臺北區 103 學年度第一學期第三次學科能力測驗模擬考試

數學考科解析

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	2	4	5	2	34	12	135	134	34	34	124	1	1	3
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
2	3	1	0	0	0	2	5	1	9	2	5	2	6	2

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (1) 3.1415 爲有限小數，必爲有理數

   (2) $1.\bar{3}=\frac{4}{3}$ 爲有理數

   (3) 方程式 $x^2=3$ 的根爲 $\pm\sqrt{3}$ 均爲無理數

   (4) $\sin 15^\circ\times\cos 15^\circ=(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4})\times(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4})=\frac{1}{4}$ 爲有理數

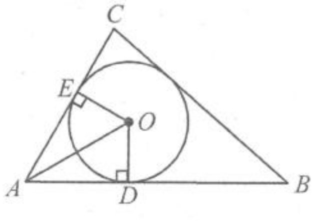
   (5) $(\log_5\frac{5}{2})+(\log_5 10)=\log_5(\frac{5}{2}\times 10)=\log_5 25=2$ 爲有理數

2. $f(x)=ax^2-4ax+b=a(x^2-4x+4)+b-4a$
   $=a(x-2)^2+(b-4a)$
   (i) 因爲 $a<0$，所以 $f(2)=b-4a$ 爲其最大值 12，得 $b-4a=12$
   (ii) 因爲 $y=f(x)$ 的圖形對稱軸爲 $x=2$，故 $f(5)<f(1)$，所以 $f(5)=b+5a$ 爲其最小值 -6，得 $b+5a=-6$
   由(i)、(ii)兩條件解得：$a=-2$、$b=4$

3. 設傑哥購買芝麻肉餅 x 盒、綠豆凸 y 盒、紅豆餡餅 z 盒、蛋黃酥 w 盒
   則 $200x+100y+100z+100w=500$
   $x=0\Rightarrow y+z+w=5\Rightarrow C_5^7=21$
   $x=1\Rightarrow y+z+w=3\Rightarrow C_3^5=10$
   $x=2\Rightarrow y+z+w=1\Rightarrow C_1^3=3$
   $21+10+3=34$ (種)

4. $1-\frac{1}{4}C_1^n+(\frac{1}{4})^2C_2^n-(\frac{1}{4})^3C_3^n+\cdots+(\frac{-1}{4})^nC_n^n=(1-\frac{1}{4})^n$
   $=(\frac{3}{4})^n<\frac{1}{1000}$
   $\Rightarrow\log_{10}(\frac{3}{4})^n<\log_{10}\frac{1}{1000}\Rightarrow n\times(\log 3-2\times\log 2)<-3$
   $\Rightarrow n>\frac{3}{2\times 0.3010-0.4771}\Rightarrow n>24.019\Rightarrow n\geq 25$

5. (1) 因爲 O 爲 ΔABC 的內心，而不是重心
   (2) 如圖，因爲 O 爲 ΔABC 的內心，則 $\angle OAB=\angle OAC$
   又因爲 $\overline{AB}>\overline{AC}$
   故 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}$
   $=\overline{AO}\times\overline{AB}\times\cos\angle OAB$
   $>\overline{AO}\times\overline{AC}\times\cos\angle OAC$
   $=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}$

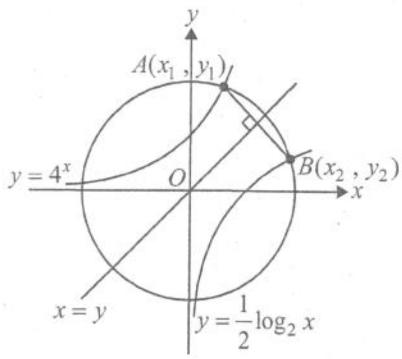


   (3) 因爲 ΔOAD 與 ΔOAE 全等，所以 $\overline{AE}=\overline{AD}$，使得 $\overrightarrow{AO}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的正射影長度與 $\overrightarrow{AO}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的正射影長度相等
   (4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\angle BAC<\overline{AB}\times\overline{AC}$
   (5) 若 $\overrightarrow{AO}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$，則 O 會在 $\overline{BC}$ 上，但 O 在 ΔABC 內部

