0-1 方程式的根

1. 解方程式的根⇒ 因式分解

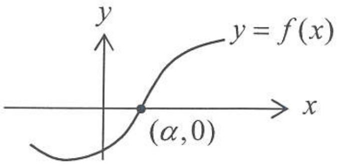
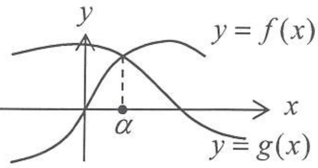
(1)因式定理：$f(x)$ 有一次因式 $(ax-b)$ ⇔ $f(\frac{b}{a})=0$ ⇔ $f(x)$ 有根 $x=\frac{b}{a}$ 。

(2)根與係數：$f(x)=ax^2+bx+c$ 有二個實根的條件為 $D=b^2-4ac\geq 0$ 。

設 $f(x)=0$ 的兩個實根為 α,β，則(1) $\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$　(2) $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ 。

2. 求方程式實根的個數⇒ 畫圖找交點

實根的意義：$f(x)=0$ 的實根表示 $y=f(x)$ 的圖形與 x軸 的交點 x 坐標。

方程式		圖形
$f(x)=0$ 的解 $x=\alpha$	$\begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \end{cases}$ 的交點 $(\alpha,0)$ 即x軸	
$f(x)=g(x)$ 的解 $x=\alpha$	$\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases}$ 的交點 $(\alpha,f(\alpha))$	

EXAMPLE 1

$f(x)=x^3-6x^2+11x-6$ 且 $f(1)=0$，求 $f(x)=0$ 的所有實根。

$f(1)=0$ 表示 $f(x)$ 有因式 $(x-1)$

$f(x)=(x-1)(x^2-5x+6)$

$=(x-1)(x-2)(x-3)$

故 $f(x)=0$ 有三根 $x=1,2,3$

EXAMPLE 2

設 $x^2-7x+2=0$ 的兩根為 α,β，求

(1) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$　(2) $(2-\alpha)(2-\beta)$

$\begin{cases} \alpha+\beta=7 \\ \alpha\beta=2 \end{cases}$，(1) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{7}{2}$

(2) $(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-7x+2$

$x=2$ 代入 ⇒ $(2-\alpha)(2-\beta)=-8$

EXAMPLE 3

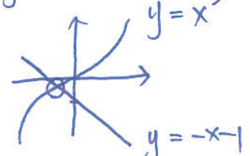
下列哪些選項的方程式恰有一個實根？

(1) $x^3+x+1=0$　(2) $10^x=x$　(3) $10^x=x^2$

(4) $x-10\sin x=0$　(5) $\sin x=10^x$

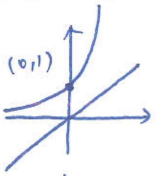
(1) $x^3=-x-1$

$\begin{cases} y=x^3 \\ y=-x-1 \end{cases}$



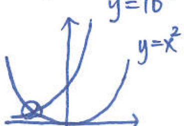
1個交點 ⇒ 1個實根

(2) $\begin{cases} y=10^x \\ y=x \end{cases}$



0個交點 ⇒ 0個實根

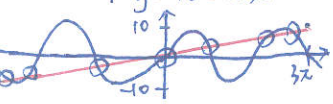
(3) $\begin{cases} y=10^x \\ y=x^2 \end{cases}$



1個交點

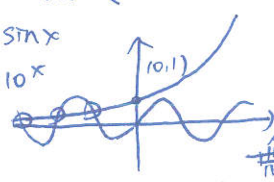
⇒ 1個實根

(4) $\begin{cases} y=x \\ y=10\sin x \end{cases}$



7個實根

(5) $\begin{cases} y=\sin x \\ y=10^x \end{cases}$



無限個交點，選(1)(3)

EXAMPLE 4

已知 $y=x(x-1)(x+1)$ 的圖形如下圖所示，設 $f(x)=x(x-1)(x+1)+0.01$，下列哪個選項正確？

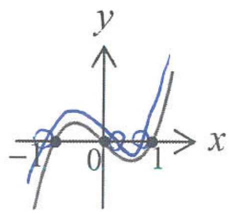
(1) $f(x)=0$ 有三個相異實根

(2) $x<-1$ 時，$f(x)=0$ 恰有一實根

(3) $-1<x<0$ 時，$f(x)=0$ 恰有一實根 (沒有實根)

