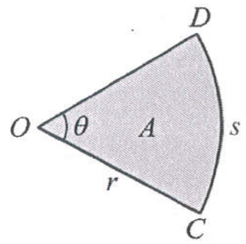
1-1 弧度

1. 弧度量與度度量的轉換：

(1) π (弳) $=180°$　　(2) 1 (弳) $=\dfrac{180°}{\pi}\approx$ $57°$

2. 扇形公式：



已知扇形的中心角為 θ，半徑為 r，則

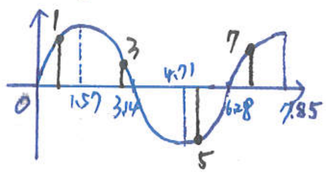
(1)扇形弧長 $s=$ $r\cdot\theta$　　(2)扇形面積 $A=$ $\frac{1}{2}r^2\theta$

EXAMPLE 1

若 $a=\sin 1$、$b=\sin 3$、$c=\sin 5$、$d=\sin 7$，試比較此四者的大小，則最大的數為______。（用 a、b、c、d 表示）

答案：a

◎ 角度越大，值越大
（sin 在第一象限）



$\sin 1\approx\sin 57°$

$\sin 3\approx\sin 171°=\sin 9°$

$\sin 5\approx\sin 285°=-\sin 15°$

$\sin 7\approx\sin 399°=\sin 39°$

$\therefore a>d>b>c$

a #

EXAMPLE 2

請問 $\cos 1$、$\cos 2$、$\cos 3$、$\cos 4$、$\cos 5$ 這五個數值的中位數是哪一個？

(1) $\cos 1$　(2) $\cos 2$　(3) $\cos 3$　(4) $\cos 4$　(5) $\cos 5$

答案：(2)

◎ 角度越大，值越小
（cos 在第一象限）

$\cos 1\approx\cos 57°$

$\cos 2\approx\cos 114°=-\cos 66°$

$\cos 3\approx\cos 171°=-\cos 9°$

$\cos 4\approx\cos 228°=-\cos 48°$

$\cos 5\approx\cos 285°=\cos 75°$

$\therefore \cos 57°>\cos 75°>-\cos 66°>-\cos 48°>-\cos 9°$

選 (2) #

EXAMPLE 3

關於三角函數值的大小，下列哪些選項是正確的？

(1) $\cos 2>\cos 1$　(2) $\sin 2>\sin 1$

(3) $\cos\pi^2>\cos\dfrac{4\pi}{3}$　(4) $\sin\pi^2<\sin\dfrac{4\pi}{3}$

(5) $\tan 3>\tan 3°$

答案：(2)

(1) $\cos 2\approx\cos 114°=-\cos 66°<0$ (x)

$\cos 1\approx\cos 57°>0$

(2) $\sin 2\approx\sin 114°=\sin 66°$

$\sin 1\approx\sin 57°$　$\therefore \sin 2>\sin 1$ (o)

(3) $\cos\pi^2\approx\cos 3.14\pi=\cos 1.14\pi=-\cos 0.14\pi$

$\cos\frac{4\pi}{3}\approx\cos 1.33\pi=-\cos 0.33\pi$　$\therefore \cos\frac{4\pi}{3}>\cos\pi^2$ (x)

(4) $\sin\pi^2\approx\sin 3.14\pi=\sin 1.14\pi$
$=-\sin 0.14\pi$

$\sin\frac{4}{3}\pi\approx\sin 1.33\pi=-\sin 0.33\pi$

$\therefore \sin\pi^2>\sin\frac{4\pi}{3}$ (x)

(5) $\tan 3\approx\tan 171°<0$ (x)

選 (2) #

EXAMPLE 4

設 $a=\sin\dfrac{25\pi}{11}$，$b=\cos\dfrac{9\pi}{11}$，$c=\tan\dfrac{3\pi}{11}$，下列選項何者正確？

(1) $c>b>a$　(2) $c>a>b$　(3) $b>a>c$

(4) $a>b>c$　(5) $a>c>b$。

答案：(2)

$a=\sin\frac{3\pi}{11}>0$

$b=-\cos\frac{2\pi}{11}<0$

$c=\dfrac{\sin\frac{3\pi}{11}}{\cos\frac{3\pi}{11}}$

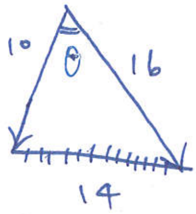
$\therefore c>a>b$

選 (2) #

EXAMPLE 5

有一時鐘的時針長度為 10 公分，分針長度為 16 公分。假設時針針尖每分鐘所移動的弧長都相等。試問在七點與七點半之間，時針針尖與分針針尖的距離最接近 14 公分是在七點______分。（四捨五入取至最接近的整數分鐘）

答案：27



$\cos\theta = \dfrac{10^2+16^2-14^2}{2\cdot 10\cdot 16} = \dfrac{1}{2}$

$\theta = 60^\circ$

設現在時間為7點 x 分.

則時針與正y軸之夾角

$360^\circ\times\dfrac{7}{12} + 360^\circ\times\dfrac{1}{12}\times\dfrac{x}{60}$

$= 210^\circ + \left(\dfrac{x}{2}\right)^\circ$

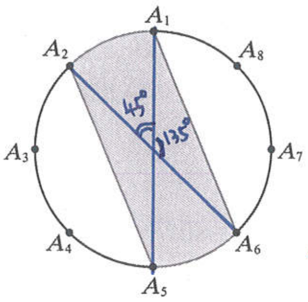
分針與正y軸之夾角為 $360^\circ\times\dfrac{x}{60} = (6x)^\circ$

$\therefore\ 210^\circ + \left(\dfrac{x}{2}\right)^\circ - (6x)^\circ \approx 60^\circ \Rightarrow \dfrac{11}{2}x = 150,\ x = \dfrac{300}{11} \approx 27$ #

EXAMPLE 6

如附圖，A_1，A_2，……，A_8 八個點將圓的圓周八等分，並連接 $\overline{A_1A_6}$ 及 $\overline{A_2A_5}$。已知圓的半徑為 2，則鋪色區域(即兩線段 $\overline{A_1A_6}$ 及 $\overline{A_2A_5}$ 與兩弧長 A_1A_2 及 A_5A_6 所圍成的區域）的面積為______。

答案：$\pi + 2\sqrt{2}$



$\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot \sin 135^\circ \times 2$

$+\ \pi\cdot 2^2\cdot \dfrac{45^\circ}{360^\circ}\times 2$

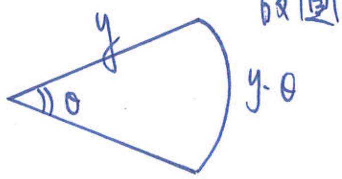
$= 2\sqrt{2}+\pi$ #

EXAMPLE 7

一條長度為 40 的鐵絲圍成一扇形，若面積最大值為 x，且此時圓半徑為 y，則數對$(x，y)$＝______。

答案：100；10

設圓心角 θ (弳)



鐵絲長 $= 2y + y\cdot\theta = 40$

面積 $x = \dfrac{1}{2}\cdot y^2\cdot\theta$

由算幾不等式得

$\dfrac{2y+y\theta}{2} \geq \sqrt{(2y)(y\theta)}$

$\Rightarrow 20 \geq \sqrt{2y^2\theta}$

$\Rightarrow 2y^2\theta \leq 400$

$\Rightarrow \underset{x}{\underset{\shortparallel}{\dfrac{1}{2}y^2\theta}} \leq 100$

此時, $2y = y\theta$,

即 $\theta = 2$.

