrow a=6$

$\Rightarrow y=f(x)=2x^3+6x^2-12x+5$

利用微分得 $f'(x)=6x^2+12x-12$

$\therefore f'(1)=6+12-12=6$

則 $y=g(x)=f'(1)(x-1)+f(1)=6(x-1)+1$

故 $g(0.99)=6\cdot(-0.01)+1=0.94\approx 0.9$。

◎評分原則

$y=f(x)$ 的圖形向左平移 1 單位，向下平移 1 單位之後會通過原點

$\Rightarrow y=f(x)$ 的圖形通過 $(1, 1)$

$f(1)=2+a-2a+5=1 \Rightarrow a=6$

$\Rightarrow y=f(x)=2x^3+6x^2-12x+5$ (2 分)

連續利用綜合除法，可得

$f(x)=2(x-1)^3+12(x-1)^2+6(x-1)+1$

故 $g(x)=6(x-1)+1$ (2 分)

則 $g(0.99)=6\cdot(-0.01)+1=0.94\approx 0.9$。 (2 分)

〔另解〕

$y=f(x)$ 的圖形向左平移 1 單位，向下平移 1 單位之後會通過原點

$\Rightarrow y=f(x)$ 的圖形通過 $(1, 1)$

$f(1)=2+a-2a+5=1 \Rightarrow a=6$

$\Rightarrow y=f(x)=2x^3+6x^2-12x+5$ (2 分)

利用微分得 $f'(x)=6x^2+12x-12$

$\therefore f'(1)=6+12-12=6$

則 $y=g(x)=f'(1)(x-1)+f(1)=6(x-1)+1$ (2 分)

故 $g(0.99)=6\cdot(-0.01)+1=0.94\approx 0.9$。 (2 分)