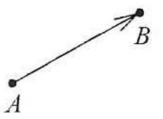
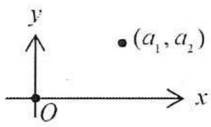
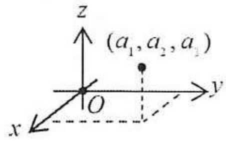
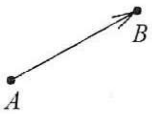
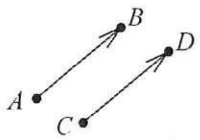
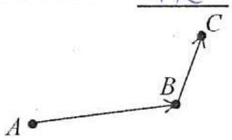
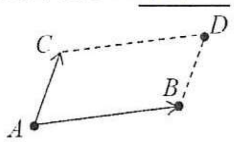
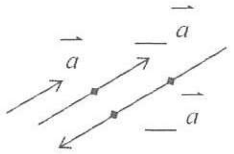
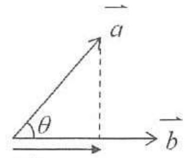
11-1 向量的意義及運算

1. 向量的表示法⇒包含 方向 和 大小

	幾何	平面坐標	空間坐標
表示法	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$	$\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$
圖形			
①方向	從點 A 到點 B 的方向	點 $(0,0)$ 到點 (a_1,a_2) 的方向	點 $(0,0,0)$ 到點 (a_1,a_2,a_3) 的方向
②大小	點 A 到點 B 的距離，以 $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$ 表示	$\lvert\overrightarrow{a}\rvert=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$	$\lvert\overrightarrow{a}\rvert=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

2. 向量的運算

	幾何	平面坐標	空間坐標
定義	$\overrightarrow{AB}$ 	設 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ $\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$	設 $A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$ $\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$
相等	若 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，則 ①方向 相同 ②大小 相等	設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$、$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$ 若 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}$，則 $a_1=b_1$ 且 $a_2=b_2$	設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$、$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 若 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}$，則 $a_1=b_1$, $a_2=b_2$ 且 $a_3=b_3$
加法 (減法)	[三角形法] $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ [平行四邊形] $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ [減法] $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ (O為任意點)	$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2)$ $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2)$	$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$ $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$

	幾何	平面坐標	空間坐標
係數積(平行)		$r\vec{a}=(ra_1,ra_2)$	$r\vec{a}=(ra_1,ra_2,ra_3)$
	$r\vec{a}$ ①方向 平行 ②大小 $\lvert r\rvert$倍 [負號] $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$		
內積	 $\lvert\vec{a}\rvert\cos\theta$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$
	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cdot\cos\theta$ $\lvert\vec{a}\cdot\vec{b}\rvert=$ 投影長×被投影長		$\vec{a}\cdot\vec{b}>0\Leftrightarrow\theta$是銳角 $\vec{a}\cdot\vec{b}<0\Leftrightarrow\theta$是鈍角
分點公式	若 A,P,B 三點共線，且 $\overrightarrow{AP}:\overrightarrow{PB}=m:n$		
	$\overrightarrow{OP}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$	$P(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\frac{ny_1+my_2}{m+n})$	$P(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\frac{ny_1+my_2}{m+n},\frac{nz_1+mz_2}{m+n})$
柯西不等式	$\vec{a}\cdot\vec{b}\le\lvert\vec{a}\rvert\times\lvert\vec{b}\rvert$ "="成立時 $\vec{a}\parallel\vec{b}$	$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\ge(ac+bd)^2$ "="成立時 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$	$(a^2+b^2+c^2)(d^2+e^2+f^2)\ge(ad+bf+ce)^2$ "="成立時 $\frac{a}{d}=\frac{b}{e}=\frac{c}{f}$

A

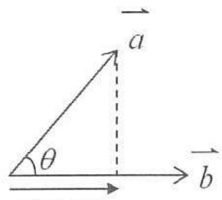
3. 平行與垂直：設 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$、$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$

(1) $\vec{a}\parallel\vec{b}\Rightarrow\vec{a}=t\vec{b}\Rightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$ (2) $\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Rightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$

4. 正射影(長)

(1) $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影長為 $\left|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\right|$。

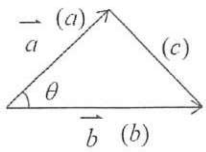
(2) $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影為 $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\cdot\vec{b}$。



5. 求夾角 $\theta\Rightarrow\cos\theta$

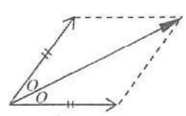
$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

(向量內積⇒坐標表示) (餘弦定理⇒三邊長)



6. 角平分方向向量：等長的向量相加

$\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 之角平分方向向量為 $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$。



EXAMPLE 1

已知 $\overrightarrow{AB}=(4,-3)$、$\overrightarrow{BC}=(8,-15)$，求 ΔABC 周長。

ΔABC 周長 $=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$

$=\sqrt{4^2+(-3)^2}+\sqrt{8^2+(-15)^2}+\sqrt{12^2+(-18)^2}$

$=5+17+6\sqrt{13}=22+6\sqrt{13}$ ※

$\left(\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=(12,-18)\ \right)$

EXAMPLE 2

設 $\overrightarrow{a}=(2,1)$、$\overrightarrow{b}=(1,-2)$、$\overrightarrow{c}=(0,1)$，若

(1) $(t\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})//\overrightarrow{c}$，求 t 值。

(2) $(t\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{c}$，求 t 值。

$t\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(2t+1,t-2)$

(1) $(t\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})//\overrightarrow{c}\Rightarrow\frac{2t+1}{0}=\frac{t-2}{1}\Rightarrow 2t+1=0,\ t=\frac{-1}{2}$

(2) $(t\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{c}\Rightarrow(2t+1,t-2)\cdot(0,1)=0$

