12-1 空間概念

1. 決定唯一平面的條件

   (1)不共線的相異三點　(2)一線與線外一點　(3)兩平行直線　(4)交於一點的兩直線

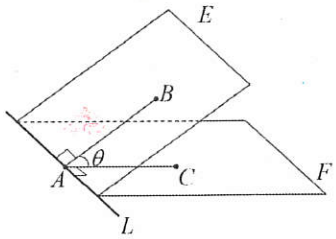
2. 空間中兩直線的關係

   (1)重合　(2)平行　(3)交於一點　(4)歪斜(不平行也不相交的兩直線)

3. 空間中兩平面的關係

   (1)重合　(2)平行　(3)交於一線

   ◎二面角：平面 E,F 交於一直線 L，點 A 在直線 L 上。
   在平面 E 上找一點 B 使得 $\overline{BA}\perp L$，
   在平面 F 上找一點 C 使得 $\overline{CA}\perp L$，
   令 $\theta=\angle BAC$，
   則 $\theta,180^\circ-\theta$ 稱為二平面 E,F 的二面角。



4. 空間中直線與平面的關係

   (1)直線落在平面上(重合)　(2)直線與平面不相交(平行)　(3)交於一點

   ◎直線與平面垂直($L\perp E$)：

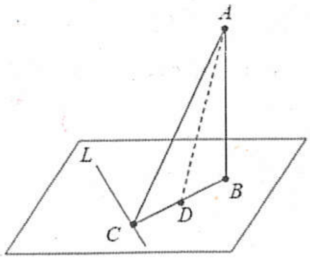
   ①若直線 L 與平面 E 垂直且交於點 A，則平面 E 上任意過點 A 的直線均與直線 L 垂直。

   ②若在平面 E 上找到 __2__ 條直線與直線 L 垂直，則直線 L 與平面 E 垂直。

5. 三垂線定理：

   直線 L 在平面 E 上，點 C 在 L 上，點 B 在 E 上但不在 L 上，
   點 A 不在 E 上，則

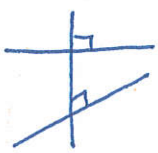
   (1)若 $\overline{AB}\perp E$ 且 $\overline{BC}\perp L\Rightarrow$ __$\overline{AC}\perp L$__
   (2)若 $\overline{AB}\perp E$ 且 $\overline{AC}\perp L\Rightarrow$ __$\overline{BC}\perp L$__
   (3)不成立：$\overline{AC}\perp L$ 且 $\overline{BC}\perp L$ $\cancel{\Rightarrow}$ $\overline{AB}$ 垂直 E



EXAMPLE 1

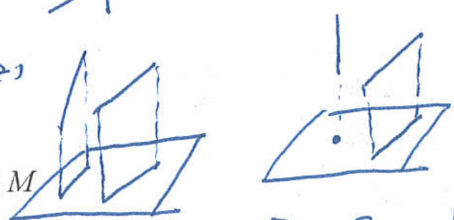
有關空間的敘述，下列哪些是正確的？
(1)垂直於同一直線的兩相異直線必互相平行
(2)兩歪斜線在同一個平面之正射影必為兩相交直線
(3)兩相異平面 E,F 交於一直線 L。若 L 垂直平面 G，
　則平面 E,F 均與平面 G 垂直。
(4)過已知直線外一點，恰有一平面垂直此直線。
(5)兩相異直線 L,M 均與平面 E 平行，則直線 L 平行直線 M

(1)



可能歪斜 or 交一點

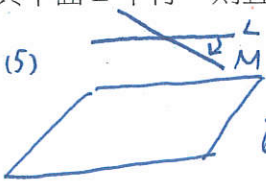
(2)



可能平行 or 一線及線外一點

(3)(4) 正確

(5)

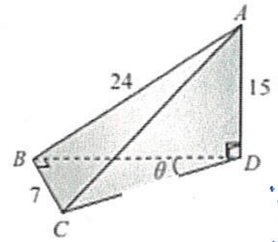


可能歪斜 or 交一點.

EXAMPLE 2

$\overline{BC}=7$

如圖，$ABCD$ 為四面體，已知 $\overline{AD}$ 垂直平面 BCD，$\overline{BC}\perp\overline{BD}$，$\overline{AD}=15$，~~$\overline{CD}=20$~~，$\overline{AB}=24$。若平面 ADB 與平面 ADC 的夾角為 θ，求 $\sin\theta$ 之值。



$\because$ $\overline{AD}$ 垂直平面 BCD

且 $\overline{BC}\perp\overline{BD}$

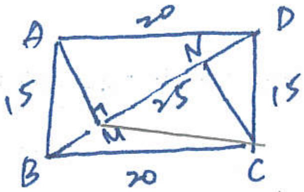
$\therefore$ $\overline{AB}\perp\overline{BC}$

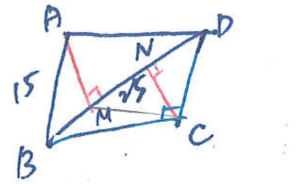
即 $\triangle ABC$ 為直角三角形 $\Rightarrow \overline{AC}=25$

$\therefore \sin\theta=\dfrac{7}{20}$

EXAMPLE 3

將一塊邊長 $\overline{AB}=15$ 公分、$\overline{BC}=20$ 公分的長方形鐵片 $ABCD$ 沿對角線 $\overline{BD}$ 對摺後豎立，使得平面 ABD 與平面 CBD 垂直，求 A、C 兩點（在空間）的距離 $\overline{AC}$。





$\Rightarrow \triangle ABD$ 面積

$=\frac{1}{2}\times15\times20$

$=\frac{1}{2}\times25\times\overline{AM}\Rightarrow\overline{AM}=12$

$\therefore \overline{BM}=9,\ \overline{DN}=9,\ \overline{MN}=7$

$\therefore \overline{CM}=\sqrt{12^2+7^2}=\sqrt{193}$

$\because$ ABD 與 CBD 垂直

$\therefore$ $\overline{AM}\perp\overline{CM}$

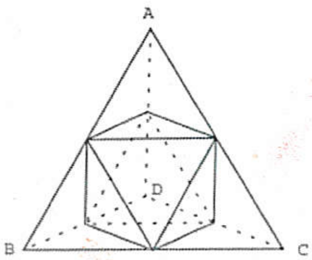
$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AM}^2+\overline{CM}^2}$