二、多選題

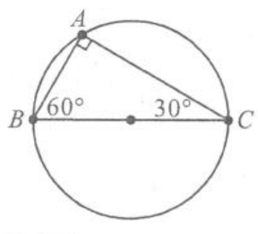
6. (1) 若取實係數多項式函數 $f(x)=(x-5)(x^5-\frac{1}{3})$
   $=x^6-5x^5-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$，$a_0=\frac{5}{3}$，則 5 不能整除 $\frac{5}{3}$
   (2) 若取實係數多項式方程式
   $f(x)=(x-\frac{7}{3})(x-\frac{5}{2})(x^4+x^2+1)=0$，則 $f(2)f(3)>0$，且存在兩個實根 $\frac{7}{3}$ 與 $\frac{5}{2}$ 在 2 和 3 之間
   (3) 若 $a_0=0$，則 $f(x)=x(x^5+a_5x^4+a_4x^3+a_3x^2+a_2x+a_1)=0$ 存在一實根 0
   (4) 因爲實係數多項式方程式，複數根必共軛出現
   故 $f(1+2i)=f(1-2i)=0$
   (5) 若取實係數多項式方程式 $f(x)=(x^4-2x^2-3)(x^2+4)$
   $=(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-i)(x+i)(x-2i)(x+2i)=0$
   則 $f(x)=0$ 並無任何有理根

7. (1) 因爲 A 點在圓上，所以
   $x_1^2+y_1^2=4$
   (4) 因爲
   $y=\frac{1}{2}\log_2 x$
   $=\log_{2^2}x=\log_4 x$
   所以 $y=4^x$ 和 $y=\frac{1}{2}\log_2 x$ 對稱於直線 $x=y$，
   故 $A(x_1,y_1)$ 與 $B(x_2,y_2)$ 滿足：$x_1=y_2$、$x_2=y_1$，則 $x_1+y_1=x_2+y_2$



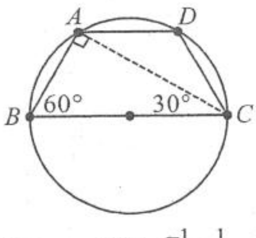
   (5) 直線 AB 必與直線 $y=x$ 垂直，所以直線 AB 的斜率等於 -1
   (2)(3) 由圖可知，$y_1<2$，因爲 $y=4^x$ 爲嚴格遞增函數
   由 $y_1<2$ 知，$y_1=4^{x_1}<2=4^{\frac{1}{2}}$，則 $x_1<\frac{1}{2}$

8. (1) 根據題意可知：



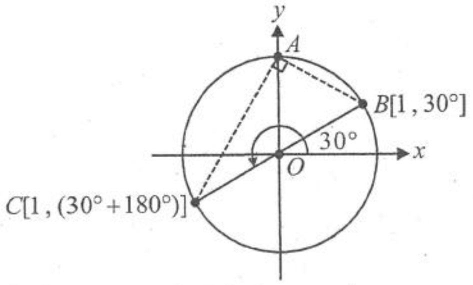
   故 ΔABC 面積 $=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}$
   $=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}\overline{BC})\times\overline{AC}=\frac{1}{4}\times\overline{BC}\times\overline{AC}$

(2) 如圖：



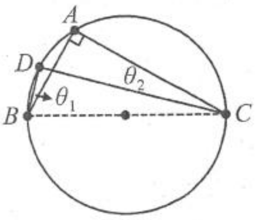
此時 $\cos\angle ADC=\cos120^\circ=\frac{-1}{2}\neq\frac{1}{2}$

(3) 如圖：

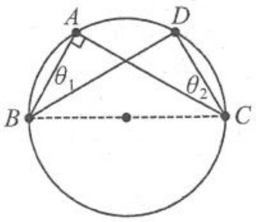


(4)(5) 滿足題意的情形，如下圖(1)(2)(3)：令 $\angle ABD=\theta_1$ 、$\angle ACD=\theta_2$ ，則圖(3)時， $\cos\theta_1=\cos(180^\circ-\theta_2)=-\cos\theta_2$

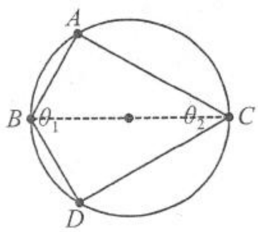
故(4)錯誤。不論圖(1)(2)(3)， $\sin\theta_1=\sin\theta_2$ ，故(5)正確



圖(1)



圖(2)



圖(3)

9. (1) 爲焦點爲 $(-4,1)$ 、準線爲 $x-2=0$ 、頂點爲 $(-1,1)$ 的拋物線

(2) $A(-1,2)$ 與 $B(5,-6)$ 的距離爲 10，所表圖形爲兩射線

(3) 雙曲線的 $a=3$ 、 $b=4$ 、 $c=\sqrt{3^2+4^2}=5$ ，故 $\overline{F_1F_2}=10$

令 $t>0$ ，則 $\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=|t-4t|=3t=2a=6\Rightarrow t=2$