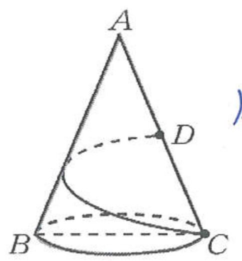
得 $y = 10$

$(x,y) = (100,10)$ #

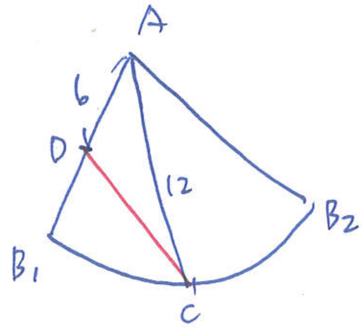
EXAMPLE 8

如右圖，直圓錐底直徑＝8，且 AB 長為 12，若一隻螞蟻由 C 點沿錐面繞一圈到 D 點，已知 AD 長為 6，求螞蟻所走的最短路徑長為______。

答案：



展開 →



弧 $\overset{\frown}{B_1B_2}$ = 底圓周長 $= 2\pi\times 4 = 8\pi$

$\angle B_1AB_2 = \dfrac{8\pi}{2\pi\times 12} = \dfrac{\pi}{3} = 60^\circ$

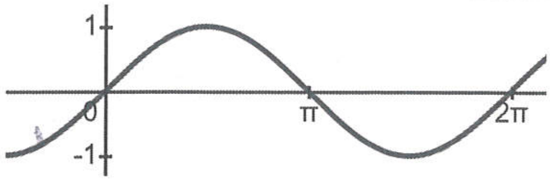
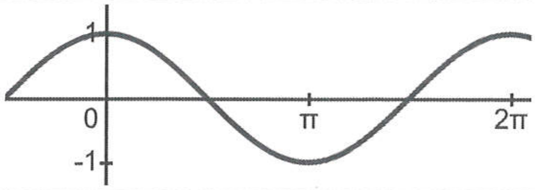
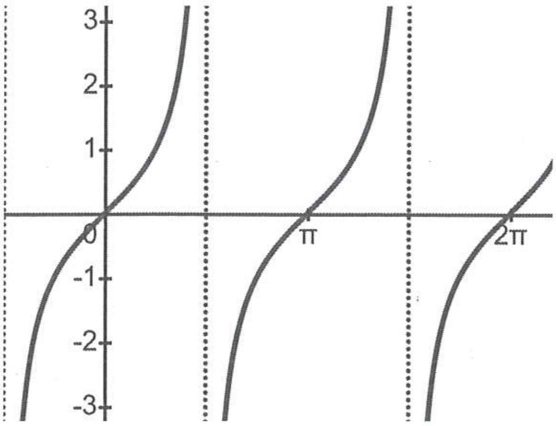
$\therefore\ \angle DAC = 30^\circ$

$\overline{CD} = \sqrt{6^2+12^2-2\times 6\times 12\times\cos 60^\circ}$

$= 6\sqrt{1+4-2\times 1\times 2\times\frac{1}{2}} = 6\sqrt{3}$ #

1-2 三角函數的圖形

1. 三角函數的圖形與性質：

函數	圖形	振幅	週期	對稱軸	對稱中心
$y=\sin x$		1	2π	通過最高(低)點的鉛直線	與 x 軸的交點
$y=\cos x$		1	2π		
$y=\tan x$		×	π	×	

2. 函數圖形的平移伸縮

(1)向右平移 h 單位　：$y=f(x) \xleftrightarrow{x\to x-h}$ $y=f(x-h)$

(2)向上平移 k 單位　：$y=f(x) \xleftrightarrow{y\to y-k}$ $y=f(x)+k$

(3)水平方向伸縮 s 倍：$y=f(x) \xleftrightarrow{x\to \frac{x}{s}}$ $y=f(\frac{x}{s})$

(4)鉛直方向伸縮 t 倍：$y=f(x) \xleftrightarrow{y\to \frac{y}{t}}$ $y=t\cdot f(x)$

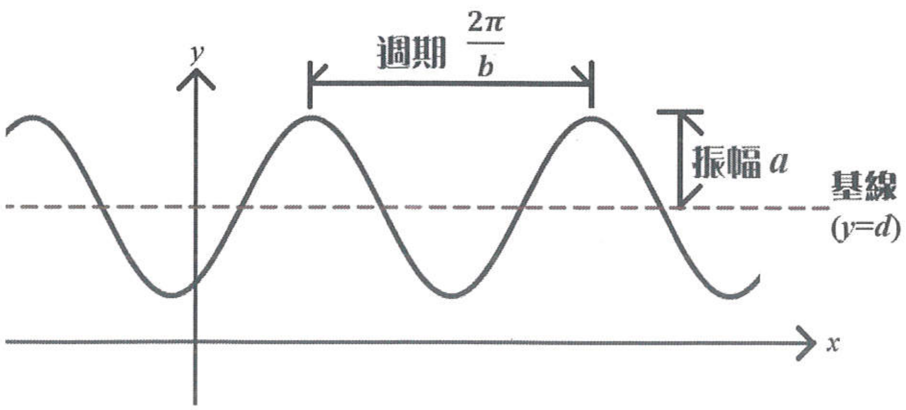
3. $y=a\sin(bx+c)+d$ 的意義

(1) a ：鉛直方向伸縮 a 倍 ⇒振幅為 a

(2) b ：水平方向伸縮 $\frac{1}{b}$ 倍 ⇒週期為 $\frac{2\pi}{b}$

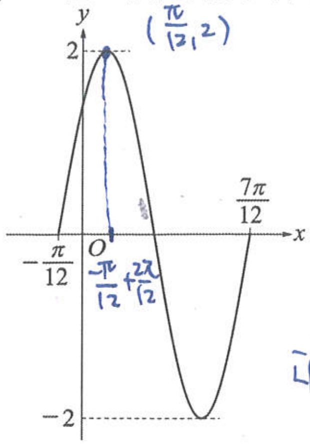
(3) d ：鉛直方向平移 d ⇒基線為 $y=d$

(4) c ：左右平移(可以用點代入求得)



EXAMPLE 1

附圖是函數 $y=a\sin(bx+c)$，其中 $a>0$，$b>0$，$|c|<\pi$ 在一個週期內的圖形，求實數 c 值。



答案：$\frac{\pi}{4}$

振幅 $a=2$

週期 $\frac{2\pi}{b}=\frac{8}{12}\pi$

$\Rightarrow b=3$

通過點 $(\frac{-\pi}{12},0)$

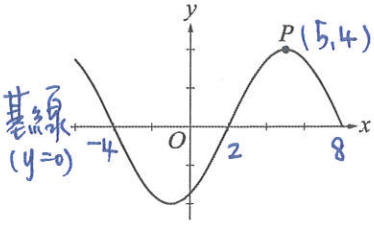
$\Rightarrow 0=2\cdot\sin(3\cdot\frac{-\pi}{12}+c)$