$=\sqrt{12^2+(\sqrt{193})^2}$

$=\sqrt{337}$ #

EXAMPLE 4

將一個正四面體的四個面上的各邊中點用線段連接，可得四個小正四面體及一個正八面體，如下圖所示。如果原四面體 $ABCD$ 的體積為 12，求此正八面體的體積。



Key：設正四面體的邊長為 a，則此正四邊體的

①高＝$\dfrac{\sqrt6}{3}a$ ③兩歪斜線距＝$\dfrac{\sqrt2}{2}a$

②體積＝$\dfrac{\sqrt2}{12}a^3$ ④二面角 $\theta,\cos\theta=$ $\dfrac{1}{3}$

大正四面体與小正四面体的邊長比為 $2:1$

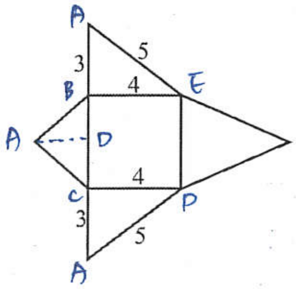
体積比為 $8:1$

八面体＝大正四面体－4×小正四面体

$=12-4\times(12\times\frac{1}{8})=6$ #

EXAMPLE 5

有一底面為正方形的四角錐，其展開圖如下圖所示，其中兩側面的三角形邊長為 3,4,5，求此角錐的體積。



Key：柱體體積公式＝底面積×高

錐體體積公式＝$\frac{1}{3}$×底面積×高

$\because$ $\overrightarrow{BE}\perp\overline{AB}$ 且 $\overrightarrow{BE}\parallel\overrightarrow{CD}\perp\overline{AC}$

$\therefore$ $\overline{BE}\perp$ 平面 ABC

又 $\overline{BE}\perp\overline{BC}$

$\therefore$ 二面角 $(ABC,\ BCDE)=90^\circ$

$\triangle ABC$ 為等腰直角

$\therefore$ $\overline{AD}\perp\overline{BC}$ 且 $\overline{AD}=\cancel{\frac{3}{\sqrt2}}\ \sqrt{3^2-2^2}=\sqrt5$

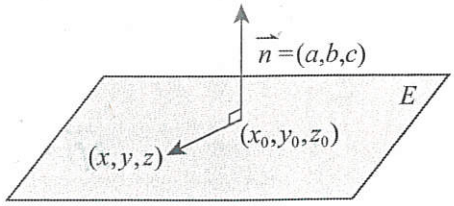
錐体体積 $=\frac{1}{3}\times4^2\times\frac{3}{\sqrt2}=\cancel{8\sqrt2}$ #

$\frac{16}{3}\sqrt5$

A

12-2 空間平面與直線

1. 空間中的平面⇒① 法向量 ② 点

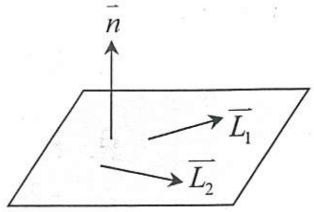


給定平面上一點 $A(x_0,y_0,z_0)$ 及法向量 $\overrightarrow{n}=(a,b,c)$，

則平面 E 的方程式為 $ax+by+cz=ax_0+by_0+cz_0$

◎法向量不唯一

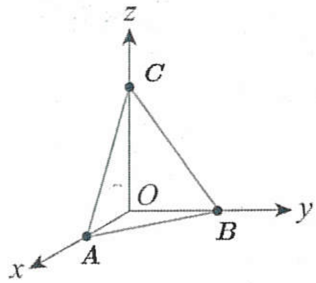
2. 求平面方程式



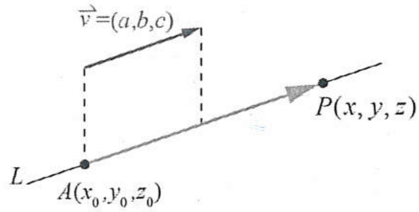
(1)找不到法向量 $\overrightarrow{n}$ ⇒找兩個平面上的向量 外積

(如：給定平面 E 上三點 A,B,C ⇒ $\overrightarrow{n_E}=$ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$)

(2)給定平面 E 的 x,y,z 軸截距為 α,β,γ ⇒ E: $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1$



3. 空間中的直線⇒① 方向向量 ② 点



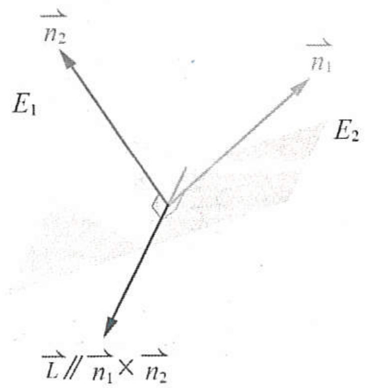
給定~~平面~~ 直線 上一點 $A(x_0,y_0,z_0)$ 及~~法~~ 方向 向量 $\overrightarrow{L}=(a,b,c)$，

則平面 L 的

(1)參數式：$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$ (常用於假設直線上的點)

(2)比例式：$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$

4. 兩平面的交線(兩面式)



直線 L: $\begin{cases} E_1: a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ E_2: a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \end{cases}$ 表示兩平面之交線。

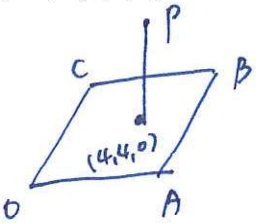
找直線 L 的一點和方向向量

①找點：令 $x=0$ (或 $y=0, z=0$) ⇒ $\begin{cases} b_1y+c_1z=d_1 \\ b_2y+c_2z=d_2 \end{cases}$，解聯立。

②找方向向量：$\overrightarrow{L}\perp\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{L}\perp\overrightarrow{n_2}$ ⇒ $\overrightarrow{L}=$ $\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}$

EXAMPLE 1

坐標空間中 xy 平面上有一正方形，其頂點為 $O(0,0,0)$，$A(8,0,0)$，$B(8,8,0)$，$C(0,8,0)$。另一點 P 在 xy 平面的上方，且與 O, A, B, C 四點的距離皆等於 6。若 $x+by+cz=d$ 為通過 A,B,P 三點的平面，求 (b,c,d)。



設 $P(4,4,z)$

$\overline{OP}=\sqrt{4^2+4^2+z^2}=6$

$z=\pm 2$ (取正)

