13-1 解聯立方程組

1. 克拉瑪公式(聯立方程組的公式解)

(常數取代 y 的係數)

二元一次聯立方程組$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$，設$\Delta=$ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$、$\Delta_x=$ $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$、$\Delta_y=$ $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$，

(常數取代 x 的係數)

則 (1)若$\Delta=0$表示方程組 無解或無限多解。

(2)若$\Delta\neq 0$表示方程組 恰有一組解，解為 $\left(\frac{\Delta x}{\Delta},\frac{\Delta y}{\Delta}\right)$。

2. 加減消去法

原則 1：一次消一個未知數　　原則 2：n 個未知數需要 n 個方程式(恰有一組解)

3. 矩陣列運算(非矩陣運算)⇒ 解聯立

矩陣列運算有 3 個：

(1)任兩列互換　(2)任一列乘上 k 倍($k\neq 0$)　(3)任一列乘上 k 倍加到另一列(加減消去法)

◎三元一次聯立方程組$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ 的增廣矩陣為 $\left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}\right]$。

係數矩陣

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列運算}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{bmatrix}$$ 表示方程組 恰有一組解 (α,β,γ)。

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列運算}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ 表示方程組 無解。

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列運算}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ 表示方程組 無限多解。

EXAMPLE 1

線性方程組$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+y+3z=6 \\ x-y\qquad\ =6 \\ x-2y-z=8 \end{cases}$ 經高斯消去法計算後，其增廣矩陣可以化為$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$，求 a,b,c,d。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \times(-2) \\ \times(-1) \\ \times(-1) \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & -4 & -4 & 8 \end{bmatrix} \times\left(-\frac{1}{3}\right) \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & -4 & -4 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \times(-2) \\ \times 3 \\ \times 4 \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \therefore (a,b,c,d)=(1,4,1,-2)_{\#}$$

EXAMPLE 2

對$\begin{bmatrix}4&9&a\\3&7&b\end{bmatrix}$作列運算若干次後得到$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$，求$a,b$值。

$\begin{cases}4x+9y=a\\3x+7y=b\end{cases}$ 的解為 $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$

$\therefore a=4\times1+9\times1=13$

$b=3\times1+7\times1=10$ #

EXAMPLE 3

設$a_1,a_2,\cdots,a_9$為等差數列且k為實數。若方程組

$\begin{cases}a_1x-a_2y+2a_3z=k+1 & \cdots ① \\ a_4x-a_5y+2a_6z=-k-5 & \cdots ② \\ a_7x-a_8y+2a_9z=k+9 & \cdots ③\end{cases}$ 有解，求k值。

②−①：$(3d)x-(3d)y+2(3d)z=-2k-6$

③−②：$(3d)x-(3d)y+2(3d)z=2k+14$

$\because$ 有解 $\therefore -2k-6=2k+14$

$\Rightarrow k=-5$ #

EXAMPLE 4

設a,b,c為實數，下列關於方程組$\begin{cases}x+2y+az=1 & \cdots ① \\ 3x+4y+bz=-1 & \cdots ② \\ 2x+10y+7z=c & \cdots ③\end{cases}$的敘述哪些是正確的？

(1)若此線性方程組有解，則必定恰有一組解

(2)若此線性方程組有解，則$11a-3b\neq7$

(3)若此線性方程組有解，則$c=14$

(4)若此線性方程組無解，則$11a-3b=7$

(5)若此線性方程組無解，則$c\neq14$

①×3−②：$2y+(3a-b)z=4$

①×2−③：$-6y+(2a-7)z=2-c$

考慮 $\dfrac{2}{-6}=\dfrac{3a-b}{2a-7}$，$2a-7=-9a+3b$

$\Rightarrow 11a-3b=7$

case1：恰有1解 $\Rightarrow 11a-3b\neq7$

考慮 $\dfrac{2}{-6}=\dfrac{4}{2-c}$，$2-c=-12$，$c=14$

case2：無限多解 $\Rightarrow 11a-3b=7$ 且 $c=14$

case3：無解 $\Rightarrow 11a-3b=7$ 且 $c\neq14$

(1) 可能無限多解 (×)

(2) 無限多解 $11a-3b=7$ (×)

(3) 恰有一解，c為任意值 (×)

(4)(5) 由 case 3 知正確

選(4)(5) #

EXAMPLE 5

阿德賣 100 公斤的香蕉，第一天每公斤賣 40 元；沒賣完的部份，第二天降價為每公斤 36 元；第三天再降為每公斤 32 元，到第三天全部賣完，三天所得共為 3720 元。假設阿德在第三天所賣香蕉的公斤數為t，可算得第二天賣出香蕉的公斤數為$at+b$，求(a,b)。