$\Rightarrow \sin(\frac{-\pi}{4}+c)=0$，$c=\frac{\pi}{4}$ or $\underbrace{\frac{-3\pi}{4}}_{(不合)}$

$(\frac{\pi}{12},2)$ 代入 $\Rightarrow 2=2\sin(3\cdot\frac{\pi}{12}+c)$，$\sin(\frac{\pi}{4}+c)=1$，$c=\frac{\pi}{4}$ #

EXAMPLE 2

已知 $a>0$，$b>0$，$0<c<\pi$，函數 $f(x)=a\cos(bx-c)$ 的部分圖形如圖所示，其中 $P(5,4)$ 為最高點，-4，2，8 為與 x 軸交點的橫坐標，求 c 值。



答案：$\frac{5}{6}$

振幅 $a=4$

週期 $\frac{2\pi}{b}=12$，

$b=\frac{\pi}{6}$

$P(5,4)$ 代入 $\Rightarrow 4=4\cos(\frac{\pi}{6}\cdot5-c)$

$\Rightarrow \cos(\frac{5\pi}{6}-c)=1$

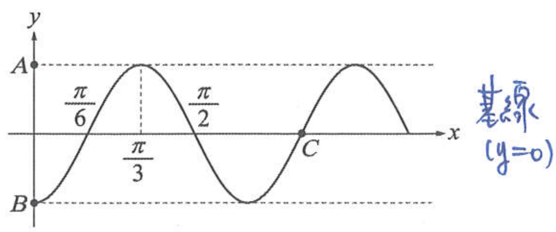
$\therefore c=\frac{5\pi}{6}$

EXAMPLE 3

附圖為三角函數 $y=3\sin(ax-b)$ 的部分圖形，其中 $a>0$，則下列各項敘述何者正確？

(1) $B(0,-3)$　(2) $b=\frac{\pi}{6}$　(3) $C\left(\frac{5\pi}{6},0\right)$

(4) y 的週期為 $\frac{2\pi}{3}$　(5)其圖形可由 $y=3\sin3x$ 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 而得。



(1) ∵ 振幅為 3　∴ $B(0,-3)$

(4) 週期 $=(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6})\times2=\frac{2\pi}{3}$ (o) $\Rightarrow \frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{a}\Rightarrow a=3$

(2) 最低點 $(0,-3)$ 代入 $-3=3\sin(-b)$，

$\sin(-b)=-1$，$-b=\frac{-\pi}{2}+2k\pi$，$b=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，其中 $k\in\mathbb{Z}$ (x)

(3) $C(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3},0)=(\frac{5\pi}{6},0)$ (o)

(5) $y=3\sin3x$ 向右移 $\frac{\pi}{6}$ 為 $y=3\sin[3(x-\frac{\pi}{6})]=3\sin(3x-\frac{\pi}{2})$ (o)

選 (1)(3)(4)(5) #

EXAMPLE 4

關於函數 $f(x)=2\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)+5$，試問下列選項何者為真？

(1)將函數 $\cos x$ 的圖形先沿垂直方向伸長 2 倍，水平方向壓縮為 $\frac{1}{3}$ 倍，再向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 單位，向上平移 5 單位可得 $f(x)$ 的圖形

(2) $f(x)$ 的圖形與 $g(x)=2\sin3x+5$ 的圖形相同

(3) $f(3)<0$　(4) $f(x)$ 的週期為 $\frac{2\pi}{3}$

(5) $f(x)$ 的圖形對稱於直線 $x=\frac{11\pi}{6}$。

答案：(1)(2)(4)(5)

(1) $y=\cos x \xrightarrow{y\to\frac{y}{2}} y=2\cos x \xrightarrow{x\to3x} y=2\cos3x \xrightarrow{x\to x-\frac{\pi}{6}}$

$y=2\cos[3(x-\frac{\pi}{6})] \xrightarrow{y\to y-5} y=2\cos(3x-\frac{\pi}{2})+5$ (o)

(2) $2\cos(3x-\frac{\pi}{2})=2\cos(\frac{\pi}{2}-3x)=2\sin3x$ (o)

(3) $f(3)=2\cos(9-\frac{\pi}{2})+5\geq5-2=3$ (x)

(4) $\frac{2\pi}{3}$ (o)

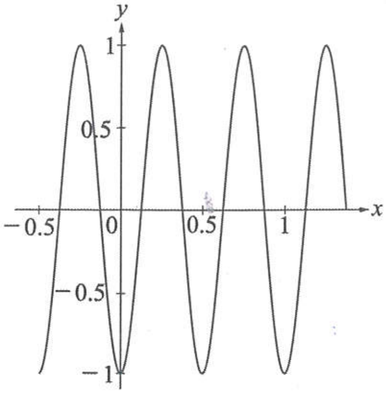
(5) $x=\frac{11}{6}\pi$

$\Rightarrow \cos(\frac{11}{2}\pi-\frac{\pi}{2})=\cos5\pi=-1$

∴ 是通過最低點的鉛直線 (o)

EXAMPLE 5

附圖是 $y=\cos\pi(ax+b)$ 的函數圖形，$a>0$，$b>0$，則所有可能的 $a+b$ 之值中，求最小的正數。



答案：5

$y=\cos(a\pi x+b\pi)$

週期 $=0.5=\dfrac{2\pi}{a\pi}\Rightarrow a=4$

最低點 $(0,-1)$ 代入 $\Rightarrow -1=\cos(b\pi)$,

$b\pi=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z},\ b=1,3,5,7,\cdots$

$a+b$ 最小正數為 $4+1=\underline{5}_{\#}$

EXAMPLE 6

若 k 為正整數，且函數 $f(x)=4\sin\left(\dfrac{kx}{3}+\pi\right)$ 的週期不大於 1，則 k 的最小值為？

(1) 19 (2) 20 (3) 21 (4) 22

答案：(1)

週期為 $\dfrac{2\pi}{\frac{k}{3}}=\dfrac{6\pi}{k}<1$

$\therefore k>6\pi\approx 18.\cdots \Rightarrow \underline{k=19}_{\#}$

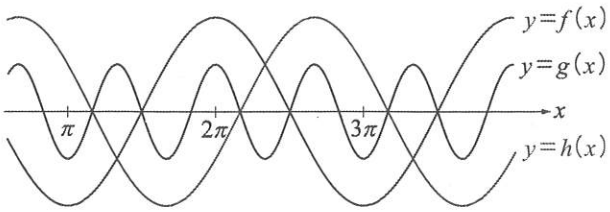
EXAMPLE 7

附圖是 $y=2\cos x$，$y=\cos 3x$，$y=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的部分圖形，則下列哪些選項是正確的？

(1) $y=f(x)$ 與 $y=h(x)$ 的週期相同 (2) $y=\cos 3x$ 圖形為 $y=f(x)$

(3) $y=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 圖形為 $y=f(x)$ (4) $y=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的圖形向左平移 $\dfrac{2\pi}{3}$，即得 $y=2\cos x$ 的圖形

(5) $y=\cos 3x$ 的圖形經水平伸縮為原本的 $\dfrac{1}{3}$ 倍，再鉛直伸縮為原本的 2 倍，即得 $y=2\cos x$ 的圖形。



答案：(1)(4)