E: ① 點 $A(8,0,0)$

② $\vec{n} \parallel \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AP} \parallel (1,0,2)$

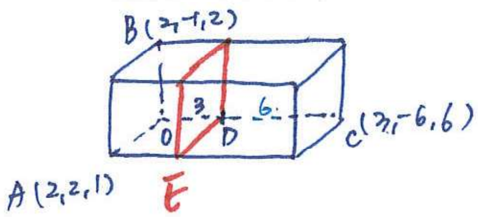
$\begin{array}{cccccc} \cancel{0} & 8 & 0 & 0 & 8 & \cancel{0} \\ \cancel{-4} & 4 & 2 & -4 & 4 & \cancel{2} \end{array}$

$(16,0,32)$

$E:\ x+2z \overset{(8,0,0)}{=\!=} 8$ #

EXAMPLE 2

設 $O(0,0,0)$ 為坐標空間中某長方體的一個頂點，且知 $(2,2,1),(2,-1,-2),(3,-6,6)$ 為此長方體中與 O 相鄰的三頂點。若平面 $E:x+by+cz=d$ 將此長方體截成兩部分，其中包含頂點 O 的那一部分是個正立方體，求 (b,c,d)。



$\overline{OA}=\overline{OB}=3$，$\overline{OC}=9$

E: ① 點 $D=\dfrac{1\cdot C+2\cdot O}{1+2}=(1,-2,2)$

② $\vec{n}\parallel\overrightarrow{OC}\parallel(1,-2,2)$

E 方程式: $x-2y+2z \overset{(1,-2,2)}{=\!=} 9$ #

EXAMPLE 3

坐標空間中有三直線 $L_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{1}$，

$L_2:\begin{cases}x-2y+2z=-4\\ x+y-4z=5\end{cases}$，$L_3:\begin{cases}x=-t\\ y=-2-t\\ z=4+4t\end{cases}$，$t$ 為實數。

請選出正確的選項。

(1) L_1 與 L_2 的方向向量互相垂直
(2) L_1 與 L_3 的方向向量互相垂直
(3) 有一個平面同時包含 L_1 與 L_2
(4) 有一個平面同時包含 L_1 與 L_3
(5) 有一個平面同時包含 L_2 與 L_3

③ 共平面 ⇒ 平行 or 交一點.

L_1: ① 點 $(1,-1,0)$ ② $\vec{L_1}=(2,2,1)$

L_2: ① 點 $z=0 \Rightarrow \begin{cases}x-2y=-4\\ x+y=5\end{cases}$，$3y=9$，$y=3$，$x=2$

$(2,3,0)$

② $\vec{L_2}\parallel(2,2,1)$ $\begin{array}{cccccc} \cancel{-2} & 2 & 1 & -2 & 2 & \cancel{1} \\ \cancel{1} & -4 & 1 & 1 & -4 & \cancel{1} \end{array}$

$(6,6,3)$

L_3: ① 點 $(0,-2,4)$ ② $\vec{L_3}=(-1,-1,4)$

(1) $\vec{L_1}\cdot\vec{L_2}=4+4+1=9\neq 0$ (×)　(2) $\vec{L_1}\cdot\vec{L_3}=0-4+4=0$ (○)

(3) $L_1 \parallel L_2$ 可共面 (○)

(4) 設交點 $(1+2s,-1+2s,s)=(-t,-2-t,4+4t)$

$\begin{cases}1+2s=-t\\ -1+2s=-2-t\\ s=4+4t\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2s+t=-1 & \cdots ①\\ s-4t=4 & \cdots ③\end{cases}$

①－③×2: $9t=-9$，$t=-1$，$s=0$

L_1, L_3 交一點 可共平面 (○)

(5) 設交點 $(2+2s,3+2s,s)=(-t,-2-t,4+4t)$

$\begin{cases}2+2s=-t\\ 3+2s=-2-t\\ s=4+4t\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2s+t=-2\\ 2s+t=-5\\ s-4t=4\end{cases}$ → 無解

L_2, L_3 歪斜 不共平面 (×)

EXAMPLE 4

下列各直線中，請選出和 z 軸互為歪斜線的選項。

(1) $L_1:\begin{cases}x=0\\ z=0\end{cases}$　(2) $L_2:\begin{cases}y=0\\ x+z=1\end{cases}$

(3) $L_3:\begin{cases}z=0\\ x+y=1\end{cases}$　(4) $L_4:\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$　(5) $L_5:\begin{cases}y=1\\ z=1\end{cases}$

z 軸 $(0,0,s)$　與 z 軸不平行

(1) $L_1:(0,t,0)$ 與 z 軸有交點 $(0,0,0)$ (×)

(2) $L_2:(t,0,1-t)$ 與 z 軸有交點 $(0,0,1)$ (×)

(3) $L_3:(t,1-t,0)$ $\begin{cases}t=0\\ 1-t=0\end{cases}$ 矛盾，故與 z 軸無交點 (○)

(4) $L_4:(1,1,t)$ 與 z 軸平行 (×)

(5) $L_5:(t,1,1)$ 與 z 軸不平行，且無交點 (○)

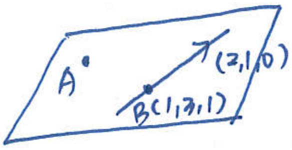
選 (3)(5) #

EXAMPLE 5

求通過點 $A(1,-2,-1)$ 且包含直線 $L:\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{1}\\ z=1\end{cases}$ 的平面方程式。

L: ①點 $(1,3,1)$

②$\vec{\ell}=(2,1,0)$



$\vec{n}\parallel\overrightarrow{AB}\times\vec{\ell}\parallel(1,-2,5)$

$E:\ x-2y+5z\overset{(1,-2,-1)}{=\!=}0$ ※

$\cancel{0}\ 5\ 2\ 0\ 5\ \cancel{2}$
$\cancel{2}\ 1\ 0\ 2\ 1\ \cancel{0}$
$-2,4,-10$

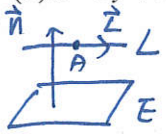
EXAMPLE 6

設直線 L 的方程式為 $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$，則下列那一個平面與 L 平行？