故 $\overline{PF_1}=2$ 、 $\overline{PF_2}=8$ ，則 ΔPF_1F_2 的周長爲 $2+8+10=20$

(4) 雙曲線與橢圓的焦點坐標均爲 $(\sqrt{11},0)$ 與 $(-\sqrt{11},0)$

(5) $x^2-4y^2-2x-16y-19=0\Rightarrow(x-1)^2-4(y+2)^2=4$

則雙曲線的漸近線爲 $(x-1)\pm2(y+2)=0$ ，其斜率爲 $\frac{\pm1}{2}$

10. (1)(2) 方案二加分方式爲非線性，所以標準差與平均數不可直接開根號

(3) $\sigma_y=\frac{3}{2}\sigma_x=13.5$ ， $\sigma_w=\sigma_x=9$ ，故 $\sigma_y>\sigma_w$

(4) $r_{xy}=r_{xw}=1$

(5) y 對 x 的迴歸直線爲 $y=a_{xy}x+b_{xy}$ 中， $a_{xy}=r_{xy}\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$

w 對 x 的迴歸直線爲 $w=a_{xw}x+b_{xw}$ 中， $a_{xw}=r_{xw}\cdot\frac{\sigma_w}{\sigma_x}$

雖然 $r_{xy}=r_{xw}$ ，但 $\sigma_y\neq\sigma_w$ ，故 $a_{xy}\neq a_{xw}$ ，所以兩迴歸直線之斜率不同

11. 通過 $(2,1,-2)$ 與 $(3,2,0)$ 的輸送管直線 L 參數式爲

$$\begin{cases}x=2+t\\ y=1+t\quad(t\in\mathrm{R})\\ z=-2+2t\end{cases}$$

(1) 代入： $(2+t)+(1+t)+2(-2+2t)-5=0$ ，得 $t=1$ ，交於 $(3,2,0)$ 。有交點，不可保留

(2) 代入： $2(2+t)+4(1+t)-3(-2+2t)-14=0$ ，得 $0\times t=0$ ，L 在此平面上。有交點，不可保留

(3) 代入： $(2+t)+(1+t)-(-2+2t)-4=0$ ，得 $0\times t=1$ ，L 與此平面無交點。無交點，可保留

(4) 此直線爲 $\begin{cases}x=k\\ y=k\quad(k\in\mathrm{R})\\ z=1-k\end{cases}$ ，取兩直線 x、y 坐標求交點，

$\begin{cases}k=2+t\\ k=1+t\end{cases}$ 得 $0\times k=1$ 。無交點，可保留

(5) 此直線爲 $\begin{cases}x=3+m\\ y=2+m\quad(m\in\mathrm{R})\\ z=-3-m\end{cases}$ ，取兩直線 x、z 坐標求交點，

$\begin{cases}3+m=2+t\\ -3-m=-2+2t\end{cases}$ 得 $t=0$ ， $m=-1$ ，兩線交於 $(2,1,-2)$ 。有交點，不可保留

12. (1) 根據所給條件可得：

原 後	科南	金田一	不願表態
科南	0.6	0.2	0.4
金田一	0.3	0.5	0.4
不願表態	0.1	0.3	0.2

據前述表格順序，轉移矩陣爲 $\begin{bmatrix}0.6&0.2&0.4\\0.3&0.5&0.4\\0.1&0.3&0.2\end{bmatrix}$

(2)(3) $\begin{bmatrix}0.6&0.2&0.4\\0.3&0.5&0.4\\0.1&0.3&0.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.3\\0.5\\0.2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.36\\0.42\\0.22\end{bmatrix}$

所以，支持科南的民眾上升至 3 成 6；支持金田一的民眾下降至 4 成 2

(4) $\begin{bmatrix}0.6&0.2&0.4\\0.3&0.5&0.4\\0.1&0.3&0.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.6&0.2&0.4\\0.3&0.5&0.4\\0.1&0.3&0.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.3\\0.5\\0.2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}0.6&0.2&0.4\\0.3&0.5&0.4\\0.1&0.3&0.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.36\\0.42\\0.22\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.388\\0.406\\0.206\end{bmatrix}$

所以，支持科南的民眾上升至 3 成 88

(5) 設趨近穩定時，候選人科南的支持度爲 x，候選人金田一的支持度爲 $y(0\le x\le1、0\le y\le1)$ ，不願表態者占 $(1-x-y)$ ，