∵ $x=\pi$ 是最低點

$y=2\cos x$ 的週期為 $2\pi \longrightarrow y=f(x)$

$y=\cos 3x$ 的週期為 $\dfrac{2\pi}{3} \longrightarrow y=g(x)$

$y=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的週期 $2\pi \longrightarrow y=h(x)$

(1) (O) (2) (X) (3) (X)

(4) $y=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\xrightarrow{x\to x+\frac{2\pi}{3}}$

$y=2\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

$=2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$

$=2\cos x$ (O)

(5) $y=\cos 3x\xrightarrow{x\to\frac{x}{\frac{1}{3}}=3x}\cos 3(3x)$

$=\cos 9x$

(X)

選 (1)(4)#

EXAMPLE 8

在下列敘述中，選出正確的敘述

(1)將 $y=\sin x$ 的圖形以（π，0）為中心，旋轉 180°後，可得到相同圖形

(2) $y=\sin x$ 以 y 軸為中心水平伸縮 $\frac{1}{2}$ 倍，可得函數 $y=\sin 2x$

(3) $y=2\sin x$ 與 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 有相同的週期 (4) $y=\sin x$ 以 y 軸為中心水平伸縮 2 倍，再右移 2 單位可以得到函數 $y=\sin\left(\frac{x}{2}-2\right)$

(5) $y=\sin x$ 的圖形只有 2 條對稱軸。

答案：(1)(2)(3)

(1) $(\pi,0)$ 為對稱中心 (o)

(2) $y=\sin x \xrightarrow{x\to\frac{x}{2}} y=\sin 2x$ (o)

(3) $y=2\sin x$ 週期 2π

$y=\sin(x+\frac{\pi}{3})$ 週期為 2π

(4) $y=\sin x \xrightarrow{x\to\frac{x}{2}} y=\sin\frac{x}{2} \xrightarrow{x\to x-2} y=\sin\frac{x-2}{2}$ (x)

(5) 通過最高(低)点的鉛直線（無限多條）(x)

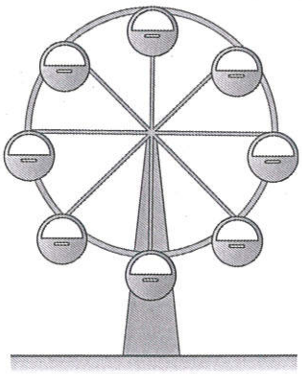
選 (1)(2)(3) #

EXAMPLE 9

中一中校慶園遊會區中有一圓形摩天輪，如附圖所示，中心高 22 公尺，直徑 40 公尺，逆時針方向運轉一圈需時 18 分鐘。設摩天輪開始運轉時，甲車廂恰在離地最近的位置上，x 分鐘後車廂離地的高度 y（公尺）可表為 $y=a\sin\left(bx-\frac{\pi}{2}\right)+c$，其中 a 與 b 都是正數。請選出所有正確選項。

(1)運轉 6 分鐘後，甲車廂繞中心旋轉 $\frac{2\pi}{3}$ 弳 (2)若甲車廂共繞行 60π 公尺，則摩天輪已運轉 54 分鐘 (3)運轉 24 分鐘後，甲車廂離地面 32 公尺 (4) $2a+c=62$ (5) $b=9\pi$。

答案：(1)(3)(4)



最高点高度 $=22+20=42$

最低点高度 $=22-20=2$

基線高度 $22 \Rightarrow c=22$

振幅：$a=20$

週期：$18=\frac{2\pi}{b}$，$b=\frac{\pi}{9}$

(1) $\theta=\frac{6}{18}\times 2\pi=\frac{2\pi}{3}$ (o)

(2) $\frac{60\pi}{2\pi\times 20}=\frac{3}{2}$，即旋轉 $\frac{3}{2}$ 圈

需 $\frac{3}{2}\times 18=27$ 分鐘 (x)

(3) $x=24$，$y=20\cdot\sin\left(\frac{\pi}{9}\cdot 24-\frac{\pi}{2}\right)+22$

$=20\cdot\frac{1}{2}+22=32$ (o)

(4) $2a+c=2\times 20+22=62$ (o)

(5) $b=\frac{\pi}{9}$ (x)

選 (1)(3)(4) #

EXAMPLE 10

觀察某交流電電流強度 I(單位：安培)與時間 t(秒)變化的情形，在 0 秒到 $\frac{1}{30}$ 秒之間，發現最大電流為 10 安培，且僅發生在 $\frac{1}{150}$ 秒與 $\frac{2}{75}$ 秒，而最小電流為 -10 安培，也僅發生一次，若已知電流強度 I 與時間 t 的關係為 $I(t)=a\sin(bt+c)$，其中 a 與 b 皆大於 0，而 $\pi\le c\le 2\pi$，試求數對$(a，b，c)$。

答案：10；100π；$\frac{11}{6}\pi$

$M=10$, $m=-10$ ⇒ 基線 $y=0$，振幅 10

$\therefore a=10$

週期 $= \left(\frac{2}{75}-\frac{1}{150}\right) = \frac{3}{150} = \frac{1}{50} = \frac{2\pi}{b}$

$\therefore b=100\pi$

通過$\left(\frac{1}{150}, 10\right)$代入得

$10 = 10\cdot\sin\left(100\pi\cdot\frac{1}{150}+c\right)$

$\therefore \sin\left(\frac{2\pi}{3}+c\right)=1$

$\frac{2\pi}{3}+c = \frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi, \cdots$

$c = \frac{-3\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \cdots$　取 $c=\frac{11}{6}\pi$

EXAMPLE 11

已知某海濱浴場海浪的高度 y（m）是時間 t（$0\le t\le 24$，單位：h）的函數，記作：$y=f(t)$，附表是某日各時的浪高數據：

t (h)	0	3	6	9	12	15	18	21	24
y (m)	1.5	1.0	0.5	1.0	1.5	1.0	0.5	0.99	1.5

經長期觀測，$y=f(t)$的曲線可近似地看成是函數 $y=A\cos\omega t+b$。依據規定，當海浪高度高於 1.25 m 時才對衝浪愛好者開放，判斷一天內有______小時的時間可供飆網者進行運動。

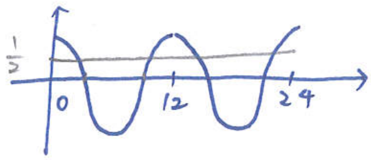
答案：8

$M=1.5$, $m=0.5$ ⇒ 基線 $y=1$，$b=1$
振幅 0.5，$A=0.5$

週期 $=12-0=\frac{2\pi}{w}$，$\therefore w=\frac{1}{6}\pi$

$y=0.5\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)+1 \ge 1.25$，$0\le t\le 24$

$\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)\ge 0.5$



60°　300°　420°　660°

$\frac{\pi}{6}t = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}$

$t = 2, 10, 14, 22$

$0\le t\le 2$ 或 $10\le t\le 14$ 或 $22\le t\le 24$

共 8 小時。

EXAMPLE 12

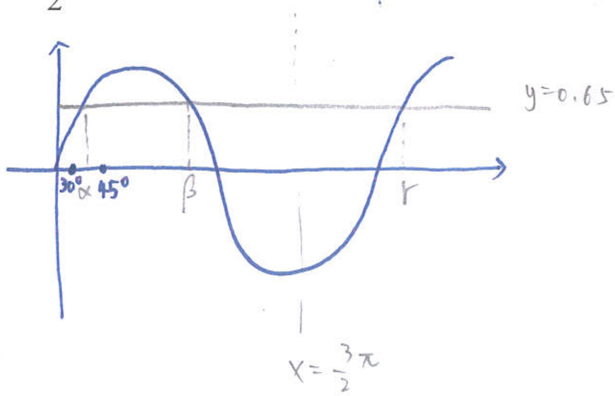
設 α，β，γ 為方程式 $\sin x=0.65$ 最小的三正根，且 $\alpha<\beta<\gamma$，請選出所有正確選項。