$\Rightarrow t-2=0,\ t=2$

EXAMPLE 3

空間中有三點 $A(1,2,3)$、$B(3,0,4)$、$C(2,0,1)$，求：

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 之值

(2) $\cos\angle BAC$

(3) $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的正射影

$\overrightarrow{AB}=(2,-2,1)$, $\overrightarrow{AC}=(1,-2,-2)$

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2+4-2=4$

(2) $\cos\angle BAC=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{4}{3\times3}=\frac{4}{9}$

(3) $\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|^2}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{4}{9}\cdot(1,-2,-2)$

$=\left(\frac{4}{9},\frac{-8}{9},\frac{-8}{9}\right)$

EXAMPLE 4

坐標平面上有四點 $O(0,0)$、$A(-3,-5)$、$B(6,0)$、$C(x,y)$。今有一質點在 O 點沿 $\overrightarrow{AO}$ 方向前進 $\overline{AO}$ 距離後停在 P，再沿 $\overrightarrow{BP}$ 方向前進 $2\overline{BP}$ 距離後停在 Q。假設此質點繼續沿 $\overrightarrow{CQ}$ 方向前進 $3\overline{CQ}$ 距離後回到原點 O，求 (x,y)。

$P=O+\overrightarrow{AO}=(0,0)+(3,5)=(3,5)$

$Q=P+2\overrightarrow{BP}=(3,5)+2(-3,5)=(-3,15)$

$O=Q+3\overrightarrow{CQ}\Rightarrow(0,0)=(-3,15)+3(-3-x,15-y)$

$=(-12-3x,60-3y)$

$(x,y)=(-4,20)$ ※

EXAMPLE 5

設 $|\overrightarrow{a}|=4$、$|\overrightarrow{b}|=10$ 且 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 夾角為 60 度，求 $|2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|$。

Key：看到 $|\overrightarrow{a}|\Rightarrow$ $|\overrightarrow{a}|^2$

$|2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2=4|\overrightarrow{a}|^2+4\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2$

$=4\times4^2+4\times4\times10\times\cos60^\circ+10^2$

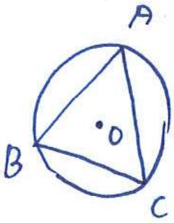
$=64+80+100=244$

$|2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=\sqrt{244}=2\sqrt{61}$

EXAMPLE 6

ΔABC 內接於圓心為 O 的單位圓。若 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\sqrt{3}\,\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$，求 $\angle BAC$ 的度數。

Key：求角度 $\Rightarrow$ $\cos\theta$



$\angle BAC$ 是圓周角、$\angle BOC$ 是圓心角

$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC=75^\circ$

$\cos\angle BOC=\frac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$, $\angle BOC=150^\circ$

$\left(\ \overrightarrow{OB}+\sqrt{3}\,\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}\Rightarrow|\overrightarrow{OB}|^2+2\sqrt{3}\,\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+3|\overrightarrow{OC}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2\right.$

$\left.\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{-3}{2\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}}{2}\ \right)$

EXAMPLE 7

空間中有一四面體 $ABCD$。假設 $\overrightarrow{AD}$ 分別與 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 垂直，請選出正確的選項。

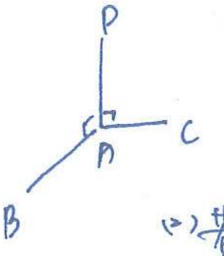
(1) $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DA}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

(2) 若 $\angle BAC$ 是直角，則 $\angle BDC$ 是直角

(3) 若 $\angle BAC$ 是銳角，則 $\angle BDC$ 是銳角

(4) 若 $\angle BAC$ 是鈍角，則 $\angle BDC$ 是鈍角

(5) 若 $\overline{AB}<\overline{DA}$ 且 $\overline{AC}<\overline{DA}$，則 $\angle BDC$ 是銳角



(1) $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC})$

$=|\overrightarrow{DA}|^2+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=|\overrightarrow{DA}|^2+0+0+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ (x)

(2) 若 $\angle BAC$ 是直角，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\Rightarrow\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}>0$，$\angle BDC$ 是銳角。(x)

(3) 若 $\angle BAC$ 是銳角，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0\Rightarrow\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}>0$，$\angle BDC$ 是銳角。(o)

(4) 若 $\angle BAC$ 是鈍角，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<0\Rightarrow\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}$ 可能 $>0, =0, <0$

$\Rightarrow\angle BDC$ 可能銳角、直角、鈍角。(x)

(5) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{AB}\times\overline{AC}\cdot\cos\theta$，$|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}|\le\overline{AB}\times\overline{AC}$

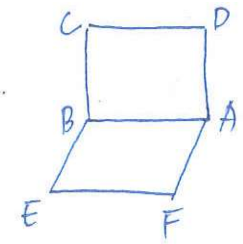
$\therefore|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}|<\overline{DA}\times\overline{DA}$，$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overline{DA}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0$

$\therefore\angle BDC$ 是銳角。(o)

選 (3)(5) #

EXAMPLE 8

空間中，以 $\overline{AB}$ 為共同邊的兩正方形 $ABCD$、$ABEF$，其邊長皆為 4。已知內積 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF}=11$，求 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}$。



$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}$

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF})$

$=|\overrightarrow{AB}|^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF}$

$=16+0+0+11$

$=27$ #

EXAMPLE 9

如圖所示，正立方體 $ABCD-EFGH$ 的稜長等於 2 (即 $\overline{AB}=2$)，K 為正方形 $ABCD$ 的中心，M、N 分別為線段 BF、EF 的中點。試問下列哪些選項是正確的？