(1) $2x-y+z=1$　(2) $x+y-z=2$

(3) $3x-y+2z=1$　(4) $3x+2y+z=2$

(5) $x-2y+z=1$



$\Rightarrow \vec{n}\perp\vec{\ell}$ 且 A 不在 E 上

L: ① 點 $A(2,-1,1)$ ② $\vec{\ell}=(3,-1,2)$

(1) $\vec{n}\cdot\vec{\ell}=6+1+2\neq0$ (×)　(2) $3-1-2=0$, $\vec{n}\perp\vec{\ell}$

$2-1-1\neq2$, $A\notin E$ (○)

(3) $\vec{n}\cdot\vec{\ell}=9+1+4\neq0$ (×)　(4) $\vec{n}\cdot\vec{\ell}=9-2+2\neq0$ (×)

(5) $3+2+2\neq0$ (×)　　選(2) ※

EXAMPLE 7

坐標空間中，設直線 $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z}{-1}$，平面 $E_1:2x-3y-z=0$，平面 $E_2:x+y-z=0$。試選出正確的選項。

(1)點 $(3,0,-1)$ 在直線 L 上

(2)點 $(1,2,3)$ 在平面 E_1 上

(3)直線 L 與平面 E_1 垂直

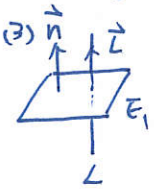
(4)直線 L 在平面 E_1 上

(5)平面 E_1 與 E_2 交於一直線

(1) $\dfrac{3-1}{2}\neq\dfrac{0-2}{-3}$ (×)

(2) $2-6-3\neq0$ (×)

(3)

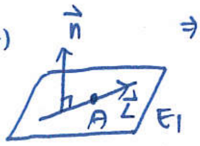


$\vec{n}\parallel\vec{\ell}$

$(2,-3,-1)\parallel(2,-3,-1)$

(○)

(4)



$\Rightarrow\vec{n}\perp\vec{\ell}$ 且 $A\in E$

$\vec{n}\cdot\vec{\ell}=4+9+1\neq0$

(×)

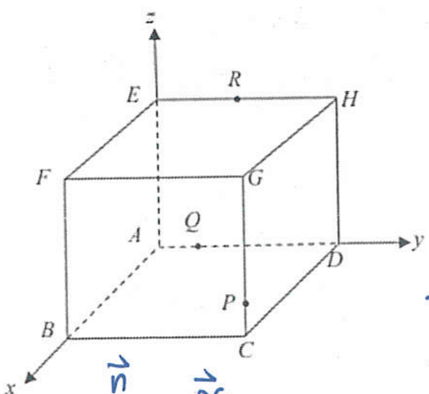
(5) E_1、E_2 不平行也不重合

∴ E_1、E_2 交於一線 (○)

選(3)(5) ※

EXAMPLE 8

如下圖，在坐標空間中，A,B,C,D,E,F,G,H 為正立方體的八個頂點，已知其中四個點的坐標 $A(0,0,0)$、$B(6,0,0)$、$D(0,6,0)$ 及 $E(0,0,6)$，P 在線段 $\overline{CG}$ 上且 $\overline{CP}:\overline{PG}=1:5$，$R$ 在線段 $\overline{EH}$ 上且 $\overline{ER}:\overline{RH}=1:1$，$Q$ 在線段 $\overline{AD}$ 上。若空間中通過 P,Q,R 這三點的平面，與直線 AG 不相交，求 Q 點的 y 坐標。



$P(6,6,1)$、$R(0,3,6)$, $Q(0,b,0)$, $G(6,6,6)$

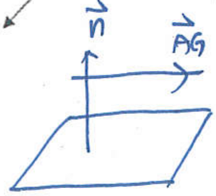
平面 PQR: ① 點 $(6,6,1)$

② $\vec{n}\parallel\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{PQ}=(-6,-3,5)\times(-6,b-6,-1)$

$\cancel{-6}\ -3\ 5\ -6\ -3\ \cancel{5}$
$\cancel{-6}\ b-6\ -1\ -6\ b-6\ \cancel{-1}$
$(33-5b,-36,-6b+18)$

$=(33-5b,-36,-6b+18)$

$\overleftrightarrow{AG}$: ① 點 $(0,0,0)$ ② $\overrightarrow{AG}=(6,6,6)\parallel(1,1,1)$



$\Rightarrow\overrightarrow{AG}\cdot\vec{n}=0$, $33-5b-36-6b+18=0$, $11b=15$, $b=\dfrac{15}{11}$

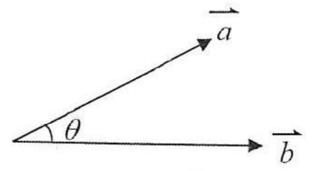
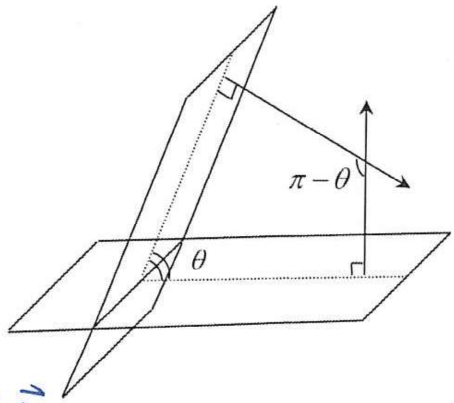
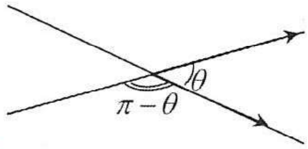
$Q(0,\frac{15}{11},0)$ ※

A

12-3 夾角問題

1. 夾角問題⇒ $\underline{\cos\theta}$ = $\underline{\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}$ = $\underline{\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}}$

(已知三邊長) (向量 *or* 坐標)

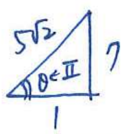
向量夾角(唯一解 θ)	二平面夾角(有兩解 $\theta, 180^\circ-\theta$)
	 ($\underline{\vec{n_1}, \vec{n_2}}$ 的夾角，即為兩平面夾角之一)
二直線夾角(有兩解 $\theta, 180^\circ-\theta$)	
 ($\underline{\vec{L_1}、\vec{L_2}}$ 的夾角，即為兩直線夾角之一)	

EXAMPLE 1

兩直線 $L_1:\begin{cases}x=1-t\\y=3+2t\end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$、$L_2:x-3y=2$。若兩直線 L_1, L_2 的交角為 θ，求 $\sin\theta$ 值。