共 100 公斤 $\Rightarrow$ 第一天賣 $100-t-(at+b)$ 公斤

$\therefore 40\,[100-t-(at+b)]+36(at+b)+32t=3720$

$4000-8t-4(at+b)=3720$，$(8+4a)t+4b=280$

$\therefore 8+4a=0 \Rightarrow a=-2$

$4b=280 \qquad b=70$ #

EXAMPLE 6

一礦物內含 A、B、C 三種放射性物質，放射出同一種輻射。已知 A、B、C 每公克分別會釋放出 1 單位、2 單位、1 單位的輻射強度，又知 A、B、C 每過半年其質量分別變為原來質量的 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$ 倍。於一年前測得此礦物的輻射強度為 66 單位，而半年前測得此礦物的輻射強度為 22 單位，且目前此礦物的輻射強度為 8 單位，則目前此礦物中 A、B、C 物質之質量分別為何？

設 A.B.C 目前質量為 a.b.c；半年前為 2a.3b.4c；一年前為 4a.9b.16c

$$\begin{cases}(4a)\cdot 1+(9b)\cdot 2+(16c)\cdot 1=66 & —① \\ (2a)\cdot 1+(3b)\cdot 2+(4c)\cdot 1=22 & —② \\ a\cdot 1+b\cdot 2+c\cdot 1=8 & —③\end{cases}$$

①－②×2：$6b+8c=22$

②－③×2：$2b+2c=6$

$\Rightarrow 2c=4,\ c=2,\ b=1,\ a=4$

$(a,b,c)=(4,1,2)$ #

EXAMPLE 7

若方程組 $\begin{cases}ax+by=e\\cx+dy=f\end{cases}$ 的解為 $(x,y)=(3,2)$，求方程組 $\begin{cases}3bx-2ay+e=0\\3dx-2cy+f=0\end{cases}$ 的解 (x,y)。

[法一] 代數字，設 $a=1,\ b=0,\ e=3$
$c=0,\ d=1,\ f=2$

$\begin{cases}-2y+3=0\\3x+2=0\end{cases}$，$(x,y)=(\frac{-2}{3},\frac{3}{2})$ #

[法二]

$\dfrac{\begin{vmatrix}e&b\\f&d\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}}=3$，$\dfrac{\begin{vmatrix}a&e\\c&f\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}}=2$

$$\Delta x'=\frac{\begin{vmatrix}-e&-2a\\-f&-2c\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3b&-2a\\3d&-2c\end{vmatrix}}=\frac{2\begin{vmatrix}e&a\\f&c\end{vmatrix}}{-6\begin{vmatrix}b&a\\d&c\end{vmatrix}}=\frac{-2\begin{vmatrix}a&e\\c&f\end{vmatrix}}{6\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}}=\frac{-1}{3}\times 2=\frac{-2}{3}$$

$$\Delta y'=\frac{\begin{vmatrix}3b&-e\\3d&-f\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3b&-2a\\3d&-2c\end{vmatrix}}=\frac{-3\begin{vmatrix}b&e\\d&f\end{vmatrix}}{-6\begin{vmatrix}b&a\\d&c\end{vmatrix}}=\frac{3\begin{vmatrix}e&b\\f&d\end{vmatrix}}{6\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}}=\frac{1}{2}\times 3=\frac{3}{2}$$

$(x,y)=(\frac{-2}{3},\frac{3}{2})$ #

EXAMPLE 8

若有 θ 使方程組 $\begin{cases}(1+\cos\theta)x-y=0\\-x+(1+\sin\theta)y=0\end{cases}$ 不只有一組解，求 $\sin\theta+\cos\theta$ 的值。

㊣ 不只有一解 ⇒ 無限多解

$\frac{1+\cos\theta}{-1}=\frac{-1}{1+\sin\theta}\Rightarrow(1+\cos\theta)(1+\sin\theta)=1$

$\Rightarrow 1+\sin\theta+\cos\theta+\cos\theta\cdot\sin\theta=1$

$\Rightarrow \sin\theta+\cos\theta+\sin\theta\cdot\cos\theta=0$

(令 $t=\sin\theta+\cos\theta$，$-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$
$t^2=1+2\sin\theta\cdot\cos\theta$，$\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$)

$\Rightarrow t+\frac{t^2-1}{2}=0.$

$\Rightarrow t^2+2t-1=0$，$t=\frac{-2\pm\sqrt{8}}{2}$
$=-1\pm\sqrt{2}$

$\because -\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$ $\therefore t=-1+\sqrt{2}$ #

13-2 矩陣及其運算

1. 矩陣的定義：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=[a_{ij}]_{m\times n}$$ 稱為矩陣。

(1)矩陣的大小：(m×n)階。若 $m=n$ 時，稱 A 為 n 階方陣。

(2)矩陣的元：a_{ij} 表示第 i 列第 j 行的元素，記作 (i,j) 元。

2. 矩陣的運算

(1)加(減)法：需 同階矩陣

①設 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$、$B=[b_{ij}]_{m\times n}$，則 $A+B=$ $[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$ (對應元相加)。