則 $\begin{bmatrix}0.6&0.2&0.4\\0.3&0.5&0.4\\0.1&0.3&0.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\1-x-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\1-x-y\end{bmatrix}$

解得： $x=0.4$ 、 $y=0.4$ 、 $1-x-y=0.2$ ，故兩位候選人的支持度會相同

第貳部分：選填題

A. $\sqrt{7+\sqrt{48}}=\sqrt{7+2\sqrt{12}}=\sqrt{(\sqrt{4}+\sqrt{3})^2}=2+\sqrt{3}\fallingdotseq3.732$

因爲 $\frac{k}{3}<3.732<\frac{k+1}{3}\Rightarrow k<(3.732\times3)<k+1$

$\Rightarrow k<11.196<k+1$，故取 $k=11$

B. $\overrightarrow{AB}=(2,1)$、$\overrightarrow{AD}=(3,3)$

平行四邊形 $ABCD$ 面積 $=\left|\begin{vmatrix}2&1\\3&3\end{vmatrix}\right|=|6-3|=3$

C. 小明獲勝的狀況有以下三種：

(1) 小明出石頭，小美出剪刀的機率爲 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

(2) 小明出剪刀，小美出布的機率爲 $\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$

(3) 小明出布，小美出石頭的機率爲 $\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$

故所求等於 $\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}=\frac{2}{3}$

D. $a_1=1\Rightarrow A_1=1^2$

$a_2=1+2=3\Rightarrow A_2=3^2$

$a_3=3+3=1+2+3=6\Rightarrow A_3=6^2$

$\vdots$

$a_{10}=1+2+3+\cdots+10=55\Rightarrow A_{10}=55^2$

$s_1=1^2$

$s_2=3^2-1^2=8=2^3$

$s_3=6^2-3^2=27=3^3$

$s_4=10^2-6^2=64=4^3$

$\vdots$

$s_{10}=10^3=1000$

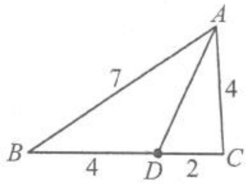
E. 圓心必在 $\overline{AB}$ 的中垂線上，令 $O(2,y)$

利用 $\overline{OA}=\overline{OC}\Rightarrow\sqrt{(2-0)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(2-6)^2+(y-1)^2}$

$\Rightarrow y=-1\Rightarrow$ 圓心 $O(2,-1)$

$d(O,L)=\dfrac{|3\cdot2-4\cdot(-1)-12|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{2}{5}$

F. 根據正弦定理，



$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

$\Rightarrow\dfrac{6}{6}=\dfrac{b}{4}=\dfrac{c}{7}$

$\Rightarrow\overline{AB}=c=7$、$\overline{AC}=b=4$

根據餘弦定理，

$\cos B=\dfrac{7^2+4^2-\overline{AD}^2}{2\times7\times4}=\dfrac{7^2+6^2-4^2}{2\times7\times6}\Rightarrow\overline{AD}=\sqrt{19}$

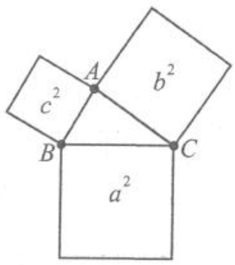
G. 三個正方形面積和爲 100 可知

$a^2+b^2+c^2=100$，

又根據 P 點到各邊的距離可得

ΔABC 的面積爲 $\dfrac{3a+4b+5c}{2}$，

根據柯西不等式可得：



$(a^2+b^2+c^2)(3^2+4^2+5^2)$

$\geq(3a+4b+5c)^2$

$\Rightarrow100\times50\geq(3a+4b+5c)^2$

$\Rightarrow50\sqrt{2}\geq3a+4b+5c>0$

$\Rightarrow25\sqrt{2}\geq\dfrac{3a+4b+5c}{2}>0$

故得 ΔABC 最大面積爲 $25\sqrt{2}$

H. 目標函數 $P(x,y)=1300x+1400y+1900\times(60-x-y)$

$=-600x-500y+114000$

利用直線解交點得：$(2,7)$、$(6,2)$、$(10,0)$

$P(2,7)=-600\times2-500\times7+114000=109300$

$P(6,2)=-600\times6-500\times2+114000=109400$

$\Rightarrow$ 花費的租車費用最多

$P(10,0)=-600\times10+114000=108000$