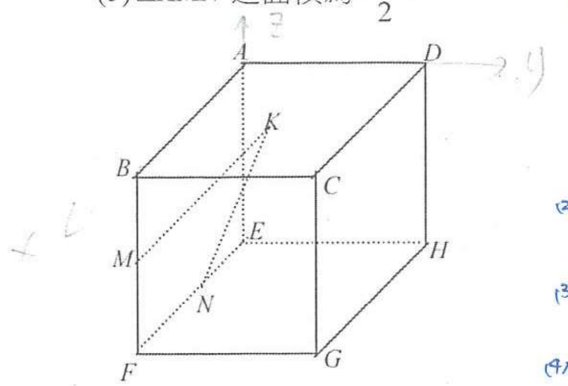
(1) $\overrightarrow{KM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

(2) $\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{AB}=1$

(3) $\overline{KM}=3$

(4) ΔKMN 為一直角三角形

(5) ΔKMN 之面積為 $\frac{\sqrt{10}}{2}$



◎坐標化

設 $A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $D(0,2,0)$, $E(0,0,-2)$

$\Rightarrow C(2,2,0)$, $F(2,0,-2)$, $G(2,2,-2)$, $H(0,2,-2)$

$K(1,1,0)$, $M(2,0,-1)$, $N(1,0,-2)$

(1) $\overrightarrow{KM}=(1,-1,-1)$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(2,0,0)-\frac{1}{2}(0,2,0)+\frac{1}{2}(0,0,-2)$

$=(1,-1,-1)$ (o)

(2) $\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{AB}=(1,-1,-1)\cdot(2,0,0)=2$ (x)

(3) $\overline{KM}=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$ (x)

(4) $\overrightarrow{KM}=(1,-1,-1)$, $\overrightarrow{KN}=(0,-1,-2)$, $\overrightarrow{MN}=(-1,0,-1)$

$\therefore\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{MN}=0$ (o)

(5) $\frac{1}{2}|\overrightarrow{KM}||\overrightarrow{KN}|=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ (x)

選 (1)(4) #

EXAMPLE 10

如圖，以 M 為圓心、$\overline{MA}=8$ 為半徑畫圓，$\overline{AE}$ 為該圓的直徑，B、C、D 三點皆在圓上，且 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}$。若 $\overrightarrow{MD}=8(\cos(\theta+90^\circ),\ \sin(\theta+90^\circ))$。請選出正確的選項。

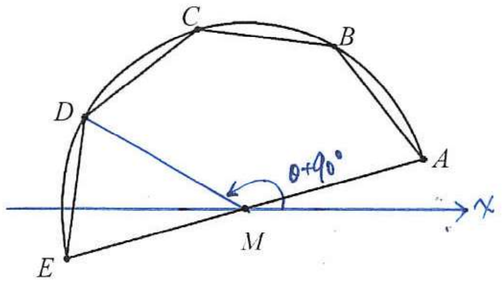
(1) $\overrightarrow{MA}=8(\cos\theta,\ \sin\theta)$

(2) $\overrightarrow{MC}=8(\cos(\theta+45^\circ),\ \sin(\theta+45^\circ))$

(3)（內積）$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA}=8$

(4)（內積）$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=0$

(5) $\overrightarrow{BD}=8(\cos\theta+\cos(\theta+90^\circ),\ \sin\theta+\sin(\theta+90^\circ))$



$\overrightarrow{MD}=8(\cos(\theta+90^\circ), \sin(\theta+90^\circ))$

∴ 可想成 $|\overrightarrow{MD}|=8$，與 x 軸之夾角為 $\theta+90^\circ$

(1) $\overrightarrow{MA}$ 與 x 軸之夾角為 $\theta+90^\circ-135^\circ=\theta-45^\circ$

∴ $\overrightarrow{MA}=8(\cos(\theta-45^\circ), \sin(\theta-45^\circ))$ (×)

(2) $\overrightarrow{MC}$ 與 x 軸之夾角為 $\theta+90^\circ-45^\circ=\theta+45^\circ$

∴ $\overrightarrow{MC}=8(\cos(\theta+45^\circ), \sin(\theta+45^\circ))$ (○)

(3) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA}=|\overrightarrow{MA}|^2=8^2=64$ (×)

(4) $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=8\cdot 8\cdot\cos 90^\circ=0$ (○)

(5) $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MB}$

$=8(\cos\theta,\sin\theta)-8(\cos(\theta+90^\circ),\sin(\theta+90^\circ))$

$=8(\cos\theta-\cos(\theta+90^\circ),\ \sin\theta-\sin(\theta+90^\circ))$ (×)

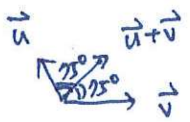
選 (2)(4) #

EXAMPLE 11

設 $\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$ 為兩個長度皆為 1 的向量。若 $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ 與 $\overrightarrow{u}$ 的夾角為 75°，求 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 的內積值。

Key：看到 $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ ⇒ 等長向量相加

⇒ 角平分方向



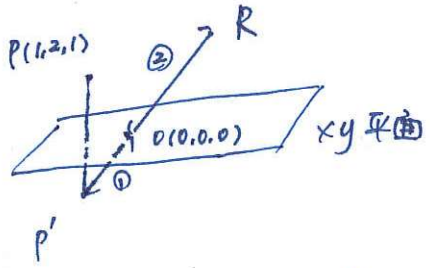
∴ $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ 之夾角為 150°

$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\cdot\cos 150^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ #

EXAMPLE 12

在空間坐標中，設 xy 平面為一鏡面。有一光線通過點 $P(1,2,1)$，射向鏡面上的點 $O(0,0,0)$，經鏡面反射後通過點 R。若 $\overline{OR}=2\overline{PO}$，求 R 點坐標。