②設 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$、$B=[b_{ij}]_{m\times n}$，則 $A-B=$ $[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$ (對應元相加)。

③矩陣 $O=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$，稱為零矩陣，滿足 $A+O=O+A=A$。

(2)係數積：設 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，則 $rA=$ $[r\cdot a_{ij}]_{m\times n}$ (所有元都 r 倍)。

(3)乘法：設 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$、$B=[b_{ij}]_{p\times q}$

①AB 有意義 ⇒ $n=p$；BA 有意義 ⇒ $q=m$。

②設 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$、$B=[b_{ij}]_{n\times q}$，$C=AB=[c_{ij}]_{m\times q}$，則

矩陣的大小為 (m×q)階；矩陣 C 的 (i,j) 元 $c_{ij}=$ $a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$。
(第 i 列，第 j 行 內積)

③矩陣 $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$，稱為(乘法)單位矩陣，滿足 $AI=IA=A$。

(4)二階反方陣：若有一個二階方陣 A 有乘法反元素，記作 A^{-1}，滿足 $(AA^{-1})=(A^{-1}A)=I$。

①A^{-1} 存在 ⇔ $\det A\neq 0$

②設 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 且 $\det A\neq 0$，則 $A^{-1}=$ $\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$。(主對角線互換，其餘變號)

EXAMPLE 1

設 $A=\begin{bmatrix}1&3\\5&7\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}2&4\\6&8\end{bmatrix}$，求下列各小題的矩陣。

(1) $A+\frac{1}{2}B$　(2) AB　(3) BA　(4) A^{-1}

(1) $\begin{bmatrix}1&3\\5&7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&5\\8&11\end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix}1&3\\5&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&4\\6&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20&28\\52&76\end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix}2&4\\6&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\5&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22&34\\46&74\end{bmatrix}$

(4) $A^{-1}=\frac{1}{7-15}\begin{bmatrix}7&-3\\-5&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-7}{8}&\frac{3}{8}\\\frac{5}{8}&\frac{-1}{8}\end{bmatrix}$

3. 矩陣運算的性質

(1)加法：具有交換律、結合律、消去律。

(2)乘法：具有結合律

①$\boxed{\text{不具}}$交換律：$AB=BA$ 不一定成立 $\Rightarrow$ 乘法公式 不一定成立，

如：$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 不一定成立。

<<特例>>遇到 I，乘法有交換律。如：$AI=IA$、$(A+I)^2=A^2+2A+I$。

②$\boxed{\text{不具}}$消去律：若 $AB=AC$，則 $B=C$　　不一定成立

若 $AB=0$，則 $A=0$ 或 $B=0$

<<修正>>若 $AB=AC$ 且 $\det A\neq 0$，則 $B=C$

若 $AB=0$ 且 (A^{-1} 存在)，則 $B=0$

(3)求解：$AX=B\Rightarrow X=$ $A^{-1}B$；$XA=B\Rightarrow X=$ BA^{-1}

(4)指數律：$A^mA^n=$ A^{m+n}、$(A^n)^{-1}=$ A^{-n}、$(AB)^{-1}=$ $B^{-1}A^{-1}$

EXAMPLE 2

下列哪一個選項中，矩陣乘積等於 $\begin{bmatrix}2a&3b\\2c&3d\end{bmatrix}$？

(1) $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix}2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix}2&3\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$　(4) $\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}$

(1) $\begin{bmatrix}2a+3b\\2c+3d\end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix}2a+3c&2b+3d\end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix}2a+3c&2b+3d\\2a+3c&2b+3d\end{bmatrix}$　(4) $\begin{bmatrix}2a&2b\\3c&3d\end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix}2a&3b\\2c&3d\end{bmatrix}$　選 (5)#

EXAMPLE 3

設 A,B,C 皆為 3 階方陣，則下列敘述哪些正確？

(1) $AB=BA$ 恆成立

(2) $(AB)C=A(BC)$

(3)若 $AB=0$，則 $A=0$ 或 $B=0$。

(4)若 $\det A\neq 0$ 且 $AB=AC$，則 $B=C$。

(5) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 恆成立

(1) 沒有交換律 (×)　(2) 具有結合律 (○)

(3) 沒有消去律 (×)

(4) $AB=AC\Rightarrow A^{-1}(AB)=A^{-1}(AC)\Rightarrow B=C$ (○)

(5) 乘法公式不一定成立 ($AB=BA$) (×)

選 (2)(4)#

EXAMPLE 4

設 a,b,c,d,e,x,y,z 皆為實數，

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 5 & 7 \\ -4 & 6 & e \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & x & 7 \\ 0 & y & 7 \\ -11 & z & 23 \end{bmatrix}$，求 y 值。