(4) $0<x<1$ 時，$f(x)=0$ 恰有一實根 (2個實根)

(5) $x>1$ 時，$f(x)=0$ 恰有一實根 (沒有實根)



$y=x(x-1)(x+1)$

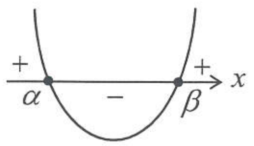
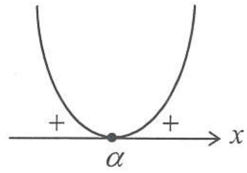
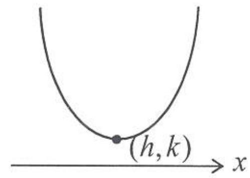
↓ 向上平移 0.01

$y=x(x-1)(x+1)+0.01$

選 (1)(2)

0-2 多項式不等式

1. 二次式 $f(x)=ax^2+bx+c$，其中 $\boxed{a>0}$，$D=$ b^2-4ac

判別式	$D>0$	$D=0$	$D<0$ (恆正)
方程式	$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$ 其中 $\alpha<\beta$	$f(x)=a(x-\alpha)^2$	$f(x)=a(x-h)^2+k$ 其中 $k>0$
圖形			
不等式	$f(x)>0\Rightarrow$ $x<\alpha$ 或 $x>\beta$ $f(x)\le 0\Rightarrow$ $\alpha\le x\le\beta$	$f(x)>0\Rightarrow$ $x\ne\alpha$ $f(x)\le 0\Rightarrow$ $x=\alpha$	$f(x)>0\Rightarrow$ x是所有實數 $f(x)\le 0\Rightarrow$ 無解

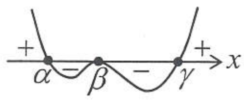
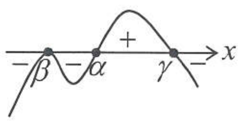
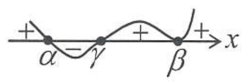
2. 高次不等式⇒ 解方程式的根

設 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ 的實根為 $\alpha,\beta,\beta,\gamma,\gamma,\gamma$。

(1)首項係數 a_n：判別函數圖形右上 $a_n>0$ 或右下 $a_n<0$

(2)奇數個重根(如 α,γ)：$y=f(x)$ 的圖形在此根穿越 x 軸。

(3)偶數個重根(如 β)：$y=f(x)$ 的圖形在此根與 x 軸相切。

條件	設 $a_n>0$ 且 $\alpha<\beta<\gamma$	設 $a_n<0$ 且 $\beta<\alpha<\gamma$	設 $a_n>0$ 且 $\alpha<\gamma<\beta$
圖形			
不等式	$f(x)<0\Rightarrow$ $\alpha<x<\beta$ 或 $\beta<x<\gamma$	$f(x)\ge 0\Rightarrow$ $\alpha\le x\le\gamma$, $x=\beta$	$f(x)>0\Rightarrow$ $x<\alpha$ 或 $\gamma<x<\beta$ 或 $x>\beta$

EXAMPLE 1

解下列各多項式不等式解的範圍。

(1) $-x^2+x+2<0$ (2) $x^2-x-1\le 0$ (3) $4x^2+12x+9>0$ (4) $(x^2+x+1)(x-2)(x+3)\le 0$

(5) $x^2(x^2-4)<0$ (6) $(x^2-4x+2)(2x-5)(2x-37)\le 0$ (7) $(x^2+5x-4)(x-1)(x+5)<(x-8)(x-1)(x+5)$