$\vec{L_1}=(-1,2)$, $\vec{L_2}=(3,1)$

$\cos\theta=\dfrac{\vec{L_1}\cdot\vec{L_2}}{|\vec{L_1}||\vec{L_2}|}=\dfrac{-3+2}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=\dfrac{-1}{5\sqrt{2}}$



$\therefore \sin\theta=\dfrac{7}{5\sqrt{2}}$ (θ、$\pi-\theta$ 均相同) ※

EXAMPLE 2

在坐標空間中，平面 $ax+by+cz=0$ 與平面 $x=0, x+\sqrt{3}y=0$ 的夾角(介於 0° 到 90°)都是 60° 且 $a^2+b^2+c^2=12$，求序對 (a^2, b^2, c^2)。

$\dfrac{(a,b,c)\cdot(1,0,0)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{1}}=\pm\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{a}{\sqrt{12}}=\pm\dfrac{1}{2}$, $a=\pm\sqrt{3}$ $\Rightarrow a^2=3$

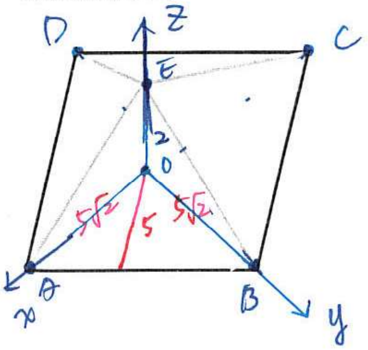
($\cos60^\circ$ or $\cos120^\circ$)

$\dfrac{(a,b,c)\cdot(1,\sqrt{3},0)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}}=\pm\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{a+b\sqrt{3}}{\sqrt{12}\cdot2}=\pm\dfrac{1}{2}$, $a+b\sqrt{3}=\pm2\sqrt{3}$

$b=\pm1$ 或 ±3, $b^2=1$ 或 9 $\Rightarrow$ $(a^2,b^2,c^2)=(3,1,8)$ 或 $(3,9,0)$

EXAMPLE 6

在空間中，一個斜面的「坡度」定義為斜面與水平面夾角 θ 的正切值 $\tan\theta$。若一金字塔（底部為一正方形，四個斜面為等腰三角形）的每一個斜面的坡度皆為 $\dfrac{2}{5}$，如圖。求相鄰斜面的夾角的餘弦函數的絕對值。



$A(5\sqrt{2},0,0)$, $B(0,5\sqrt{2},0)$, $C(-5\sqrt{2},0,0)$, $E(0,0,2)$

平面 ABE: $\dfrac{x}{5\sqrt{2}}+\dfrac{y}{5\sqrt{2}}+\dfrac{z}{2}=1$

平面 BCE: $\dfrac{x}{-5\sqrt{2}}+\dfrac{y}{5\sqrt{2}}+\dfrac{z}{2}=1$

$$|\cos\theta|=\left|\dfrac{\left(\frac{1}{5\sqrt{2}},\frac{1}{5\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{5\sqrt{2}},\frac{1}{5\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\sqrt{\left(\frac{-1}{5\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}\right|=\dfrac{\frac{1}{4}}{\left(\sqrt{\frac{1}{50}+\frac{1}{50}+\frac{1}{4}}\right)^2}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{29}{100}}=\dfrac{25}{29}$$ ※

A

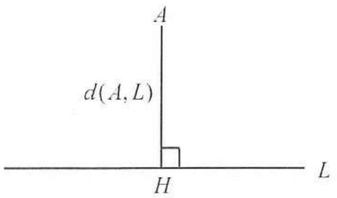
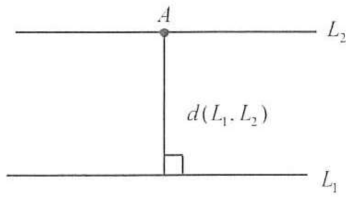
12-4 距離問題

1. 距離公式

	平面上	空間中
二點距離	$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ $\Rightarrow \overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$	$A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2)$ $\Rightarrow \overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$
點線/點面距離	$A(x_1,y_1),L:ax+by+c=0$ $\Rightarrow d(A,L)=\dfrac{\lvert ax_1+by_1+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$A(x_1,y_1,z_1),E:ax+by+cz+d=0$ $\Rightarrow d(A,E)=\dfrac{\lvert ax_1+by_1+cz_1+d\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$
兩平行線/兩平行面距離	$L_1:ax+by+c_1=0,L_2:ax+by+c_2=0$ $\Rightarrow d(L_1,L_2)=\dfrac{\lvert c_1-c_2\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$E_1:ax+by+cz+d_1=0,E_2:ax+by+cz+d_2=0$ $\Rightarrow d(E_1,E_2)=\dfrac{\lvert d_1-d_2\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

2. 其他空間距離問題：

(1)點到線的距離、兩平行線的距離

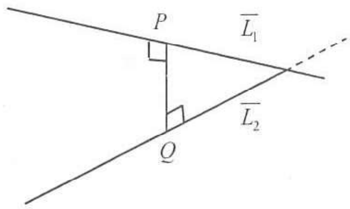
點到線的距離		設垂足點 H ⇒用 L 點參數式 $d(A,L)=\overline{AH}$ （利用配方法求最小值）
兩平行線的距離		由直線 L 知線上一點 A $d(L_1,L_2)=d(A,L_1)$ 即求 A 到 L_1 的距離

(2)線(L)到面(E)的距離：由直線 L 知線上一點 A，$d(L,E)=d(A,E)$。

(3)二歪斜線的距離：即公垂線段（$\overline{PQ}$）的長度。

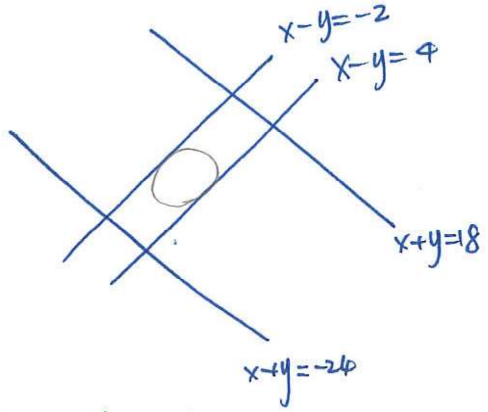
設 P、Q ⇒利用 L_1、L_2 之點參數式 s,t

利用 $\begin{cases}\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{L_1}=0\\ \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{L_2}=0\end{cases}$ 解參數 s,t，$\overline{PQ}$ 即為所求。