$y=5c+6d$

$-3c-4d=0$
$7c+de=7$ $\Rightarrow \begin{cases} -3c-4d=0 \\ 7c+8d=7 \end{cases}$，$c=7$，$d=\frac{-21}{4}$

$7+2e=23 \Rightarrow e=8$

$\therefore y=35-\frac{63}{2}=\frac{7}{2}$ #

EXAMPLE 5

設實係數二階方陣 A 滿足

$A\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$、$A\begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$。

若 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$，求 a,b,c,d 值。

$A\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\frac{1}{1}\begin{bmatrix} 4 & -9 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$

$(a,b,c,d)=(4,-3,-9,7)$ #

EXAMPLE 6

設 P,Q,R 皆為二階方陣，$PQ=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$、

$PR=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$ 且 $Q+R=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$，求矩陣 P。

$PQ+PR=P(Q+R)$

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}=P\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 16 & 12 \end{bmatrix}$

$\therefore P=\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 16 & 12 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\right)^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 16 & 12 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 12 & 12 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ #

EXAMPLE 7

矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$，其中 a,b,c 是實數且行列式 $\det A=1$，求行列式 $\det(A-A^{-1})$ 之值。

$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$A-A^{-1}=\begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 2c & -2a \end{bmatrix}$

$\det(A-A^{-1})=\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 2c & -2a \end{vmatrix}=4\begin{vmatrix} a & b \\ c & -a \end{vmatrix}$

$=4\det A=4$ #

EXAMPLE 8

n 為正整數，令 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$，請選出正確選項。

(1) $a_2=1$ (2) a_1,a_2,a_3 為等比數列
(3) d_1,d_2,d_3 為等比數列 (4) b_1,b_2,b_3 為等差數列
(5) c_1,c_2,c_3 為等差數列

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^1=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

可推得 $a_n=1$，$b_n=2^n-1$

$c_n=0$ $d_n=2^n$

選 (1)(2)(3)(5) #

EXAMPLE 9

已知二階方陣 $A=\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$，試求 $A+A^2+A^3+\cdots+A^9$。

$A^2=\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}=2A$

$A^3=A^2\cdot A=(2A)\cdot A=2A^2=2(2A)=4A$

$\cdots \Rightarrow A^n=2^{n-1}A$

$A+A^2+A^3+\cdots+A^9$

$=A+2A+2^2A+\cdots+2^8A$

$=\frac{1\cdot(2^9-1)}{2-1}A=511A=\begin{bmatrix} 1533 & 1533 \\ -511 & -511 \end{bmatrix}$ #

13-3 轉移矩陣

1. 轉移矩陣

n 階方陣 A 滿足下列二條件：

(1)每個元均 非負 $(a_{ij} \geq 0)$ (2)每一直行所有元之和均為 1 ，

則稱 A 為轉移矩陣。

2. 轉移矩陣的應用

設一個試驗有 S_1, S_2 兩種不同的狀態，且初始狀態 S_1, S_2 的機率分別為 α_0, β_0 ，

而由狀態 $S_j \to S_i$ 的機率為 p_{ij} ，轉移矩陣 $A = \begin{array}{cc} S_1 & S_2(\text{原}) \\ \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \end{array} \\ (\text{新}) & \end{array}$ ，起始矩陣 $X_0 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \end{array}$ ，則

經過 n 次變換後 S_1, S_2 的機率分別為 α_n, β_n ，機率矩陣 $\begin{bmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{bmatrix} = X_n =$ $A^n X_0$ 。

EXAMPLE 1

某高中根據歷屆學生的成績記錄，得到下列的結論：該校每一屆的學生，在這個學期數學成績及格者，有 80%的比例在下一個學期數學成績也會及格；這個學期數學成績不及格者，有 60%的比例在下一個學期數學成績會及格。某一屆學生在校三年學生總數固定，假設在校期間第 n 個學期及格的比例為 a_n ，不及格的比例為 b_n ，令 $X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{及} \\ \text{不及} \end{array}$，且 $X_{n+1} = AX_n$ 。請選出正確的選項。

(1) $A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$

(2)某一屆學生在高一上學期有 90%的學生數學成績及格，則此屆學生在高一下學期數學成績及格比例為 78%

(3)從高一下學期起，這個學校學生的數學成績及格比例恆大於 0.5

(4)這個學校每一屆學生從高一到高三的數學成績及格比例會越來越低

(5)若某一屆學生在高中六個學期內，每學期的數學成績及格比例要維持不變，則高一上學期的數學成績及格比例必須為 0.75

(1) $\begin{array}{cc} & \text{及} \quad \text{不及}\ (\text{原}) \\ \begin{array}{c} \text{及} \\ \text{不及} \end{array} & \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} \\ (\text{新}) & \end{array}$ (○)

(2) $\begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.78 \\ 0.22 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{及} \\ \text{不及} \end{array}$ (○)