(1)$\alpha>\frac{\pi}{4}$　(2)$\beta>\frac{3\pi}{4}$　(3)$\gamma<\frac{5\pi}{2}$　(4)$\alpha+\beta=\pi$　(5)$\alpha+2\beta+\gamma=5\pi$。

答案：(2)(3)(4)

$\frac{1}{2}=0.5$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0.707$



(1) $\alpha<\frac{\pi}{4}$ (×)

(2) $\beta>\frac{3\pi}{4}$ (○)

(3) $\gamma<\frac{\pi}{4}+2\pi$ (○)

(4) α, β 以 $x=\frac{\pi}{2}$ 為軸

$\therefore \alpha+\beta=\pi$

(5) $\underbrace{\alpha+\beta}_{\pi}+\underbrace{\beta+\gamma}_{\frac{3}{2}\pi\times 2}=4\pi$ (×)

EXAMPLE 13

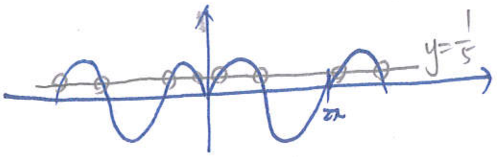
$3\pi \le x \le -3\pi$

在 $-2\pi \le x < 2\pi$ 的範圍內，試求方程式 $\cos x = 2^{-|x|}$ 的實根個數。

答案：5

$\sin|x| = \frac{1}{5}$

$|x|$: ① 先作 $x \ge 0$ 的圖形 ② 對稱 y 軸

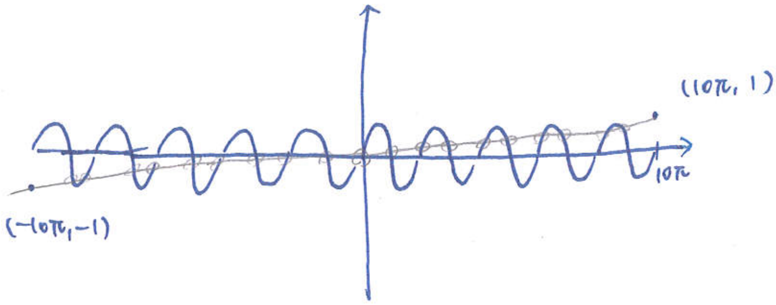


EXAMPLE 14

試問坐標平面上函數 $y=\sin x$ 的圖形和 $y=\dfrac{x}{10\pi}$ 的圖形有多少個交點？

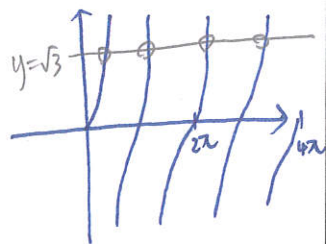
(1)19　(2)17　(3)21　(4)23　(5)15

答案：(1)



選 (1)

(5) $\tan x = \sqrt{3}$



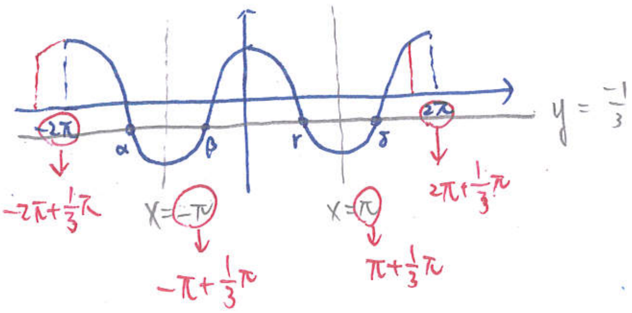
⇒ 4個

EXAMPLE 15

$-2\pi \le x \le 2\pi$ 範圍內，方程式 $3\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right) = -1$ 所有實根之和為______。

答案：$\dfrac{4}{3}\pi$

$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{3}$



$\alpha+\beta = \left(-\frac{2}{3}\pi\right)\times 2 = -\frac{4}{3}\pi$

$r+\delta = \left(\frac{4}{3}\pi\right)\times 2 = \frac{8}{3}\pi$

$\alpha+\beta+r+\delta = \frac{4}{3}\pi$ #

EXAMPLE 16

下列方程式那些有 5 個實根？

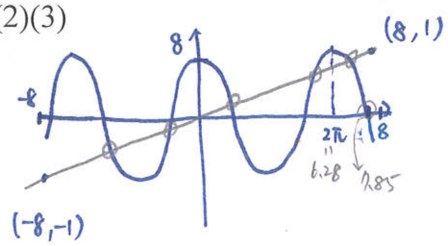
(1) $8\cos x = x$　(2) $8|\sin x| = x+4$

(3) $2\cos\pi x = x$　(4) $0 < x < 2\pi$ 範圍中，$\tan x = 1-x$

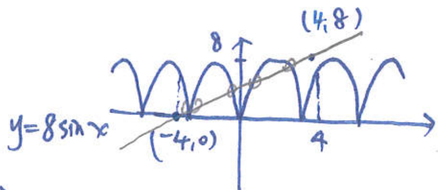
(5) $0 < x < 4\pi$ 範圍中，$\sin x = \sqrt{3}\cos x$。

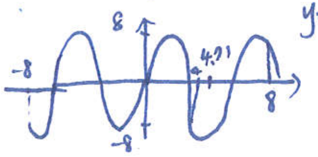
答案：(1)(2)(3)

(1) $\begin{cases} y = 8\cos x \\ y = x \end{cases}$



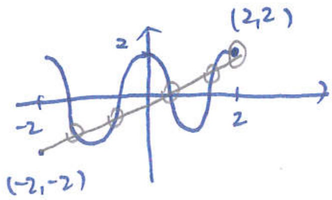
(2) $\begin{cases} y = 8|\sin x| \\ y = x+4 \end{cases}$



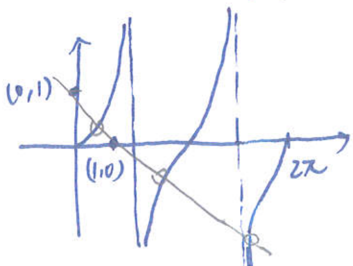


(3) $2\cos\pi x$ 的週期為 $\frac{2\pi}{\pi}=2$

$\begin{cases} y = 2\cos\pi x \\ y = x \end{cases}$



(4) $\begin{cases} y = \tan x \\ y = 1-x \end{cases}$



⇒ 3個

1-3 和(差)角、倍(半)角公式

1. 和(差)角公式：

(1) $\sin(\alpha+\beta)=$ $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$　　$\sin(\alpha-\beta)=$ $\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

(2) $\cos(\alpha+\beta)=$ $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$　　$\cos(\alpha-\beta)=$ $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