Key：反射 ⇒ 對稱



P 對 xy 平面之對稱點 $P'(1,2,-1)$

$\overrightarrow{OR}=2\overrightarrow{P'O}=2(-1,-2,1)=(-2,-4,2)$

∴ $R(-2,4,2)$ #

A

EXAMPLE 13

設 $2x^2+3y^2=20$，求 $2x+3y$ 的最大值，並求出此時的 x, y 值。

Key：求最大最小值

①配方法⇒使用時機：<u>二次函數</u>

②算幾不等法⇒使用時機：<u>相加相乘</u>

③柯西不等式⇒使用時機：<u>相加相加</u>

$$\underbrace{(2x^2+3y^2)}_{(\sqrt{2}x)^2+(\sqrt{3}y)^2}\left((\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2\right) \geq (2x+3y)^2$$

$$20\times 5 \geq (2x+3y)^2$$

$$-10 \leq 2x+3y \leq 10,\quad M=10$$

"=" 成立 $\dfrac{\sqrt{2}x}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}y}{\sqrt{3}}=t,\quad x=y=t$

$$\xRightarrow{\text{代入 } 2x+3y=10} 2t+3t=10,\ t=2$$

$$(x,y)=(2,2)$$

EXAMPLE 14

設 x, y, z 均為正數，且 $x+y+z=1$，求 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{9}{z}$ 的最小值，並求出此時的 x, y, z 值。

$$(\sqrt{x}^2+\sqrt{y}^2+\sqrt{z}^2)\left(\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{y}}\right)^2+\left(\frac{3}{\sqrt{z}}\right)^2\right) \geq (1+2+3)^2$$

$$1\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}\right) \geq 36$$

$\therefore min=36$

"=" 成立

$$\frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt{y}}{\frac{2}{\sqrt{y}}}=\frac{\sqrt{z}}{\frac{3}{\sqrt{z}}}=t$$

$$x=t,\ y=2t,\ z=3t$$

$$\xRightarrow{\text{代入 } x+y+z=1} t+2t+3t=1,\quad t=\frac{1}{6}$$

$$(x,y,z)=\left(\frac{1}{6},\frac{2}{6},\frac{3}{6}\right)$$

EXAMPLE 15

設 $P(x, y)$ 為直線 $L: 4x+3y+5=0$ 上的動點，求 $(x+1)^2+(y-3)^2$ 的最小值。

[法一]

$$\left[(x+1)^2+(y-3)^2\right](4^2+3^2) \geq (\underbrace{4x+3y-5}_{4(x+1)+3(y-3)})^2$$

$$\Rightarrow (x+1)^2+(y-3)^2 \geq \frac{(-10)^2}{25}=4$$

[法二] $(x+1)^2+(y-3)^2$ 想成 (x,y) 到 $(-1,3)$ 的距離，再平方.

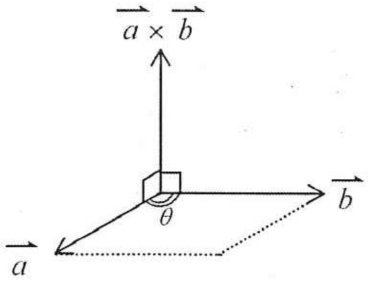
最小距離即為點到直線距 $=\dfrac{|-4+9+5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{10}{5}=2$

$\therefore (x+1)^2+(y-3)^2$ 最小值為 $2^2=4$.

A

11-2 空間向量的外積

1. 外積的幾何表示法：



空間中兩向量 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 的外積是<u>向量</u>，記作 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 。

(1)方向： $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 的公垂向量且符合右手規則。

亦即且 $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{a}$ 、 $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{b}$ 。

(2)大小： $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 所張成的平行四邊形面積。

$|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=$ <u>$|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cdot\sin\theta$</u> 。

2. 外積的坐標表示法：

設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 、 $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$ ，

則 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=$ <u>$\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)$</u> 。

<<記法>>去頭去尾

$$\begin{array}{cccccc}\cancel{a_1} & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 & \cancel{a_3}\\ \cancel{b_1} & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 & \cancel{b_3}\end{array}$$

◎ $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=0\\ a_2x+b_2y+c_2z=0\end{cases}$ 的解為 (x,y,z) ，則 $x:y:z=$ <u>$\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}$</u>。

3. 三角形面積公式：

給定兩向量 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 所張出的三角形面積為 <u>$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2-(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2}$</u> 。

(1)若 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$ 、 $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$ ，則三角形面積為 <u>$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right|$</u> 。

(2)若 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 、 $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$ ，則三角形面積為 <u>$\frac{1}{2}|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|$</u> 。

◎三角形面積公式

<u>$\frac{1}{2}\times$底$\times$高</u> $=$ <u>$\frac{1}{2}ab\sin\theta$</u> $=$ <u>$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$</u> $=$ <u>$\frac{abc}{4R}$</u> $=$ <u>rs</u>，其中 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ 。

(兩邊一夾角)　(三邊長)　(R 為外接圓半徑)　(r 為內切圓半徑)

EXAMPLE 1

已知空間中三點 $A(1,2,3)$、$B(-1,3,2)$、$C(3,3,1)$，求：(1) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$　(2) ΔABC 面積

$\overrightarrow{AB}=(-2,1,-1)$, $\overrightarrow{AC}=(2,1,-2)$

(1)
$$\begin{array}{cccccc} \cancel{-2} & 1 & -1 & -2 & 1 & \cancel{-1} \\ \cancel{2} & 1 & -2 & 2 & 1 & \cancel{-2} \\ \hline & -1 & -6 & -4 & & \end{array}$$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-1,-6,-4)$

(2) ΔABC面積 $=\frac{1}{2}\sqrt{1^2+6^2+4^2}=\frac{1}{2}\sqrt{53}$ #

EXAMPLE 2

設 a,b,c 為 ΔABC 的三邊長滿足 $\begin{cases}5a+2b-5c=0\\3a-12b+8c=0\end{cases}$，試求：

(1) $\sin A:\sin B:\sin C$　(2)最大內角的餘弦值

(1) $a:b:c=(-44):(-55):(-66)=4:5:6$ #

$$\begin{array}{cccccc} \cancel{5} & 2 & -5 & 5 & 2 & \cancel{-5} \\ \cancel{3} & -12 & 8 & 3 & -12 & \cancel{8} \\ \hline & -44 & -55 & -66 & & \end{array}$$