(3) $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$

$a_{n+1} = 0.8a_n + 0.6b_n$
$= 0.8a_n + 0.6(1-a_n)$
$= 0.6 + 0.2a_n \geq 0.6$ (○)

(4) 反例：若 $a_1 = 0.1$, $a_2 = 0.62$ (變高) (×)

(5) $\alpha = 0.6 + 0.2\alpha$, $0.8\alpha = 0.6$, $\alpha = \frac{3}{4} = 0.75$ (○)

選(1)(2)(3)(5)

EXAMPLE 2

設有 A、B 兩支大瓶子，開始時，A 瓶裝有 a 公升的純酒精，B 瓶裝有 b 公升的礦泉水。每一輪操作都是先將 A 瓶的溶液倒出一半到 B 瓶，然後再將 B 瓶的溶液倒出一半回 A 瓶（不考慮酒精與水混合後體積的縮小）。設 n 輪操作後，A 瓶有 a_n 公升的溶液，B 瓶有 b_n 公升的溶液。已知二階方陣

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 滿足 $\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$。

$A \to \frac{1}{2}A \longrightarrow \frac{3}{4}A+\frac{1}{2}B$

$B \quad B+\frac{1}{2}A \quad \frac{1}{4}A+\frac{1}{2}B$

1 =次

(1) 求二階方陣 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$。(5 分)

(2) 當 $a=\frac{2}{3}, b=\frac{1}{3}$ 時，求 a_{100} 及 b_{100}。(4 分)

(3) 當 $a=\frac{2}{3}, b=\frac{1}{3}$ 時，在第二輪操作後，A 瓶的溶液中有百分之多少的酒精？

(1)
$$\begin{array}{c|cc} & 酒 & 水(原) \\ 酒 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 水(新) & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array} \#$$

(2) $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{12} \\ \frac{4}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

$\therefore a_1=\frac{2}{3}, b_1=\frac{1}{3}$，同理，$a_n=\frac{2}{3}, b_n=\frac{1}{3} \Rightarrow a_{100}=\frac{2}{3}, b_{100}=\frac{1}{3}$ ※

(3) $\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{4}a+\frac{1}{2}b \\ \frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{16}a+\frac{5}{8}b \\ \frac{5}{16}a+\frac{3}{8}b \end{bmatrix}$

酒精濃度 $= \frac{酒精}{總溶液} = \frac{\frac{11}{16}\times\frac{2}{3}}{\frac{11}{16}\times\frac{2}{3}+\frac{5}{8}\times\frac{1}{3}} = \frac{22}{32} = \frac{11}{16} = 68.75\%$

EXAMPLE 3

已知 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 是一個轉移矩陣，並且其行列式(值)為 $\frac{5}{8}$，求 $a+d$。

$\because$ 轉移 $\therefore a+c=1$，$c=1-a$

$b+d=1$，$b=1-d$

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1-d \\ 1-a & d \end{vmatrix} = ad-(1-d)(1-a)$

$= ad-(1-a-d+ad)$

$= a+d-1 = \frac{5}{8} \Rightarrow a+d = \frac{13}{8}$ #

EXAMPLE 4

設 A, B 是 2×2 階的轉移矩陣，下列哪些矩陣也是轉移矩陣？

(1) A^2 (2) AB (3) $\frac{1}{2}(A+B)$ (4) $\frac{1}{4}(A^2+B^2)$

(1) A^2 可想成經過 2 次 A，仍是轉移 (o)

(2) AB 可想成先經 A，再經 B，仍是轉移 (o)

(3) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$

① $a_{11}+b_{11}$、$a_{12}+b_{12}$、$a_{21}+b_{21}$、$a_{22}+b_{22}$ 均非負

② $a_{11}+b_{11}+a_{21}+b_{21} = (a_{11}+a_{21})+(b_{11}+b_{21}) = 2$

$a_{12}+b_{12}+a_{22}+b_{22} = 2$

$\therefore$ 直行和均為 1 (o)

(4) A^2、B^2 均為轉移，故 $\frac{1}{4}(A^2+B^2)$ 為轉移 (x)

13-4 線性變換

1. 線性變換：

對平面上任意一點 $P(x,y)$，就有一個對應的 2×1 階行矩陣 $P=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$。設 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ 為一個二階方陣且 $AP=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$，則稱方陣 A 將點 $P(x,y)$ 變換到點 $Q(x',y')$。這個由矩陣所決定的變換稱為線性變換。

2. 線性變換的幾何性質：

將二階方陣 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ 視為一個線性變換，則

(1)當 $A=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$：平面上所有點 $P(x,y)$ 經過 A 變換後都是 原點(0,0)。

(2)當 $\det A=0$ 且 $A\neq\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$：平面上所有點 $P(x,y)$ 經過 A 變換後所有點的集合為 一直線。