(3) $\tan(\alpha+\beta)=$ $\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$　　$\tan(\alpha-\beta)=$ $\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

2. 倍(半)角公式：

(1) $\sin 2\theta=$ $2\sin\theta\cos\theta$

(2) $\cos 2\theta=$ $\cos^2\theta-\sin^2\theta$ $=$ $1-2\sin^2\theta$　　$\Rightarrow \sin\dfrac{\theta}{2}=$ $\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$ (正負看象限)

$=$ $2\cos^2\theta-1$　　$\Rightarrow \cos\dfrac{\theta}{2}=$ $\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}$ (正負看象限)

(3) $\tan 2\theta=$ $\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

EXAMPLE 1

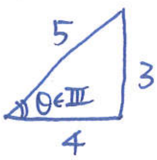
設 $180°<\theta<270°$ 且 $\tan\theta=\dfrac{3}{4}$，試問下列選項何者為真？

(1) $\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$　(2) $\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$　(3) $\sin 2\theta=\dfrac{24}{25}$

(4) $\cos 2\theta=\dfrac{7}{25}$　(5) $\tan 2\theta=\dfrac{24}{7}$

答案：(3)(4)(5)

(1)(2) $90°<\dfrac{\theta}{2}<135°$



$\sin\dfrac{\theta}{2}=+\sqrt{\dfrac{1-(\frac{-4}{5})}{2}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

$\cos\dfrac{\theta}{2}=-\sqrt{\dfrac{1+(\frac{-4}{5})}{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

(3) $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\dfrac{3}{5}\times(\dfrac{-4}{5})=\dfrac{-24}{25}$

(4) $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\times(\dfrac{-4}{5})^2-1=\dfrac{7}{25}$

(5) $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2\times(\frac{-3}{4})}{1-(\frac{-3}{4})^2}=\dfrac{-\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}}=\dfrac{-24}{7}$

選 (3)(4)(5)

EXAMPLE 2

若 $\sin x-\cos x=\dfrac{1}{2}$，則 $\sin 3x+\cos 3x=$？

(1) $\dfrac{-7}{4}$　(2) $\dfrac{5}{3}$　(3) $\dfrac{5}{4}$　(4) $\dfrac{-5}{4}$　(5) $\dfrac{-5}{3}$

答案：(4)

$\sin 3x=\sin(2x+x)=\sin 2x\cdot\cos x+\cos 2x\cdot\sin x$

$=2\sin x\cdot\cos x\cdot\cos x+(1-2\sin^2 x)\cdot\sin x$

$=2\sin x(1-\sin^2 x)+\sin x-2\sin^3 x$

$=3\sin x-4\sin^3 x$

$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$

$\sin 3x+\cos 3x=3(\sin x-\cos x)-4(\sin^3 x-\cos^3 x)$

$=3\times\dfrac{1}{2}-4(\sin x-\cos x)(\sin^2 x+\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x)$

$=3\times\dfrac{1}{2}-4\times\dfrac{1}{2}\times(1+\sin x\cdot\cos x)$

$=\dfrac{3}{2}-2\times(1+\dfrac{3}{8})=\dfrac{3}{2}-\dfrac{11}{4}=\dfrac{-5}{4}$，選 (4)

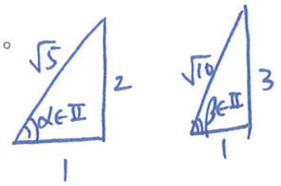
分析. $(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x=\dfrac{1}{4}$

$\therefore \sin x\cdot\cos x=\dfrac{3}{8}$

EXAMPLE 3

若 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$，且 $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\beta=\frac{-1}{\sqrt{10}}$，求 $\alpha+\beta$。

答案：$\frac{5\pi}{4}$



$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$ $\Rightarrow$ $\pi<\alpha+\beta<2\pi$, III or IV

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=\left(\frac{-1}{\sqrt5}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{10}}\right)-\left(\frac{2}{\sqrt5}\right)\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$

$=\frac{1-5}{\sqrt{50}}=\frac{-1}{\sqrt2}\Rightarrow 45°$, III,

$\therefore \alpha+\beta=225°$

EXAMPLE 4

$\triangle ABC$ 中，已知 $\tan A=\frac{1}{2}$，$\tan B=\frac{1}{3}$，下列敘述哪些正確？

(1) $\sin(A+B)=\frac{\sqrt2}{2}$ (2) $\sin(A+B)=\sin C$

(3) $\cos(A+B)=\cos C$ (4) $\angle C=45°$

(5) $\triangle ABC$ 為銳角三角形。

答案：(1)(2)

(1) $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\frac{\frac12+\frac13}{1-\frac12\times\frac13}=1\Rightarrow A+B=45°$ 在 I, II

$\therefore \sin(A+B)=\frac{\sqrt2}{2}$

(2) $\sin(A+B)=\sin(180°-C)=\sin C$

(3) $\cos(A+B)=\cos(180°-C)=-\cos C$ (x)

(4) $\angle C=135°$ (x)

(5) 鈍角三角形 (x)

選(1)(2)

EXAMPLE 5

$f(x)=4x^3-3x+\frac{1}{2}$，求 $f(x)$ 除以 $x-\cos20°$ 之餘式。

答案：1

㊣ $f(x)$ 除以 $x-a$ 之餘式為 $f(a)$

所求 $=4(\cos20°)^3-3(\cos20°)+\frac12$

$=\cos(3\times20°)+\frac12=1$

EXAMPLE 6

$\triangle ABC$ 滿足 $4\sin A+\sin B=3$，$4\cos A-\cos B=1$，求 $\cos C$ 之值。

答案：$-\frac{7}{8}$

$4\sin A+\sin B=3 \xRightarrow{\text{平方}} 16\sin^2A+8\sin A\sin B+\sin^2B=9$

$4\cos A-\cos B=1 \Longrightarrow 16\cos^2A-8\cos A\cos B+\cos^2B=1$

+)

$16-8(\cos A\cos B-\sin A\sin B)+1=10$

$\therefore 8\cos(A+B)=7$, $\cos(A+B)=\frac78$

$\cos C=\cos(180°-(A+B))=-\cos(A+B)=\frac{-7}{8}$

EXAMPLE 7

已知 $\alpha+\beta=45°$，求 $(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)$ 的值。

答案：2

㊣ 技巧

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\tan45°=1$

$\therefore \tan\alpha+\tan\beta=1-\tan\alpha\tan\beta$

$\therefore \tan\alpha+\tan\beta+\tan\alpha\cdot\tan\beta=1 \cdots (*)$

所求 $=1+\tan\beta+\tan\alpha+\tan\alpha\cdot\tan\beta$

$\underline{(*)代入}$ $1+1=2$

EXAMPLE 8

化簡 $\sqrt{1+\sin340°}-\sqrt{1-\sin340°}$ 之值可表為

(1) $2\cos10°$ (2) $2\sin10°$ (3) $-2\cos10°$

(4) $-2\sin10°$ (5)以上皆非。

答案：(4)