(2) $\angle C$為最大內角

$\cos C=\frac{4^2+5^2-6^2}{2\times4\times5}=\frac{1}{8}$ #

EXAMPLE 3

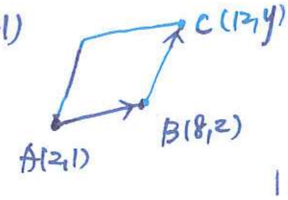
設 a,b 均為整數且 $\begin{vmatrix}5&a\\b&7\end{vmatrix}=4$，求絕對值 $|a+b|$ 之值。

$35-ab=4$, $ab=31=1\times31=(-1)\times(-31)$

$|a+b|=32$

EXAMPLE 4

坐標平面上有一平行四邊形 $ABCD$，其中 $A(2,1)$、$B(8,2)$，C 在第一象限且其 x 坐標為 12。若平行四邊形的面積為 38，求 D 點坐標。



設 $C(12,y)$

$\left|\begin{vmatrix}6&1\\4&y-2\end{vmatrix}\right|=38$

$|6y-12-4|=38$

$\therefore 6y-16=\pm38$, $y=9$ 或 $\frac{-11}{3}$ (不合)

$\therefore C(12,9)$, $D=A+C-B=(6,8)$ #

EXAMPLE 5

設 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 是空間中三個相異非零向量，求下列敘述哪些敘述是正確的。

(1)若 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$，則 $\overrightarrow{a}\,//\,\overrightarrow{b}$。

(2)若 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$ 0，則 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$。

(3)若 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}$，則 $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}$。

(4)若 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}$，則 $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}$。

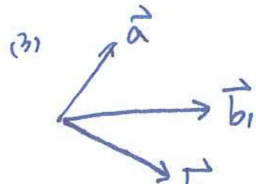
(5) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}$ 恆成立

(6) $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{a}=0$ 恆成立

(1) $|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\theta=0\Rightarrow\sin\theta=0$, $\overrightarrow{a}\,//\,\overrightarrow{b}$ (o)

(2) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta=0\Rightarrow\cos\theta=0$, $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$ (o)

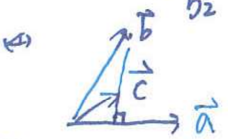
(3)



若 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b_1}$ 所圍面積與 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b_2}$ 所圍面積相同

則 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b_1}=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b_2}$ ($\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b_1}$、$\overrightarrow{b_2}$ 方向如圖) (x)

(4)



若 $\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$ 在 $\overrightarrow{a}$ 之投影長相同.

則 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}$ (x)

(5) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=-\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}$ (x)

(6) $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{a}$, 故 $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{a}=0$ (o)

選(1)(2)(6)#

EXAMPLE 6

給定向量 $\overrightarrow{u}=(2,2,1)$，請選出正確的選項：

(1)可找到向量 $\overrightarrow{v}$ 使得 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\sqrt{2}$

(2)可找到向量 $\overrightarrow{v}$ 使得 $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=(1,3,4)$

(3)若非零向量 $\overrightarrow{v}$ 滿足 $|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}|=2|\overrightarrow{v}|$，則 $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$

(4)若非零向量 $\overrightarrow{v}$ 滿足 $|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}|=3|\overrightarrow{v}|$，則 $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$

(5)若向量 $\overrightarrow{v}$ 滿足 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$ 且 $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$，則 $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$

(1) 取 $\overrightarrow{v}=(0,0,\sqrt{2})$ (o)

(2) $(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\perp\overrightarrow{u}$, $(1,3,4)\cdot(2,2,1)\neq0$ (x)

(3) $|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}|=|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\cdot\cos\theta=2|\overrightarrow{v}|$,

又 $|\overrightarrow{u}|=3$, 得 $\cos\theta=\frac{2}{3}$, $|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|\neq0$ (x)

(4) 承(3),

$|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\cdot\cos\theta=3|\overrightarrow{v}|$

又 $|\overrightarrow{u}|=3$, 得 $\cos\theta=1$. $\sin\theta=0$

$\therefore|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|=0$, $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$ (o)

(5) $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0\Rightarrow\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}$

$\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=0\Rightarrow\overrightarrow{u}\,//\,\overrightarrow{v}$ $\Rightarrow\overrightarrow{v}=0$ (o)

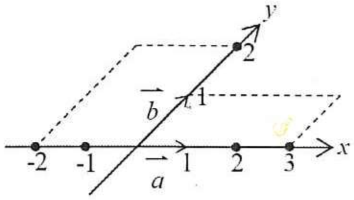
選(1)(4)(5)#

11-3 向量的線性組合

1. 線性組合：

平面上，設兩個不平行的非零向量 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$，對任意向量 $\overrightarrow{c}$

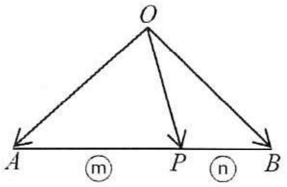
存在且唯一的實數 x, y 使得 $\overrightarrow{c} = x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b}$。



2. 分點公式：

設 O 為任意點，P 在線段 $\overline{AB}$ 上滿足 $\overline{AP}:\overline{BP} = m:n$，

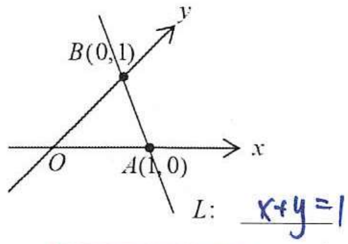
則 $\overrightarrow{OP} = \dfrac{m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OA}}{m+n}$。