EXAMPLE 1

坐標平面上，圓Γ完全落在四個不等式：$x-y\leq 4$、$x+y\leq 18$、$x-y\geq -2$、$x+y\geq -24$所圍成的區域內。求Γ最大可能面積。



$2R=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$，Γ最大面積 $\pi R^2=\frac{9}{2}\pi$ #

EXAMPLE 2

空間中，平面 $E: ax+by+cz=1$ 滿足以下三條件：

(1)平面 E 與平面 $F: x+y+z=1$ 有一夾角為 30°，

(2)點 $A(1,1,1)$ 到平面 E 的距離等於 3，

(3) $a+b+c>0$，

求 $a+b+c$ 的值。 ($\cos 30^\circ$ or $\cos 150^\circ$)

(1) $\frac{(a,b,c)\cdot(1,1,1)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow a+b+c=\pm\frac{3}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

(2) $\frac{|a+b+c-1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=3$，$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\frac{1}{3}|a+b+c-1|$

(2)代入(1)得 $a+b+c=\pm\frac{1}{2}|a+b+c-1|$

∴ $a+b+c=\pm\frac{1}{2}(a+b+c-1)$，$a+b+c=-1$ 或 $\frac{1}{3}$

∵ $a+b+c>0$ ∴ $a+b+c=\frac{1}{3}$

EXAMPLE 3

坐標平面上有相異兩點 P、Q，其中 P 點坐標為 (s,t)。已知線段 $\overline{PQ}$ 的中垂線 L 的方程式為 $3x-4y=0$，試問下列哪些選項是正確的？

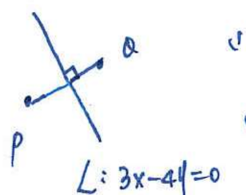
(1)向量 $\overrightarrow{PQ}$ 與向量 $(3,-4)$ 平行

(2)線段 $\overline{PQ}$ 的長度等於 $\frac{|6s-8t|}{5}$

(3) Q 點坐標為 (t,s)

(4)過 Q 點與直線 L 平行之直線必過點 $(-s,-t)$

(5)以 O 表示原點，則向量 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ (向量) 與向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的內積必為 0



(1) $\overrightarrow{PQ}\parallel\overrightarrow{n_L}=(3,-4)$ (o)

(2) $\overline{PQ}=2d(P,L)=2\cdot\frac{|3s-4t|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|6s-8t|}{5}$ (o)

(3) (s,t) 和 (t,s) 對稱於 $y=x$，但 P, Q 對稱於 $3x-4y=0$ (x)

(4) 過 P 平行 L 之直線 $3x-4y\overset{(s,t)}{=\!=}3s-4t$ 等距
$L: 3x-4y=0$
過 Q 平行 L 之直線 $3x-4y=-(3s-4t)$ ...(*)
$(-s,-t)$ 代入(*) $-3s+4t=-(3s-4t)$ (o)

(5) $O(0,0)$ 在直線 L 上，
$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}\parallel\vec{L}$
∴ $\vec{L}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$ (o)

答(1)(2)(4)(5)#

EXAMPLE 4

在坐標空間中，點 $P(2,2,1)$ 是平面 E 上距離原點 $O(0,0,0)$ 最近的點。請選出正確的選項。

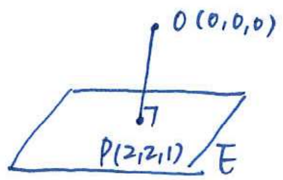
(1)向量 $\vec{v}=(1,-1,0)$ 為平面 E 的法向量

(2)點 P 也是平面 E 上距離點 $(4,4,2)$ 最近的點

(3)點 $(0,0,9)$ 在平面 E 上

(4)點 $(2,2,-8)$ 到平面 E 的距離為 9

(5)通過原點和點 $(2,2,-8)$ 的直線與平面 E 會相交

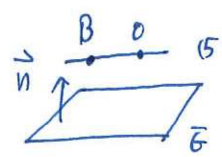


(1) ∵最近點 ∴ $\overrightarrow{OP}\perp E$，$\vec{n}\parallel\overrightarrow{OP}=(2,2,1)$ (x)

(2) 設 $A(4,4,2)$，$\overrightarrow{AP}=(-2,-2,-1)\parallel\vec{n}$，即 $\overrightarrow{AP}\perp E$ (o)

(3) $E: 2x+2y+z\overset{(2,2,1)}{=\!=}9$，$(0,0,9)$ 代入 $0+0+9=9$ (o)

(4) $d=\frac{|2\times 2+2\times 2-8-9|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{9}{3}=3$ (x)



(5) 設 $B(2,2,-8)$
$\overrightarrow{OB}\cdot\vec{n}=(2,2,-8)\cdot(2,2,1)=0$
且 O 不在 E 上
∴ $\overleftrightarrow{OB}\parallel E$ (x)

答(2)(3)#

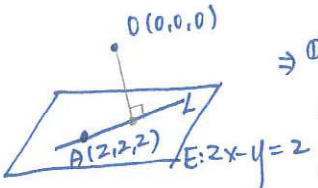
EXAMPLE 5

坐標空間中，直線 L 上距離點 Q 最近的點稱為 Q 在 L 上的投影點。已知 L 為平面 $2x-y=2$ 上通過點 $(2,2,2)$ 的一直線。請問下列哪些選項中的點可能是原點 O 在 L 上的投影點？

(1) $(2,2,2)$ (2) $(2,0,2)$ (3) $(\frac{4}{5},-\frac{2}{5},0)$

(4) $(\frac{4}{5},-\frac{2}{5},-2)$ (5) $(\frac{8}{9},-\frac{2}{9},-\frac{2}{9})$

設O在L上之投影點H



⇒ ① $\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AH}$, ② $\overrightarrow{AH}\perp\vec{n}$

(1) $\overrightarrow{OH}=(2,2,2)$, $\overrightarrow{AH}=(0,0,0)$, $\vec{n}=(2,-1,0)$ (O)

(2) $\overrightarrow{OH}=(2,0,2)$, $\overrightarrow{AH}=(0,-2,0)$, $\vec{n}=(2,-1,0)$, $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}\neq 0$ (X)

(3) $\overrightarrow{OH}=(\frac{4}{5},-\frac{2}{5},0)$, $\overrightarrow{AH}=(\frac{-6}{5},\frac{-12}{5},-2)$, $\vec{n}=(2,-1,0)$ (O)