$\sin340°=-\sin20°=-\cos70°$

$\cos70°=2\cos^235°-1=1-2\sin^235°$

所求 $=\sqrt{1-\cos70°}-\sqrt{1+\cos70°}$

$=\sqrt{2\sin^235°}-\sqrt{2\cos^235°}$

$=\sqrt2(\sin35°-\cos35°)$

$=\sqrt2\cdot\sqrt2\left(\sin35°\cdot\frac{1}{\sqrt2}-\cos35°\cdot\frac{1}{\sqrt2}\right)$

$=2\sin(35°-45°)$

$=2\sin(-10°)$

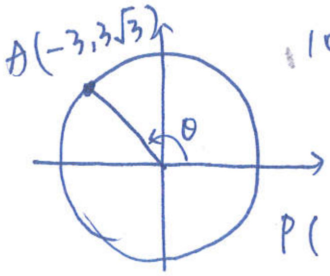
$=-2\sin10°$

選(4)

EXAMPLE 9

設一質點 P 在以原點 O 為圓心之圓 C 上一點 $A(-3,3\sqrt{3})$ 出發，以逆時針且角速度 $\frac{\pi}{6}$(弧度/秒) 繞圓 C 運行，求 10 秒後質點 P 的 x 坐標。

答案：3



10 秒旋轉 $\frac{10\pi}{6}=\frac{5\pi}{3}=300°$

設 $A(6\cos\theta, 6\sin\theta)$

$P(6\cos(\theta+300°), 6\sin(\theta+300°))$

$x=6\cos(\theta+300°)=6(\cos\theta\cos300°-\sin\theta\sin300°)$

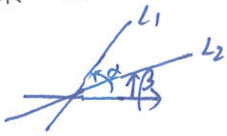
$=-3\times\cos300°-3\sqrt{3}\cdot\sin300°$

$=(-3)\cdot\frac{1}{2}-(3\sqrt{3})\cdot(\frac{-\sqrt{3}}{2})=\frac{-3}{2}+\frac{9}{2}=3$

EXAMPLE 10

設兩直線 L_1：$2x-y-2=0$ 與 L_2：$ax+4y+8=0$ 的銳夾角為 45°，且 $a>0$，求 a 值。

答案：12



$\tan\alpha=2$

$\tan\beta=\frac{-a}{4}$

兩線夾角 $\alpha-\beta=45°$ or $135°$

$\tan(\alpha-\beta)=\frac{2-(-\frac{a}{4})}{1+2\cdot(-\frac{a}{4})}=1$ or -1

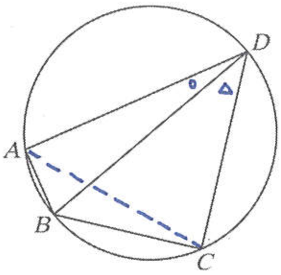
$2+\frac{a}{4}=1-\frac{a}{2}$ or $2+\frac{a}{4}=-1+\frac{a}{2}$

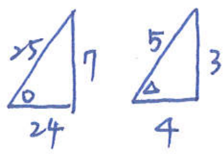
$\Rightarrow \frac{3a}{4}=-1$ or $\frac{a}{4}=3$

$\Rightarrow a=\frac{-4}{3}$ or $a=12$ (取正)

EXAMPLE 11

如附圖，圓內接四邊形 $ABCD$，$\overline{AB}=14$，$\overline{BC}=30$，$\sin\angle ADB=\frac{7}{25}$，$\sin\angle CDB=\frac{3}{5}$，若圓半徑為 25，求 $\overline{AC}$ 之值。





答案：40

$\sin(\angle ADC)=\sin(○+\triangle)$

$=\sin○\cos\triangle+\cos○\sin\triangle$

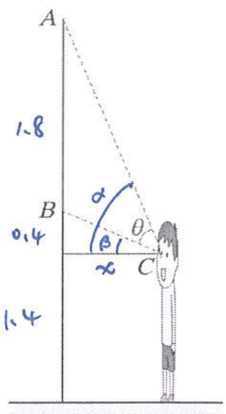
$=\frac{7}{25}\cdot\frac{4}{5}+\frac{24}{25}\cdot\frac{3}{5}=\frac{100}{125}=\frac{4}{5}$

正弦定理知 $\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ADC)}=2R$

$\Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\frac{4}{5}}=2\times25$，$\overline{AC}=40$

EXAMPLE 12

牆上掛有一幅畫，如附圖，已知 A、B 離地分別為 3.6 公尺和 1.8 公尺，且某人眼睛 C 離地為 1.4 公尺，設此人對該幅畫的視角 θ，則 θ 的正切值 tanθ 的最大值。



$\tan\alpha=\frac{2.2}{x}$

$\tan\beta=\frac{0.4}{x}$

答案：$\frac{9}{2\sqrt{22}}$

$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$=\frac{\frac{2.2}{x}-\frac{0.4}{x}}{1+\frac{2.2}{x}\cdot\frac{0.4}{x}}=\frac{\frac{1.8}{x}}{1+\frac{0.88}{x^2}}=\frac{1.8x}{x^2+0.88}$

$=\frac{1.8}{x+\frac{0.88}{x}}\leq\frac{1.8}{2\sqrt{0.88}}=\frac{18}{4\sqrt{22}}$

By $\frac{x+\frac{0.88}{x}}{2}\geq\sqrt{x\cdot\frac{0.88}{x}}=\sqrt{0.88}$

1-4 正餘弦的疊合

1. 正餘弦的疊合：

(1) $\sin(\alpha+\beta)=$ ________ $\sin(\alpha-\beta)=$ ________

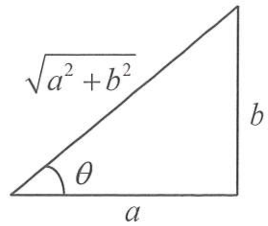
(2) $\cos(\alpha+\beta)=$ ________ $\cos(\alpha-\beta)=$ ________

(3) $\tan(\alpha+\beta)=$ ________ $\tan(\alpha-\beta)=$ ________

2. $y=a\sin x+b\cos x$ 的圖形與性質：

(1) $y=a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin x\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\cos x\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$



(2) $y=a\sin x+b\cos x$ 的振幅為 $\sqrt{a^2+b^2}$，週期為 2π。

(3) $y=a\sin x+b\cos x$ 的最大值為 $\sqrt{a^2+b^2}$，最小值為 $-\sqrt{a^2+b^2}$。

EXAMPLE 1

化簡 $\sin253°\cos133°-\sin227°\cos73°$。

答案：$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

②化銳角

$(-\sin73^\circ)(-\cos47^\circ)-(-\sin47^\circ)(\cos73^\circ)$

$=\sin73^\circ\cos47^\circ+\cos73^\circ\sin47^\circ$

$=\sin(73^\circ+47^\circ)=\sin120^\circ=\dfrac{\sqrt3}{2}$

EXAMPLE 2

化簡 $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin50^\circ}+\dfrac{3}{\cos50^\circ}$。

答案：$4\sqrt{3}$

$$\frac{\sqrt3\cos50^\circ+3\sin50^\circ}{\sin50^\circ\cos50^\circ}=\frac{2\sqrt3\left(\overset{\sin30^\circ}{\overset{\parallel}{\frac12}}\cdot\cos50^\circ+\overset{\cos30^\circ}{\overset{\parallel}{\frac{\sqrt3}{2}}}\sin50^\circ\right)}{\frac12\sin100^\circ}$$

$$=4\sqrt3\,\frac{\sin(30^\circ+50^\circ)}{\sin100^\circ}=4\sqrt3\,\frac{\sin80^\circ}{\sin80^\circ}=4\sqrt3$$