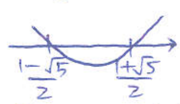
(1) $-(x^2-x-2)<0$

$\Rightarrow -(x-2)(x+1)<0$

$x<-1$ 或 $x>2$ #

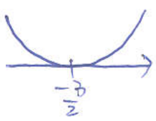
(2) $x=\frac{1\pm\sqrt5}{2}$

$(x-\frac{1-\sqrt5}{2})(x-\frac{1+\sqrt5}{2})\le 0$



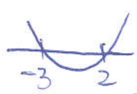
$\frac{1-\sqrt5}{2}\le x\le\frac{1+\sqrt5}{2}$ #

(3) $(2x+3)^2>0$



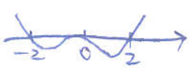
$x<-\frac{3}{2}$ 或 $x>-\frac{3}{2}$ #

(4) $x^2+x+1=0\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$ (無實根)



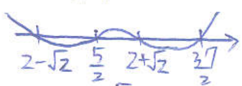
$-3\le x\le 2$ #

(5) $x^2(x-2)(x+2)<0$



$-2<x<0$ 或 $0<x<2$

(6) $x^2-4x+2=0\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt8}{2}=2\pm\sqrt2$



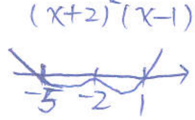
$2-\sqrt2<x<\frac{5}{2}$ 或 $2+\sqrt2<x<\frac{37}{2}$

(7) 不能做$\boxed{乘除}$ (無法判定正負)

$[(x^2+5x-4)-(x-8)](x-1)(x+5)<0$

$(x^2+4x+4)(x-1)(x+5)<0$

$(x+2)^2(x-1)(x+5)<0$



$-5<x<-2$ 或 $-2<x<1$

0-3 最大最小值

方法	使用時機	公式	等號成立
1. 配方法	二次函數	$f(x)=a(x-h)^2+k$	當 $x=h$ 時，有最大(小)值。
2. 算幾不等式	相加、相乘	$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$	當 $a=b$ 時，有最大(小)值。
3. 柯西不等式	相加、相加	$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geq(ac+bd)^2$	當 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ 時，有最大(小)值。

EXAMPLE 1

(1)設 $x>0, y>0$，$xy=8$，求 $x+2y$ 之最小值。並求此時數對 (x,y)。

(2)設 $x>0$，求 $x+\frac{4}{x}$ 的最小值。

(1) 以加法為主

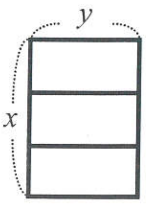
$\frac{x+2y}{2}\geq\sqrt{x(2y)} \Rightarrow \frac{x+2y}{2}\geq\sqrt{16} \Rightarrow x+2y\geq 8$

"=" 成立時, $x=2y=4$, $(x,y)=(4,2)$ #

(2) $\frac{x+\frac{4}{x}}{2}\geq\sqrt{x(\frac{4}{x})}$, $x+\frac{4}{x}\geq 4$ #

EXAMPLE 2

小華想用鐵絲圍成面積 18 平方公分的「目」字形區域（如下圖所示的灰色區域），則他至少要準備多少的鐵絲？



面積 $xy=18$,

求 $2x+4y$ 最小

$\frac{2x+4y}{2}\geq\sqrt{(2x)(4y)}$, $2x+4y\geq 24$

EXAMPLE 3

某沙漠地區某一時間的溫度函數為 $f(t)=-t^2+10t+11$，其中 $1\leq t\leq 10$，求此段時間內該地區的最大溫差。

$f(t)=-(t-5)^2+36$

當 $t=5$ 時, 有最高溫 36

$t=10$ 時, 有最低溫 11

最大溫差為 $36-11=25$ #

EXAMPLE 4

$f(x)=ax^2+bx+\frac{1}{a}$ 在 $x=2$ 時有最小值 -3，求數對 (a,b)。

當 $x=2$ 時, 有最小值 -3,

即 $f(x)=a(x-2)^2-3$, 其中 $a>0$

$=ax^2-4ax+4a-3$

$\therefore \begin{cases} b=-4a \\ \frac{1}{a}=4a-3 \end{cases}$ → $4a^2-3a-1=0$

$\Rightarrow (4a+1)(a-1)=0$

$\Rightarrow a=1$ 或 $\frac{-1}{4}$ (取正)