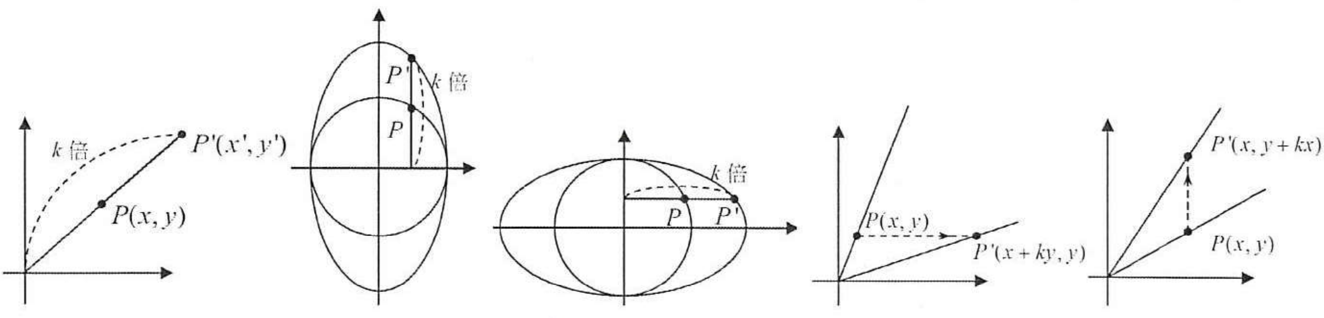
(3)當 $\det A\neq0$：平面上所有點 $P(x,y)$ 經過 A 變換後所有點的集合為 整個平面。

3. 伸縮變換

(1)以原點為中心伸縮 k 倍：$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k&0\\0&k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

(2) x 軸坐標不變，y 軸坐標伸縮 k 倍：$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

(3) x 軸坐標伸縮 k 倍，y 軸坐標不變：$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$



4. 推移變換

(1)沿 x 軸推移 y 坐標的 k 倍：$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&k\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

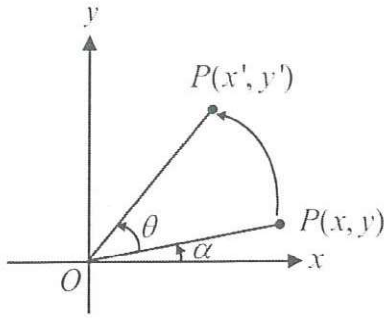
(2)沿 y 軸推移 x 坐標的 k 倍：$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\k&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

5. ~~伸縮~~旋轉變換

在坐標平面上，點 $P(x,y)$ 以原點 O 為中心，旋轉 θ 後得點 $P'(x',y')$，則

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 或

	x	y
x'	$\cos\theta$	$-\sin\theta$
y'	$\sin\theta$	$\cos\theta$



◎設 $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$，則 $A^n = \underline{\begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}}$。

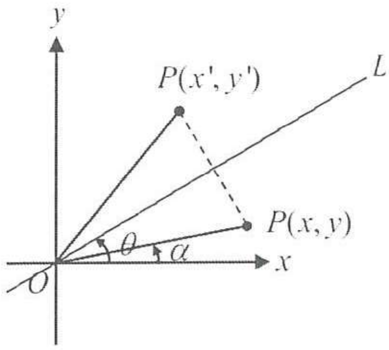
6. 鏡射變換

在坐標平面上，設直線 L 與正 x 軸夾角為 θ 且 L 通過原點。

點 $P(x,y)$ 對直線 L 鏡射後得點 $P'(x',y')$，則

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} \cos2\theta & \sin2\theta \\ \sin2\theta & -\cos2\theta \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 或

	x	y
x'	$\cos 2\theta$	$\sin 2\theta$
y'	$\sin 2\theta$	$-\cos 2\theta$



◎設 $A = \begin{bmatrix} \cos2\theta & \sin2\theta \\ \sin2\theta & -\cos2\theta \end{bmatrix}$，則 $A^n = \underline{\begin{cases} A & , n \text{ 是奇數} \\ I & , n \text{ 是偶數} \end{cases}}$。

7. 線性變換的面積比：

設 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 且 $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$，若面積為 R 的三角形透過矩陣 A 作線性變換，變換到另一三角形面積為 R'，則(R'面積)：(R面積) = $|\det(A)|$ ：1。

EXAMPLE 1

假設 2 階方陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 所代表的線性變換將坐標平面上三點 $O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(0,1)$ 分別映射到 $O(0,0)$，~~$A(1,0)$，$B(0,1)$~~，並將與原點距離為 1 的點 $C(x,y)$ 映射到點 $C'(x',y')$。試選出正確的選項。 $A'(3,\sqrt{3})$、$B'(-\sqrt{3},3)$