3. 三點共線：設 A、P、B 三點共線

【想法一】係數積 $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$

【想法二】若 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$，則 $x+y=1$。

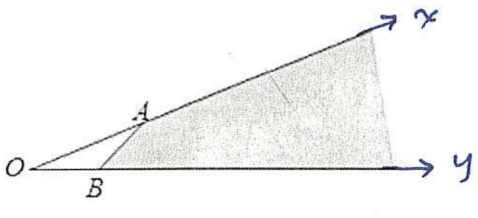


EXAMPLE 1

如右圖所示，兩射線 OA 與 OB 交於 O 點，試問下列選項中哪些向量的終點會落在陰影區域內？

(1) $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$　(2) $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$　(3) $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

(4) $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$　(5) $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$　$x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$



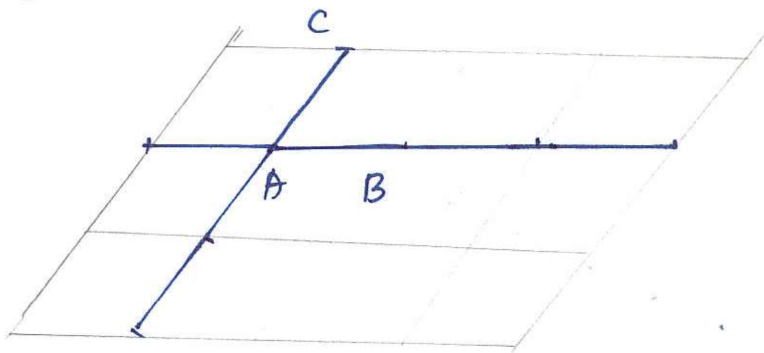
$x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\geq 1$

選 (1)(2) #

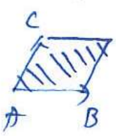
EXAMPLE 2

$\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$

設 ΔABC 的面積為 7，~~$\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$~~，其中 $-1\leq x\leq 3$，~~$-2\leq \beta\leq 1$~~ $-2\leq y\leq 1$，求 P 點所形成之區域面積。



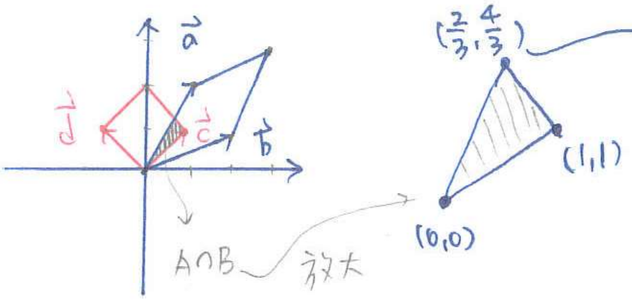
P 點形成區域面積為 (4×3) 個



面積為 $12\times(7\times 2)=168$ #

EXAMPLE 3

在坐標平面上，設原點 O，向量 $\overrightarrow{a}=(1,2)$，$\overrightarrow{b}=(2,1)$，$\overrightarrow{c}=(1,1)$，$\overrightarrow{d}=(-1,1)$，$P$ 為平面上動點。
令點集合 $A=\{P\mid \overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$ 且 $0\le x\le 1$ 且 $0\le y\le 1\}$，
點集合 $B=\{P\mid \overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{c}+y\overrightarrow{d}$ 且 $0\le x\le 1$ 且 $0\le y\le 1\}$，求區域 $A\cap B$ 的面積。

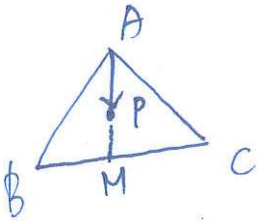


$$\begin{cases} y=2x \\ (y-1)=-(x-1) \end{cases} \Rightarrow 2x-1=-x+1,\ x=\frac{2}{3},\ y=\frac{4}{3}$$

$$A\cap B\text{ 面積}=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix}\frac{2}{3} & \frac{4}{3}\\ 1 & 1\end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\ \#$$

EXAMPLE 4

在坐標平面上，ΔABC 內有一點 P 滿足 $\overrightarrow{AP}=(\frac{4}{3},\frac{5}{6})$ 及 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$。若 A,P 連線交 $\overline{BC}$ 於 M，求 $\overrightarrow{AM}$。



$$\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AP}=t\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{t}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{t}{5}\overrightarrow{AC}$$

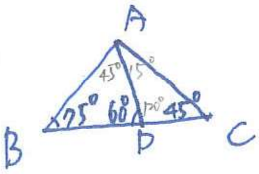
$\because B,M,C$ 共線

$\therefore \frac{t}{2}+\frac{t}{5}=1,\ t=\frac{10}{7}$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{10}{7}\left(\frac{4}{3},\frac{5}{6}\right)=\left(\frac{40}{21},\frac{25}{21}\right)\ \#$$

EXAMPLE 5

設 D 為 ΔABC 中 $\overline{BC}$ 邊上的一點，已知 $\angle ABC=75°,\angle ACB=45°,\angle ADB=60°$，若 $\overrightarrow{AD}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$，求數對 (s,t)。



$$\frac{\overline{BD}}{\sin 45°}=\frac{\overline{AD}}{\sin 75°} \Rightarrow \overline{BD}:\overline{CD}=\frac{\overline{AD}\sin 45°}{\sin 75°}:\frac{\overline{AD}\cdot\sin 15°}{\sin 45°}$$