故 $(a,b)=(1,-4)$ #

EXAMPLE 5

設 $2x^2+3y^2=20$，求 $2x+3y$ 的最小值。並求此時數對 (x,y)。

$\left((\sqrt{2}x)^2+(\sqrt{3}y)^2\right)\left((\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2\right)\geq(2x+3y)^2$

$20\times 5\geq(2x+3y)^2$

$-10\leq 2x+3y\leq 10$, 最小值為 -10

"=" 成立時, $\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}y}{\sqrt{3}}=t \Rightarrow x=t, y=t$

$2t+3t=-10$, $t=-2$,

$(x,y)=(-2,-2)$

EXAMPLE 6

設 x,y 均為正數，且 $x+y=1$，求 $\frac{4}{x}+\frac{9}{y}$ 的最小值。

$\left((\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2\right)\left((\frac{2}{\sqrt{x}})^2+(\frac{3}{\sqrt{y}})^2\right)\geq(2+3)^2$

$1\cdot(\frac{4}{x}+\frac{9}{y})\geq 25$

最小值為 25

1-1 實數系

1. 數系：

- 實數(R)
  - 有理數(Q)
    - 整數(Z)
      - 正整數(N)
      - 0
      - 負整數
    - 分數 (有限小數.循環小數)
  - 無理數 (無限不循環小數)

2. 整數的離散性：若 a,b 為相異整數，則 $|a-b|\geq 1$ 。

   <c.f.>有理數(無理數、實數)的稠密性：若 a,b 為相異有理數，則必存在有理數 c 介於 a,b 之間。

3. 分數可以化成有限小數的條件：最簡分數的 分母 質因數僅有 2或5 。$(\frac{a}{10^n})$

4. 循環小數化分數：$0.\overline{ab}=\frac{ab}{99}$、$0.a\overline{bc}=\frac{abc-a}{990}$、$a.\overline{bc}=\frac{abc-a}{99}$ 。

   <規則>分子：全部的數減去不部循環的數。

   分母：小數點後有循環的寫 9，沒循環的寫 0。

5. 雙根號化簡：若 $a>b$，則

   (1) $\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=$ $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 。 (2) $\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=$ $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 。

EXAMPLE 1

已知 $|a-1|+2\sqrt{b-2}+3(c-3)^2=2$ 且 a,b,c 為均為整數，求序對 (a,b,c) 共有幾組解？

解 係數大的先討論

若 $c\neq 3 \Rightarrow 3(c-3)^2\geq 3$ (不合)，故 $c=3$

若 $b\neq 2 \Rightarrow 2\sqrt{b-2}\geq 2 \Rightarrow b=3$，此時 $|a-1|=0$，即 $a=1$

若 $b=2 \Rightarrow |a-1|=2$，$a=3$ 或 -1

故 $(a,b,c)=(1,3,3)$ 或 $(3,2,3)$ 或 $(-1,2,3)$

EXAMPLE 2

設 a 是 0 到 9 中的一個整數，且 $\frac{12345a}{36}$ 可以化成有限小數，求 a 值。

解 有限小數 ⇒ 分母僅 2 或 5

分母 $36=2^2\times 3^2$ 為有限小數，故

$12345a$ 是 9 的倍數

$\Rightarrow 1+2+3+4+5+a=15+a$ 是 9 的倍數，

得 $a=3$

EXAMPLE 3

設 a,b 均為正整數且 $\frac{b}{a}=0.2\overline{3}$，求 $a-b$ 的最小值。

$\frac{b}{a}=0.2\overline{3}=\frac{23-2}{90}=\frac{21}{90}=\frac{7}{30}$

故 $a-b$ 最小值為 23

EXAMPLE 4

有關循環小數，下列何者正確？

(1) $0.\overline{3}+0.\overline{7}=1.\overline{1}$ (2) $0.\overline{45}+0.\overline{55}=1$

(3) $0.\overline{2}+0.\overline{3}=\cancel{1.\overline{5}}$ $0.\overline{5}$ (4) $0.\overline{9}=1$