(1)行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 6$　(2) $\overline{OC'} = 2\sqrt{3}$　(3) $\overrightarrow{OC}$ 和 $\overrightarrow{OC'}$ 的夾角為 $60°$　(4)有可能 $y = y'$

(5)若 $x < y$，則 $x' < y'$。

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{array}\right]$

(1) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 9 + 3 = 12$ (x)

(2) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} = 2\sqrt{3}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = 2\sqrt{3}\begin{bmatrix} \cos30° & -\sin30° \\ \sin30° & \cos30° \end{bmatrix}$

可想成放大 $2\sqrt{3}$ 倍，且旋轉 $30°$

$\therefore \overline{OC'} = 2\sqrt{3}\,\overline{OC} = 2\sqrt{3}$ (o)

(3) $\angle COC' = 30°$ (x)

(4) $\begin{bmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow y' = \sqrt{3}x + 3y = y$，$x = \frac{-2}{\sqrt{3}}y$

又 $x^2 + y^2 = 1$，$\frac{4}{3}y^2 + y^2 = 1$，$y = \pm\sqrt{\frac{3}{7}}$

取 $(x,y) = (\frac{-2}{\sqrt{7}}, \sqrt{\frac{3}{7}}) \Rightarrow y' = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ (o)

(5) 取 $(x,y) = (\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2})$ $\Rightarrow (x',y') = 2\sqrt{3}(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2})$ (x)　選 (2)(4)

EXAMPLE 2

考慮坐標平面上的直線 L ：$3x-2y=1$。若 a 為實數且二階方陣 $\begin{bmatrix}1&0\\a&-8\end{bmatrix}$ 所代表的線性變換可以將 L 上的點變換到一條斜率為 2 的直線，則 a 的值為下列哪一個選項？

(1)6　(2)8　(3)10　(4)12　(5)14

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\a&-8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x'=x\\y'=ax-8y\end{cases} \Rightarrow x=x',\ y=\frac{ax'-y'}{8}$$

$$L: 3x-2y=1 \longrightarrow L': 3x'-2\left(\frac{ax'-y'}{8}\right)=1$$

$$\Rightarrow L': \left(3-\frac{a}{4}\right)x'+\frac{1}{4}y'=1$$

$$m=\frac{\frac{a}{4}-3}{\frac{1}{4}}=2,\ \frac{a}{4}-3=\frac{1}{2},\ a=14$$

選(5)#

EXAMPLE 3

若矩陣 $A=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$，若 $A^4=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，且 $0<\cancel{x}<\pi$，求 θ 值。

θ

$$A^4=\begin{bmatrix}\cos4\theta&-\sin4\theta\\\sin4\theta&\cos4\theta\end{bmatrix}$$

$$0<4\theta<4\pi$$

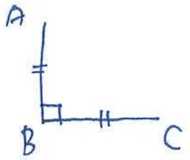
$$4\theta=2\pi,\quad \theta=\frac{\pi}{2}\ \#$$

EXAMPLE 4

設坐標平面上有 A,B,C 三點，滿足 $\angle ABC$ 為直角，$\overline{AB}=\overline{BC}$，且向量 $\overrightarrow{AB}=(4,2)$，請選出可以為向量 $\overrightarrow{AC}$ 的選項。

(1) $(-2,4)$　(2) $(2,-4)$　(3) $(2,6)$　(4) $(-2,6)$

(5) $(6,-2)$



$\because \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$ 且 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|$

$\therefore \overrightarrow{BC}=\pm(2,-4)=(2,-4)$ 或 $(-2,4)$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(4,2)\pm(2,-4)$

$=(6,-2)$ 或 $(2,6)$

選(3)(5)#

EXAMPLE 5

有關矩陣 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ 與矩陣 $B=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt3}{2}\\\frac{\sqrt3}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，試問下列哪些選項是正確的？

(1) $AB=BA$　(2) $A^2B=BA^2$　(3) $A^{11}B^3=B^6A^5$

(4) $AB^{12}=A^7$　(5) $(ABA)^{15}=AB^{15}A$

(1) $AB=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac12&-\frac{\sqrt3}{2}\\\frac{\sqrt3}{2}&\frac12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac12&-\frac{\sqrt3}{2}\\-\frac{\sqrt3}{2}&-\frac12\end{bmatrix}$　(×)

$BA=\begin{bmatrix}\frac12&-\frac{\sqrt3}{2}\\\frac{\sqrt3}{2}&\frac12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac12&\frac{\sqrt3}{2}\\\frac{\sqrt3}{2}&-\frac12\end{bmatrix}$

(2) $A^2=I$，$A^2B=IB=B=BI=BA^2$ (○)

$A=\begin{bmatrix}\cos0^\circ&\sin0^\circ\\\sin0^\circ&-\sin0^\circ\end{bmatrix}$ 鏡射　$B=\begin{bmatrix}\cos60^\circ&-\sin60^\circ\\\sin60^\circ&\cos60^\circ\end{bmatrix}$ 旋轉 60°