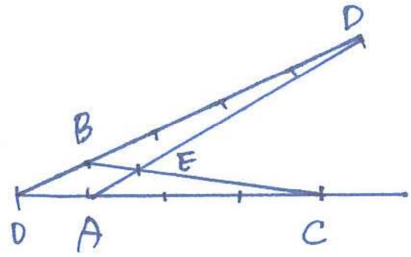
$$\frac{\overline{CD}}{\sin 15°}=\frac{\overline{AD}}{\sin 45°}$$

$$=(\sin 45°)^2:\sin 15°\cos 15°$$
$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2:\frac{1}{2}\cdot\sin 30°=\frac{1}{2}:\frac{1}{4}=2:1$$

$$\therefore s=\frac{1}{3},\ t=\frac{2}{3}\ \#$$

EXAMPLE 6

設 O,A,B 三點不共線，在射線 OA 的線上取一點 C，使得 $\overline{OC}=4\overline{OA}$；在射線 OB 的線上取一點 D，使得 $\overline{OD}=5\overline{OB}$。若 $\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 交於 E 點，且 $\overrightarrow{OE}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，試求 x,y 值。



$$\overrightarrow{OE}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}=x\overrightarrow{OA}+\frac{y}{5}\overrightarrow{OD} \Rightarrow x+\frac{y}{5}=1$$
(A、E、D 共線)

$$\overrightarrow{OE}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}=\frac{x}{4}\overrightarrow{OC}+y\overrightarrow{OB} \Rightarrow \frac{x}{4}+y=1$$
(B、E、C 共線)

$$\begin{cases} x+\frac{y}{5}=1 \Rightarrow 5x+y=5 \cdots ① \\ \frac{x}{4}+y=1 \cdots ② \end{cases}$$

①-②：$\frac{19}{4}x=4,\ x=\frac{16}{19},\ y=\frac{15}{19}\ \#$

11-4 三角形的四心

1. 重心：ΔABC的重心為G，O為任意點

   (1) $\overrightarrow{OG}=$ $\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

   (2) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$

   (3) $\overrightarrow{AG}=$ $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

2. 內心：ΔABC的內心為I，O為任意點

   (1) $\overrightarrow{OI}=$ $\frac{1}{a+b+c}(a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC})$

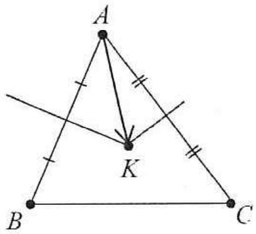
   (2) $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$

   (3) $\overrightarrow{AI}=$ $\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

3. 外心：ΔABC的外心為K

   (1) $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AB}=$ $\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}^2$

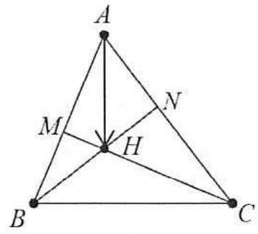
   (2) $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AC}=$ $\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}^2$



4. 垂心：ΔABC的垂心為H

   $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

   $=$ $\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}{2}$



EXAMPLE 1

設G為ΔABC的重心，若$\overline{AB}=\overline{AC}=5$且$\overline{BC}=8$，求$\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}$之值。

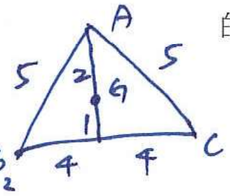
$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=-\overrightarrow{GC}$

$|\overrightarrow{GA}|^2+2\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}+|\overrightarrow{GB}|^2=|\overrightarrow{GC}|^2$

$4+2\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}+17=17$

$\therefore \overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=-2$ #



EXAMPLE 2

設ΔABC中，$\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=6$，$\overline{BC}=7$。I是ΔABC的內心且$\overrightarrow{AI}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，求數對$(\alpha,\beta)$。

$\overrightarrow{OI}=\frac{1}{5+6+7}(5\overrightarrow{OC}+6\overrightarrow{OB}+7\overrightarrow{OA})$

令 $O=A$

$\Rightarrow \overrightarrow{AI}=\frac{1}{18}(5\overrightarrow{AC}+6\overrightarrow{AB})$

$(\alpha,\beta)=(\frac{6}{18},\frac{5}{18})$ #

EXAMPLE 3

設K為ΔABC的外心，$\overline{AB}=4$，$\overline{AC}=2\sqrt{7}$，$\overline{BC}=6$

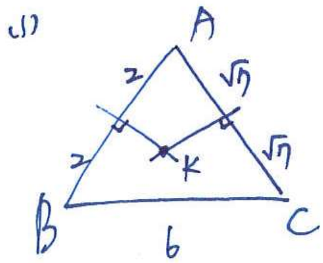
(1)若$\overrightarrow{AK}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求數對$(x,y)$。

(2)直線AK交$\overline{BC}$於D點且$\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，求數對$(\alpha,\beta)$。

Key：外心、垂心之線性組合

$\Rightarrow$①內積$\overrightarrow{AB}$、內積$\overrightarrow{AC}$　②解聯立

(1)



$\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AB}=2\cdot 4=8$

$\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AC}=\sqrt{7}\cdot(2\sqrt{7})=14$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{4^2+(2\sqrt{7})^2-6^2}{2}$

$=\dfrac{16+28-36}{2}$

$=4$

$\begin{cases}\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AB}=x|\overrightarrow{AB}|^2+y\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+y|\overrightarrow{AC}|^2\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}8=16x+4y,\ 2=4x+y\cdots ①\\ 14=4x+28y\cdots ②\end{cases}$

②－①：$12=27y$，$y=\frac{4}{9}$，$x=\frac{7}{18}$ #

(2) $\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{AK}=\frac{7t}{18}\overrightarrow{AB}+\frac{4t}{9}\overrightarrow{AC}$

$\because$ B.D.C 共線 $\therefore \frac{7t}{18}+\frac{4t}{9}=1$，$t=\frac{18}{15}=\frac{6}{5}$

$\therefore (\alpha,\beta)=(\frac{7}{15},\frac{8}{15})$ #

A

11-5 行列式與體積

1. 二階行列式的定義：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \underline{ad-bc}$$