(1) $0.\overline{3}=\frac{3}{9}$, $0.\overline{7}=\frac{7}{9}$, $1.\overline{1}=\frac{11-1}{9}=\frac{10}{9}$ (o)

(2) $0.\overline{45}=\frac{45}{99}$, $0.\overline{55}=\frac{55}{99}$ (x)

(3) $0.\overline{2}=\frac{2}{9}$, $0.\overline{3}=\frac{3}{9}$, $0.\overline{5}=\frac{5}{9}$ (o)

(4) $0.\overline{9}=\frac{9}{9}$ (o) ， 選 (1)(3)(4)

EXAMPLE 5

將 $\frac{79}{555}$ 化為小數，求小數點後第 100 位數字。

① 找規律

$\frac{79}{555} = 0.1\overline{423}$

$$\begin{array}{r} 0.1423 \\ 555\,\overline{)790} \\ 555 \\ \hline 2350 \\ 2220 \\ \hline 1300 \\ 1110 \\ \hline 1900 \\ 1665 \\ \hline 2350 \end{array}$$

故小數點後第 100 位數字為 3

EXAMPLE 6

已知 $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$ 的整數部位為 a，小數部分為 b，求 $a-b$ 的值。

$\begin{cases} 6 = 5+1 \\ 5 = 5\times 1 \end{cases}$

$\sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{5}-\sqrt{1} \approx 1.\cdots$

故 $a=1$，$b=\sqrt{5}-1-1=\sqrt{5}-2$

$\therefore a-b = 1-(\sqrt{5}-2) = 3-\sqrt{5}$

EXAMPLE 7

關於有理數、無理數的敘述，下列何者正確？

(1)若 a,b 都是無理數，則 $a+b$ 是無理數。

(2)若 a 是有理數，b 是無理數，則 $a+b$ 是無理數。

(3)若 a 是有理數，b 是無理數，則 ab 是無理數。

(4)若 $a+b, a-b$ 都是有理數，則 a,b 都是有理數。

(5)若 $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$，則 $a=c$ 且 $b=d$。

a	b	$a\pm b$	$a\times b$	$\frac{a}{b}$
有理	有理	有理	有理	有理
有理	無理	無理	有or無	有or無
無理	無理	無or有	無or有	無or有

※ 2-2、2-3：若 $a\neq 0$，ab 必為無理數

3-1, 3-2, 3-3：取 $a=b=\sqrt{2}$

(1) $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})$ (×)

(2) 反證法：若 $a+b=r$ 是有理

$\Rightarrow b=r-a$ 是有理 ($\rightarrow\leftarrow$)

故 r 必為無理

(3) 取 $a=0$ (×)

(4) $a=\frac{(a+b)+(a-b)}{2}$

$b=\frac{(a+b)-(a-b)}{2}$ (○)

(5) 需有前提 a,b,c,d 為有理數。

否則取 $a=\sqrt{2}, b=0, c=0, d=1$ (×)

選 (2)(4)

EXAMPLE 8

設 n 是正整數且 $n<\sqrt{13+2\sqrt{40}}<n+1$，求 n 值。

① 估計 $\sqrt{\ }$ 值 ⇒ 丟進 $\sqrt{\ }$ 內

$\sqrt{13+2\sqrt{40}} = \sqrt{13+\sqrt{160}} \approx \sqrt{25.\cdots} \approx 5.\cdots$

故 $n=5$

1-2 乘法公式

3. 平方公式：

(1) $(a+b)^2 =$ a^2+b^2+2ab

(2) $(a+b+c)^2 =$ $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

(3) $(a-b)^2 =$ a^2+b^2-2ab

(4) $(a+b)(a-b) =$ a^2-b^2

4. 立方公式：

(1) $(a+b)^3 =$ $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

(2) $(a-b)^3 =$ $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(3) $a^3+b^3 =$ $(a+b)(a^2-ab+b^2)$