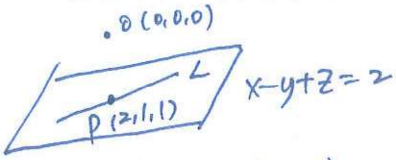
(4) $\overrightarrow{OH}=(\frac{4}{5},\frac{-2}{5},-2)$, $\overrightarrow{AH}=(\frac{-6}{5},\frac{-12}{5},-4)$, $\vec{n}=(2,-1,0)$, $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AH}\neq 0$ (X)

(5) $\overrightarrow{OH}=(\frac{8}{9},\frac{-2}{9},\frac{-2}{9})$, $\overrightarrow{AH}=(\frac{-10}{9},\frac{-20}{9},\frac{-20}{9})$, $\vec{n}=(2,-1,0)$ (O)

答 (1)(3)(5)

EXAMPLE 6

$H: x-y+z=2$ 為坐標空間中一平面，L 為平面 H 上的一直線。已知點 $P(2,1,1)$ 為 L 上距離原點 O 最近的點且 $(2,a,b)$ 為 L 的方向向量，求 (a,b)。



$\overrightarrow{OP}\perp\vec{L}$ 且 $\vec{L}\perp\vec{n}$

$\vec{L}\,/\!/\,\overrightarrow{OP}\times\vec{n}=(2,-1,-3)$

$(a,b)=(-1,-3)$

$$\begin{array}{cccccc} \cancel{2} & 1 & 1 & 2 & 1 & \cancel{1} \\ \cancel{1} & -1 & 1 & 1 & -1 & \cancel{1} \\ \hline & 2 & -1 & -3 & & \end{array}$$

EXAMPLE 7

空間中兩直線 $L_1:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-1}$，$L_2:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-8}{-1}$，求：

(1) L_1 與 L_2 的關係 (2)二直線 L_1 與 L_2 所決定的平面方程式 (3) L_1 與 L_2 的距離

L_1: ① 點A(0,1,2) ② $\vec{L_1}=(2,1,-1)$

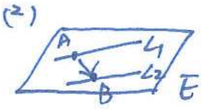
L_2: ① 點B(1,-1,8) ② $\vec{L_2}=(2,1,-1)$

(1) $\vec{L_1}\,/\!/\,\vec{L_2}$ ⇒ 平行 or 重合

A(0,1,2)代入 L_2: $\frac{-1}{2}\neq\frac{1+1}{1}$, $A\notin L_2$

∴ L_1, L_2 平行

(2)



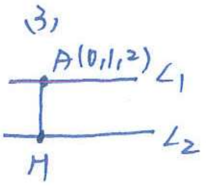
① 點A(0,1,2)

② $\vec{n}\,/\!/\,\overrightarrow{AB}\times\vec{L_1}\,/\!/\,(4,-13,-5)$

$$\begin{array}{cccccc} \cancel{1} & -2 & 6 & 1 & -2 & \cancel{6} \\ \cancel{2} & 1 & -1 & 2 & 1 & \cancel{-1} \\ \hline & -4 & 13 & 5 & & \end{array}$$

E: $4x-13y-5z\overset{(0,1,2)}{=\!=}-23$

(3)



設A到 L_2 之投影點H$(1+2t,-1+t,8-t)$

$\overline{AH}=\sqrt{(2t+1)^2+(t-2)^2+(6-t)^2}$

$=\sqrt{6t^2-12t+41}$

$=\sqrt{6(t-1)^2+35}$

距離 $=\sqrt{35}$

EXAMPLE 8

設 $L_1:\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+3}{-2}$ 與 $L_2:\frac{x-2}{-3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z}{1}$，求：

(1) L_1 與 L_2 的關係 (2)含 L_2 與 L_1 平行的平面方程式 (3) L_1 與 L_2 的距離

L_1: ① 點A(-2,3,-3) ② $\vec{L_1}=(1,2,-2)$

L_2: ① 點B(2,-2,0) ② $\vec{L_2}=(-3,4,1)$

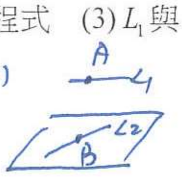
(1) $\vec{L_1}\not\parallel\vec{L_2}$ ⇒ 交1點 or 歪斜

設交點 $(-2+t,3+2t,-3-2t)=(2-3s,-2+4s,s)$

$\begin{cases}-2+t=2-3s \cdots \\ 3+2t=-2+4s \\ -3-2t=s\end{cases}$ → $s=\frac{-2}{5}$, $t=\frac{-13}{10}$ 代 無解

∴無交點 ⇒ L_1, L_2 歪斜

(2)



① 點B(2,-2,0) ② $\vec{n}\,/\!/\,\vec{L_1}\times\vec{L_2}$ // (2,1,2)

$$\begin{array}{cccccc} \cancel{1} & 2 & -2 & 1 & 2 & \cancel{-2} \\ \cancel{-3} & 4 & 1 & -3 & 4 & \cancel{1} \\ \hline & 10 & 5 & 10 & & \end{array}$$

E: $2x+y+2z\overset{(2,-2,0)}{=\!=}2$

(3) $d(L_1,L_2)=d(A,E)$

$=\frac{|-4+3-6-2|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=3$

A

12-5 求點坐標

1. 求點坐標

   STEP 1：找一直線通過目標的點

   STEP 2：利用直線參數式假設點坐標

   STEP 3：依題目條件解參數

2. 投影點與對稱點：

   先求投影點，再求對稱點。

EXAMPLE 1

設點 $A(-2,2)$、$B(4,8)$ 為坐標平面上兩點，且點 C 在二次函數 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的圖形上變動。當 C 點的 x 坐標為____時，內積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 有最小值____。

設 $C(x,\frac{1}{2}x^2)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(6,6)\cdot(x+2,\frac{1}{2}x^2-2)$

$=6x+12+3x^2-12$

$=3(x+1)^2-3$

$\therefore x=-1$ 時 有 $min=-3$ #

EXAMPLE 2

坐標空間中有四點 $A(2,0,0)$、$B(3,4,2)$、$C(-2,4,0)$ 與 $D(-1,3,1)$。若點 P 在直線 CD 上變動，求內積 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ ~~$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$~~ 之最小可能值。