2. 三階行列式的定義：

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \underline{(a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3)-(a_3b_2c_1+b_3c_2a_1+c_3a_2b_1)}$$

3. 行列式的性質

(1)行與列互換，其值不變，即$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$。

(2)任一行(列)乘以一數 k 加入另一行(列)，其值不變。

如：$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & ka+b \\ c & kc+d \end{vmatrix}$ ； $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}_{\times k} = \begin{vmatrix} kc+a & kd+b \\ c & d \end{vmatrix}$

$\times k$

(3)任意兩行(列)對調，其值變號。如：$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$

(4)任一行(列)可提出同一數。如：$\begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ； $\begin{vmatrix} a & b \\ kc & kd \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

(5)任意兩行(列)成比例時，其值為 0。如：$\begin{vmatrix} a & ka \\ b & kb \end{vmatrix} = 0$ ； $\begin{vmatrix} ka & kb \\ a & b \end{vmatrix} = 0$

(6)行列式的加法：某行(列)各元拆成兩項相加等於原行列式。

如：$\begin{vmatrix} a+e & b+f \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ c & d \end{vmatrix}$ ； $\begin{vmatrix} a+e & b \\ c+f & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}$

(7)降階公式：可以依照某一行或某一列每個元乘上其餘因子之和。

如：$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \underline{a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}$ (以第一列展開)

$= \underline{-a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}$ (以第二行展開)

4. 平行六面體體積

空間中 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$、$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$、$\overrightarrow{c}=(c_1,c_2,c_3)$ 三個不共平面的向量所張出的平行六面體體積為 $\underline{|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|}$ $= \underline{\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\right|}$。

EXAMPLE 1

今已知 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 三向量所張平行六面體的體積為 5，求 $2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 三向量所張平行六面體的體積。

$\left|\det\begin{vmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\\ \vec{c}\end{vmatrix}\right| = 5$

$\left|\begin{vmatrix}2\vec{a}+3\vec{b}\\ \vec{b}\\ \vec{c}\end{vmatrix}\right| = \left|\begin{vmatrix}2\vec{a}\\ \vec{b}\\ \vec{c}\end{vmatrix}\right| = 2\left|\begin{vmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\\ \vec{c}\end{vmatrix}\right| = 10$ ※

EXAMPLE 2

已知 $\overrightarrow{a}=(x,y,z)$、$\overrightarrow{b}=(1,1,2)$、$\overrightarrow{c}=(2,2,1)$，

(1)求 $\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 所張出的平行四邊形面積。

(2)若 $x^2+y^2+z^2=50$，求 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 所張出的平行六面體體積最大值。

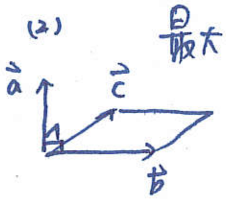
$\vec{b}\times\vec{c} = (-3,3,0)$

$\begin{matrix}\cancel{1} & 2 & 1 & 1 & \cancel{2}\\ \cancel{2} & 1 & 2 & 2 & \cancel{1}\end{matrix}$

$-3,3,0$

(1) ▱ $= |\vec{b}\times\vec{c}| = \sqrt{9+9+0} = \cancel{9\sqrt{2}}$ $3\sqrt{2}$

(2) 最大体積 = ▱ × $|\vec{a}|$



$= \cancel{9}\sqrt{2}\times 5\sqrt{2} = \cancel{90}$ ※

3 $\qquad$ 30

EXAMPLE 3

關於行列式的性質，下列哪一選項恆成立？

(1) $\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a&d&g\\b&e&h\\c&f&i\end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix}a&b&0\\d&e&1\\g&h&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&b\\g&h\end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix}0&b&0\\d&e&f\\0&h&0\end{vmatrix}=0$ (4) $\begin{vmatrix}a&0&c\\0&e&0\\g&0&i\end{vmatrix}=0$

(5) $\begin{vmatrix}a+e&b+f\\c+g&d+h\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}e&f\\g&h\end{vmatrix}$

(1) 行列互換，其值不變 (x) (2) 第3行降階 $= 0\cdot\begin{vmatrix}d&e\\g&h\end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix}a&b\\g&h\end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix}a&b\\d&e\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}a&b\\g&h\end{vmatrix}$ (x)

(3) $0+0+0-0-0-0=0$ (o) (4) $aei+0+0-ceg-0-0=aei-ceg$ (x)

(5) $\begin{vmatrix}a+e&b+f\\c+g&d+h\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a&b\\c+g&d+h\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}e&f\\c+g&d+h\end{vmatrix}$ (x)

選 (3) ※

EXAMPLE 4

設 $\overrightarrow{u}=(1,2,3)$、$\overrightarrow{v}=(1,0,-1)$、$\overrightarrow{w}=(x,y,z)$ 為空間中三個向量，且向量 $\overrightarrow{w}$ 與向量 $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}$ 平行。若行列式 $\begin{vmatrix}1&2&3\\1&0&-1\\x&y&z\end{vmatrix}=-12$，求 $\overrightarrow{w}$。

$\begin{matrix}\cancel{1} & 2 & 3 & 1 & 2 & \cancel{3}\\ \cancel{1} & 0 & -1 & 1 & 0 & \cancel{-1}\end{matrix}$

$-2 \quad 4 \quad -2$

$\vec{u}\times\vec{v} = (-2,4,-2)$

$\vec{w} = r\cdot(-2,4,-2)$

$\begin{vmatrix}1&2&3\\1&0&-1\\x&y&z\end{vmatrix} = (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$

$= (-2,4,-2)\cdot r(-2,4,-2)$

$= r\cdot(4+16+4) = -12$

$\therefore r = -\frac{1}{2}$

$\therefore \vec{w} = (1,-2,1)$ ※