(4) $a^3-b^3 =$ $(a-b)(a^2+ab+b^2)$

EXAMPLE 1

設 $x=\sqrt{5}-2$，求下列各式的值。

(1) $x+\frac{1}{x}$ (2) $x^2+\frac{1}{x^2}$ (3) $x^3+\frac{1}{x^3}$

(1) $x+\frac{1}{x} = \sqrt{5}-2+\frac{1}{\sqrt{5}-2} = \sqrt{5}-2+\sqrt{5}+2 = 2\sqrt{5}$

(2) $x^2+\frac{1}{x^2} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2 = (2\sqrt{5})^2-2 = 18$

(3) $x^3+\frac{1}{x^3} = \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

$= (2\sqrt{5})(18-1) = 34\sqrt{5}$

EXAMPLE 2

關於下列不等式，請選出正確的選項。

(1) $\sqrt{13}>3.5$ (2) $\sqrt{13}<3.6$ (3) $\sqrt{13}-\sqrt{3}>\sqrt{10}$

(4) $\sqrt{13}+\sqrt{3}>\sqrt{16}$ (5) $\frac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{3}}>0.6$

(1) $3.5^2=12.25$ (○)

(2) $3.6^2=12.96$ (×)

(3) $\sqrt{13}-\sqrt{3} \approx (3.\cdots)-(1.\cdots)<3$

$\sqrt{10}\approx 3.\cdots$ (×)

(4) $\sqrt{13}+\sqrt{3} \approx (3.\cdots)+(1.\cdots)>4$

$\sqrt{16}=4$ (×)

(5) $\frac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{13}+\sqrt{3}}{10} < \frac{6}{10}$ (×)

選 (1)

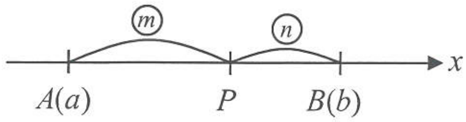
1-3 絕對值

1. 分點公式：設 A,B 兩點在數線上的坐標分別為 a,b，則

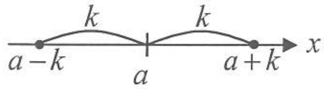
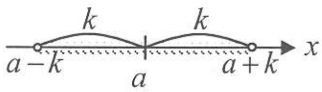
 (1) A,B 兩點間的距離 $\overline{AB}=$ $|a-b|$ 。

 (1)若 P 為 A,B 的中點，則 P 點坐標為 $\frac{a+b}{2}$，亦即 $P=$ $\frac{A+B}{2}$ 。

 (2)若 P 在 $\overline{AB}$ 上且 $\overline{PA}:\overline{PB}=m:n$，則 P 點坐標為 $\frac{mb+na}{m+n}$，亦即 $P=$ $\frac{mB+nA}{m+n}$ 。



2. 絕對值

	[想法一]距離	[想法二]正負(討論)
$\lvert x\rvert$	表示 x 到原點的距離	①當 $x\geq 0$ 時：$\lvert x\rvert=x$ ②當 $x\leq 0$ 時：$\lvert x\rvert=-x$
$\lvert x-a\rvert$	表示 x 到點 a 的距離	①當 $x\geq a$ 時：$\lvert x-a\rvert=x-a$ ②當 $x\leq a$ 時：$\lvert x-a\rvert=-(x-a)$
$\lvert x-a\rvert=k$	 得 $x=a+k$ 或 $a-k$	①當 $x\geq a$ 時：$x-a=k$，得 $x=a+k$ ②當 $x\leq a$ 時：$-(x-a)=k$，得 $x=a-k$ 由①、②知 $\Rightarrow x=a+k$ 或 $a-k$
$\lvert x-a\rvert<k$	 得 $a-k<x<a+k$	①當 $x\geq a$ 時：$x-a<k$，得 $x<a+k$ ②當 $x\leq a$ 時：$-(x-a)<k$，得 $x>a-k$ 由①、②(取聯集)知 $\Rightarrow a-k<x<a+k$