(3) $A^{11}=A$，$B^3=\begin{bmatrix}\cos180^\circ&-\sin180^\circ\\\sin180^\circ&\cos180^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=-I$

$A^{11}\cdot B^3=A\cdot(-I)=-A$

$B^6=\begin{bmatrix}\cos360^\circ&-\sin360^\circ\\\sin360^\circ&\cos360^\circ\end{bmatrix}=I$，$B^6\cdot A^5=I\cdot A$　(×)

(4) $AB^{12}=A\cdot I^2=A=A^7$ (○)

選(2)(4)(5)#

(5) $(ABA)^2=(ABA)(ABA)=ABA^2BA=ABIBA=AB^2A$，同理 $(ABA)^{15}=AB^{15}A$ (○)

EXAMPLE 6

設二階實係數方陣 A 代表坐標平面的一個鏡射變換且滿足 $A^3=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$；另設二階實係數方陣 B 代表坐標平面的一個（以原點為中心的）旋轉變換且滿足 $B^3=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，試選出正確的選項。

(1) A 恰有三種可能　(2) B 恰有三種可能　(3) $AB=BA$

(4)二階方陣 AB 代表坐標平面的一個旋轉變換　(5) $BABA=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

(1) $A^3=A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ (×)

(2) 設 $B=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\Rightarrow B^3=\begin{bmatrix}\cos3\theta & -\sin3\theta\\ \sin3\theta & \cos3\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

$\cos3\theta=-1$, $(0\le3\theta<6\pi)$

$\therefore 3\theta=\pi, 3\pi, 5\pi$, $\theta=\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi$ (○)

(3) $AB=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sin\theta & -\cos\theta\\ -\cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}$

$BA=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\theta & -\cos\theta\\ -\cos\theta & -\sin\theta\end{bmatrix}$ (×)

(4) $AB=\begin{bmatrix}-\sin\theta & -\cos\theta\\ -\cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(270^\circ-\theta) & \sin(270^\circ-\theta)\\ \sin(270^\circ-\theta) & -\cos(270^\circ-\theta)\end{bmatrix}$

是鏡射矩陣 (×)

(5) $BABA=(BA)(BA)$

$=\begin{bmatrix}\sin\theta & -\cos\theta\\ -\cos\theta & -\sin\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin\theta & -\cos\theta\\ -\cos\theta & -\sin\theta\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\sin^2\theta+\cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta\\ -\cos\theta\sin\theta+\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta+\sin^2\theta\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (○)

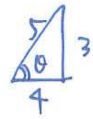
選 (2)(5)

EXAMPLE 7

在坐標平面上，考慮二階方陣 $A=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4 & -3\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ 所定義的線性變換。對於平面上異於原點 O 的點 P_1，設 P_1 經 A 變換成 P_2，P_2 經 A 變換成 P_3。令 $a=\overline{OP_1}$。

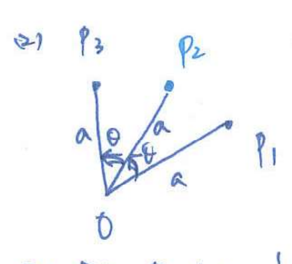
(1)試求 $\sin(\angle P_1OP_3)$。　(2)試以 a 表示 $\Delta P_1P_2P_3$ 的面積。

(3)假設 P_1 是圖形 $y=\frac{1}{10}x^2-10$ 上的動點，試求 $\Delta P_1P_2P_3$ 面積的最小可能值。

$A=\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$，其中  是旋轉 θ 角的旋轉矩陣

(1) $\sin\angle P_1OP_3=\sin2\theta=2\sin\theta\cdot\cos\theta=2\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{24}{25}$

(2)



$\Delta P_1P_2P_3$ 面積 $=\Delta OP_1P_2+\Delta OP_2P_3-\Delta OP_1P_3$

$=\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot\sin\theta-\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot\sin2\theta$

$=\frac{1}{2}a^2\left(\frac{3}{5}+\frac{3}{5}-\frac{24}{25}\right)=\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{6}{25}=\frac{3}{25}a^2$

(3) 設 $P_1\left(t, \frac{1}{10}t^2-10\right)$, $a=\overline{OP}=\sqrt{t^2+\left(\frac{1}{10}t^2-10\right)^2}=\sqrt{t^2+\frac{1}{100}(t^2)^2-2t^2+100}$

$=\sqrt{\frac{1}{100}(t^2)^2-t^2+100}=\sqrt{\frac{1}{100}\left[\left(t^2-\frac{1}{2}\right)^2\right]+75}\ge\sqrt{75}=5\sqrt{3}$

$\therefore \Delta P_1P_2P_3=\frac{3}{25}a^2\ge\frac{3}{25}\times75=9$