$\overleftrightarrow{CD}$：① 點 $C(-2,4,0)$ ② $\overrightarrow{CD}=(1,-1,1)$

$\therefore$ 設 $P(-2+t,4-t,t)$

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(4-t,t-4,-t)\cdot(5-t,t,2-t)$

$=t^2-9t+20+t^2-4t+t^2-2t$

$=3t^2-15t+20$

$=3(t-\frac{5}{2})^2+\frac{5}{4}$

$\therefore t=\frac{5}{2}$ 時 有 $min=\frac{5}{4}$ #

EXAMPLE 3

坐標中一質點自點 $P(1,1,1)$ 沿著方向 $\overrightarrow{a}=(1,2,2)$ 等速直線前進，經過 5 秒後剛好到達平面 $x-y+3z=28$ 上，立即轉向沿著方向 $\overrightarrow{b}=(-2,2,-1)$ 依同樣的速率等速直線前進。請問再經過幾秒此質點會剛好到達平面 $x=2$ 上？

出發直線：① 點 $P(1,1,1)$ ② $\overrightarrow{a}=(1,2,2)$

設平面上交點 $(1+t,1+2t,1+2t)$

代入 $x-y+3z=(1+t)-(1+2t)+3(1+2t)=28$

$5t=25, t=5$, 交點 $(6,11,11)$

故每秒前進 $(1,2,2)$，即 3 單位

轉向 ① 點 $(6,11,11)$ ② 每秒前進 $(-2,2,-1)$

s 秒後 $(6-2s,11+2s,11-s)$ 達 $x=2$

故 $6-2s=2$，$s=$ 2 秒 #

EXAMPLE 4

李探長為了找尋槍手的可能發射位置，他設定一空間坐標，先從(0,0,2)朝向 (5,8,3)發射一固定雷射光束，接著又從點(0,7,a)沿平行於 x 軸方向發射另一雷射光束，試問當 a 為何值時，兩雷射光束會相交？

$L_1:\begin{cases}x=0+5t\\y=0+8t\\z=2+t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$ $L_2:\begin{cases}x=0+s\\y=7\\z=a\end{cases}$ $s\in\mathbb{R}$

設交點 $(5t,8t,2+t)=(s,7,a)$

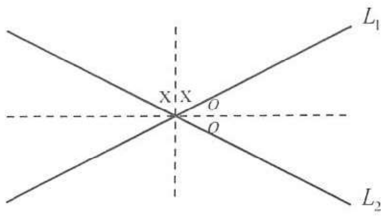
$8t=7$, $t=\frac{7}{8}$, $s=5t=\frac{35}{8}$

$a=2+\frac{7}{8}=\frac{23}{8}$ #

A

12-6 角平分線(面)

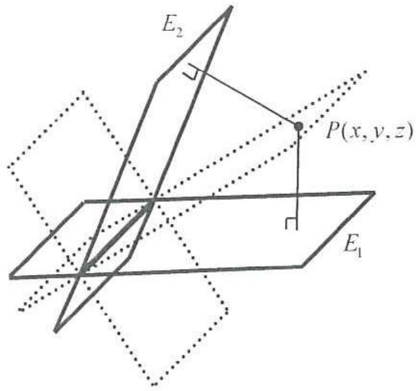
1. [平面]二直線之角平分線



設角平分線上任一點 $P(x, y)$，利用 $d(p,L_1)=d(p,L_2)$。

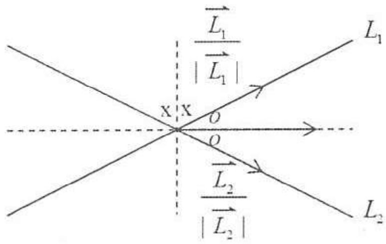
◎判定銳角或鈍角平分線的方法：畫圖看斜率

2. [空間]二平面之角平分面



設角平分線上任一點 $P(x, y, z)$，利用 $d(p,E_1)=d(p,E_2)$。

3. [空間]二直線之角平分線⇒空間直線表示法 參數式

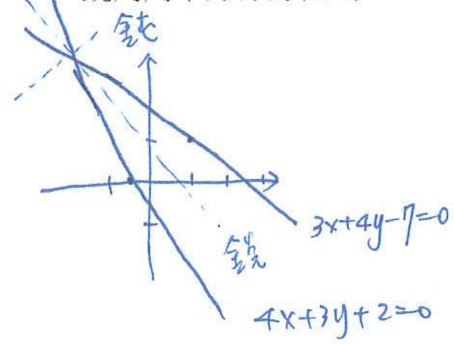


角平分線 ①方向：$\dfrac{\overrightarrow{L_1}}{|\overrightarrow{L_1}|} \pm \dfrac{\overrightarrow{L_2}}{|\overrightarrow{L_2}|}$

②點：L_1, L_2 之交點

EXAMPLE 1

求二直線 $3x+4y-7=0$ 及 $4x+3y+2=0$ 所夾的銳角角平分線方程式。



設角平分線上動點 $P(x,y)$

$d(P,L_1)=d(P,L_2)$

$$\frac{|3x+4y-7|}{5}=\frac{|4x+3y+2|}{5}$$

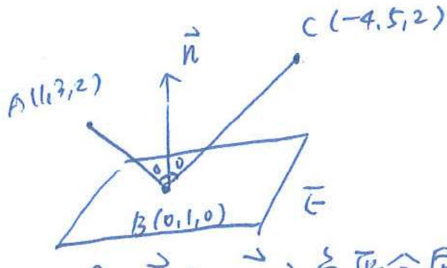
$\Rightarrow 3x+4y-7=\pm(4x+3y+2)$

$\Rightarrow x-y+9=0$ 或 $7x+7y-5=0$

(鈍) (銳)

EXAMPLE 2

空間坐標中，有一平面 E，今有一雷射光線經過點 $A(1,3,2)$ 射向鏡面 E 上的點 $B(0,1,0)$，反射後經點 $C(-4,5,2)$，求平面 E 的方程式。



$\vec{n}$ 是 $\overrightarrow{BA}$ 和 $\overrightarrow{BC}$ 之角平分向量

$\overrightarrow{BA}=(1,2,2)$，$\overrightarrow{BC}=(-4,4,2)$

$\vec{n}=(1,2,2)+\frac{1}{2}(-4,4,2)=(-1,4,3)$

$E: -x+4y+3z \overset{(0,1,0)}{=\!=} 4$ #

$(x-4y-3z=-4)$