3. 區間符號

 區間 (a,b) 表示 $a<x<b$　　區間 $[a,b]$ 表示 $a\leq x\leq b$　　區間 $[a,\infty)$ 表示 $x\geq a$

 區間 $[a,b)$ 表示 $a\leq x<b$　　區間 (∞,a) 表示 $x<a$　　區間 $(2,\infty)$ 表示 $x>2$

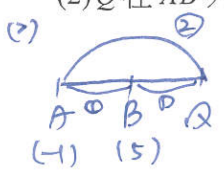
EXAMPLE 1

數線上兩點 $A(-1)$、$B(5)$，

(1) P 在 $\overline{AB}$ 上且 $\overline{AP}:\overline{PB}=2:1$，求 P 點坐標。

(2) Q 在 $\overline{AB}$ 外且 $\overline{AQ}:\overline{QB}=2:1$，求 P 點坐標。

(2)

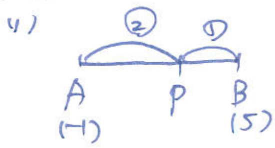


$B=\frac{A+Q}{2}$

$\Rightarrow Q=2B-A$

$=10-(-1)=11$

(1)

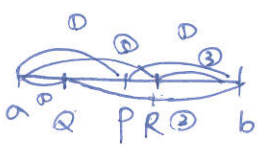


$P=\frac{2\cdot 5+1\cdot(-1)}{2+1}=3$

EXAMPLE 2

設 $a<b$，試比較 P,Q,R 的大小：

$P=\frac{a+b}{2}$、$Q=\frac{3a+b}{4}$、$R=\frac{3a+5b}{8}$。



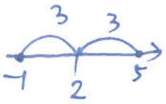
[法二] 取 $a=0,\ b=1$

$Q<P<R$

EXAMPLE 3

解下列方程式：(1)$|x-2|=3$　(2)$|2x+3|=5$　(3)$|x+1|=|2x+1|-2$

(1) [法一]



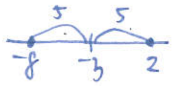
$\therefore x=-1$ 或 5

[法二] $x-2=\pm 3$

$x=2\pm 3$

$=-1$ 或 5

(2) $|2x-(-3)|=5$



$\therefore 2x=-8$ 或 2，$x=-4$ 或 1

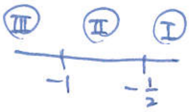
[法二] $2x+3=\pm 5$

$2x=-3\pm 5$

$2x=-8$ 或 2

$x=-4$ 或 1

(3) 討論



Ⅰ $x\geq -\frac{1}{2}$：$x+1=2x+1-2$，$x=2$（合）

Ⅱ $-1\leq x\leq -\frac{1}{2}$：$x+1=-(2x+1)-2$，$3x=-4$

$x=\frac{-4}{3}$（不合）

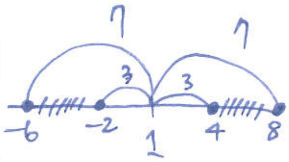
Ⅲ $x\leq -1$：$-(x+1)=-(2x+1)-2$，$x=-2$（合）

由Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ知：$x=2$ 或 -2

EXAMPLE 4

解下列不等式：(1)$3\leq|2x-1|<7$　(2)$|x+2|>2x$　(3)$|x+1|+|x-3|<8$

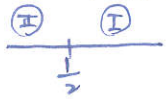
(1) [法一]



$-6<2x\leq -2$ 或 $4\leq 2x<8$

$\Rightarrow -3<x\leq -1$ 或 $2\leq x<4$

[法二]



Ⅰ $x\geq \frac{1}{2}$：$3\leq 2x-1<7$，$4\leq 2x<8$

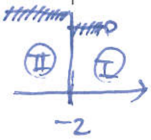
$\Rightarrow 2\leq x<4$

Ⅱ $x\leq \frac{1}{2}$：$3\leq -2x+1<7$，$2\leq -2x<6$

$\Rightarrow -1\geq x>-3$

Ⅰ.Ⅱ 取聯集得 $-3<x\leq -1$ 或 $2\leq x<4$

(2)



Ⅰ $x\geq -2$：$x+2>2x$，$x<2$

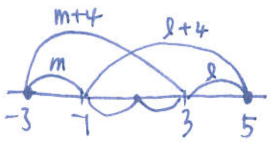
故 $-2\leq x<2$

Ⅱ $x\leq -2$：$-(x+2)>2x$，$x<\frac{-2}{3}$

故 $x\leq -2$

由Ⅰ.Ⅱ 取聯集得 $x<2$

(3) [法一]



Ⅰ：$2l+4<8$，$l<2$，取 $x=5$

Ⅱ：$|x+1|+|x-3|=4$，均符合

Ⅲ：$2m+4<8$，$m<2$，取 $x=-3$

故 $-3<x<5$

[法二]

Ⅰ $x\geq 3$：$x+1+x-3<8$，$2x<10$，$x<5$

故 $3\leq x<5$

Ⅱ $-1\leq x\leq 3$：$(x+1)+(3-x)<8$，$4<8$

故 $-1\leq x\leq 3$

Ⅲ $x\leq -1$：$-(x+1)-(x-3)<8$，$-2x<6$，$x>-3$

故 $-3<x\leq -1$

由Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ知

$-1<x<5$

EXAMPLE 5

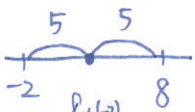
求下列各條件之 a,b 值。

(1)$|x-a|\leq b$ 的解為 $-2\leq x\leq 8$

(2)$|ax+3|<b$ 的解為 $-1\leq x\leq 4$

修正

(1)

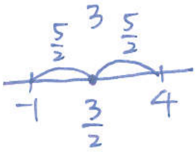


$\frac{8+(-2)}{2}=3$

$\Rightarrow |x-3|\leq 5$

$a=3$，$b=5$

(2)



$\Rightarrow |x-\frac{3}{2}|\leq \frac{5}{2}$

$\Rightarrow |2x-3|\leq 5$

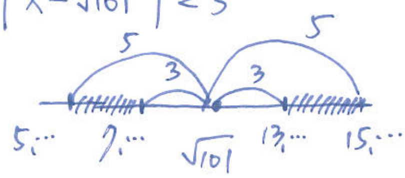
$\Rightarrow |-2x+3|<5$

$a=-2$，$b=5$

EXAMPLE 6

數線上有多少個整數點與 $\sqrt{101}$ 的距離小於 5，但與 $\sqrt{38}$ 的距離大於 3？

$3<|x-\sqrt{101}|<5$



故 $x=6,7,14,15$

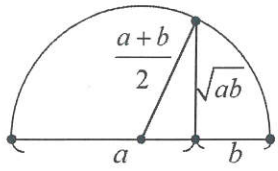
1-4 算幾不等式

1. 算幾不等式⇒使用時機：相加、相乘

設 $a,b>0$，則 $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ 。

「＝」成立時，$a=b$ 。

★常見的條件限制：若 $x>0$，$x+\dfrac{1}{x}$ ≥ 2 。



<c.f.>配方法⇒使用時機：二次函數

EXAMPLE 1

(1)設 $a>0,b>0$，$4a^2+9b^2=36$，求 $2ab$ 之最小值。並求此時數對 (a,b)。

(2)設 $x>0$，求 $2x+\dfrac{1}{8x}$ 的最小值。

(1)

$$\frac{4a^2+9b^2}{2}\geq\sqrt{(4a^2)(9b^2)}$$

$\Rightarrow 18\geq 6ab$, $2ab\leq 6$

"=" 成立 $4a^2=9b^2=18$, $a=\frac{3}{\sqrt{2}}$, $b=\sqrt{2}$

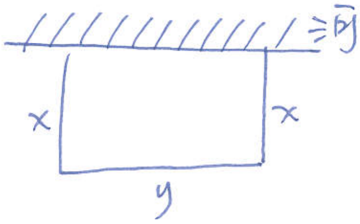
(2)

$$\frac{2x+\frac{1}{8x}}{2}\geq\sqrt{(2x)\left(\frac{1}{8x}\right)}=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow 2x+\frac{1}{8x}\geq 1$

EXAMPLE 2

一條繩子長 60 公尺，沿筆直的河邊圍成一個長方形，河邊不必使用繩子，問這條繩子圍成的長方形最大面積是多少？



繩長 $=2x+y$

面積 $=xy$