EXAMPLE 3

$180°<A<270°$ 且 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=2\cos1314°$，若 $A=m°$，則 $m=$ ______。

答案：264

$$\sin A+\sqrt3\cos A=2\left(\sin A\cdot\overset{\cos60^\circ}{\overset{\parallel}{\frac12}}+\cos A\cdot\overset{\sin60^\circ}{\overset{\parallel}{\frac{\sqrt3}{2}}}\right)$$

$$=2\sin(A+60^\circ)$$

$240^\circ<A+60^\circ<330^\circ$

$\cos1314^\circ=\cos234^\circ=-\cos54^\circ$

$=-\sin36^\circ$

Ⅲ，$36^\circ\Rightarrow216^\circ$（不合）　$\therefore A+60^\circ=324^\circ$

Ⅳ，$36^\circ\Rightarrow324^\circ$　$A=264$

EXAMPLE 4

下列哪一個數值最接近 $\sqrt{2}$？

(1) $\sin88°+\sqrt{3}\cos88°$

(2) $\sin438°+\sqrt{3}\cos438°$

(3) $\sin408°+\sqrt{3}\cos408°$

(4) $\sin(-302°)+\sqrt{3}\cos(-302°)$

(5) $\sin788°+\sqrt{3}\cos788°$。

$$\sin\theta+\sqrt3\cos\theta=2\left(\sin\theta\cdot\overset{\cos60^\circ}{\overset{\parallel}{\frac12}}+\cos\theta\cdot\overset{\sin60^\circ}{\overset{\parallel}{\frac{\sqrt3}{2}}}\right)$$

$$=2\sin(\theta+60^\circ)\approx\sqrt2$$

$\sin(\theta+60^\circ)=\frac{\sqrt2}{2}$，$\theta+60^\circ=45^\circ$ or $135^\circ(+360^\circ k)$

$\theta=-15^\circ$ or $75^\circ(+360^\circ k)$

選 (2)#

EXAMPLE 5

考慮函數 $f(x)=\sqrt{3}\cos x+\sin x+2$，請問下列選項何者正確？

(1) $f(x)$ 是奇函數 (2) $f(x)$ 的週期是 2π

(3)若 x 為任意實數， $f(x)$ 有最小值 0

(4)在 $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{7\pi}{6}$， $f(x)$ 是遞增函數

(5) $x=\frac{\pi}{6}$ 是 $y=f(x)$ 的對稱軸。

答案：(2)(3)(5)

$f(x)=2\left(\underset{=\sin 60^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cos x+\underset{=\cos 60^\circ}{\frac{1}{2}}\sin x\right)+2$

$=2\sin(x+60^\circ)+2$

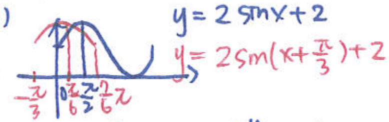
(1) 奇函數：① 圖形對稱原點 (0,0) ② $f(-x)=-f(x)$

(2) (o)

(3) $m=2\times(-1)+2=0$

(4)

(5)



$\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{7\pi}{6}$ 是遞減函數，$x=\frac{\pi}{6}$ 是對稱軸.

EXAMPLE 6

設函數 $f(x)=\sin x+2\cos x+1=r\sin(x+\theta)+1$，其中 $r>0$，$0\le\theta<2\pi$，若 $f(x)$ 在 $0\le x<\pi$ 範圍中，最大值為 M 發生於 $x=\alpha$ 時，最小值為 m 發生於 $x=\beta$，試選出正確的選項。

(1) $r=\sqrt{5}$ (2) $\cos 2\theta=\frac{-3}{5}$ (3) $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$

(4) $\beta=\pi$ (5)數對 (M, m) 為 $(\sqrt{5}+1, -\sqrt{5}+1)$。

答案：(1)(2)~~(3)~~(4)

$\sin x+2\cos x+1=\sqrt{5}\left(\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+\cos x\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\right)+1$

$=\sqrt{5}\sin(x+\theta)+1$,

其中 $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$

(2) $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$

$=\frac{-3}{5}$

$45^\circ<\theta<90^\circ$

$\therefore\ \theta<x+\theta<180^\circ+\theta$

(3) ∴ 當 $x+\theta=90^\circ$ 時有 $M=\sqrt{5}+1$

即 $\alpha=90^\circ-\theta$, $\cos\alpha=\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$

(4) 當 $x+\theta=180^\circ+\theta$ 時有 $m=\sqrt{5}\sin(180^\circ+\theta)+1$

$=\sqrt{5}\cdot(-\sin\theta)+1=-1$

即 $\beta=180^\circ$

選 (1)(2)(4)

EXAMPLE 7

求函數 $f(x)=\cos 2x+\sin x$ 的最大值和最小值。

答：$M=\frac{9}{8}$、$m=-2$

$f(x)=1-2\sin^2 x+\sin x$

$=-2\left(\sin x-\frac{1}{4}\right)^2+1+\frac{1}{8}$

∴ 當 $\sin x=\frac{1}{4}$ 時, 有 $M=\frac{9}{8}$

$\sin x=-1$ 時, 有 $m=-2$

EXAMPLE 8

求函數 $f(x)=\cos^2 x+\sin 2x$ 的最大值和最小值。

答：$M=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$、$m=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$f(x)=\frac{1+\cos 2x}{2}+\sin 2x$

$=\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}$

$\left|\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x\right|\le\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\therefore\ -\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\le\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\le\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}$

$M=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}$

$m=-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}$

EXAMPLE 9

設 $-\pi\le\theta<\pi$，且 $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta+1=0$，求 θ 值。

答案：$-\frac{\pi}{2}$，$\frac{5\pi}{6}$

$2\left(\sin\theta\cdot\underset{\cos 60^\circ}{\frac{1}{2}}+\cos\theta\cdot\underset{\sin 60^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)=-1$

$\Rightarrow\ 2\sin(\theta+60^\circ)=-1$, $\sin(\theta+60^\circ)=\frac{-1}{2}$

又 $-120^\circ\le\theta+60^\circ<240^\circ$

$\therefore\ \theta+60^\circ=210^\circ$ or -30° , $\theta=150^\circ$ or -90°

EXAMPLE 10

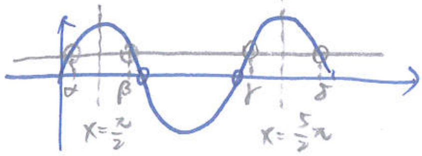
若函數 $f(x)=\sin x+\cos 2x$ 在 $0<x<3\pi$ 的範圍中解 $f(x)=1$，則所有實根的和為______。

答：9π

$f(x)=\sin x+1-2\sin^2 x=1$

$\Rightarrow\ \sin x(1-2\sin x)=0$

$\Rightarrow\ \sin x=0$ or $\frac{1}{2}$



$\alpha+\beta=\pi$

$\gamma+\delta=5\pi$

$\pi+5\pi+\pi+2\pi$

$=9\pi$

EXAMPLE 11

試問下列各函數之週期何者與 $y=\cos 2x$ 的週期相同？

(1) $y=|\tan x|$ (2) $y=|\sin x|$

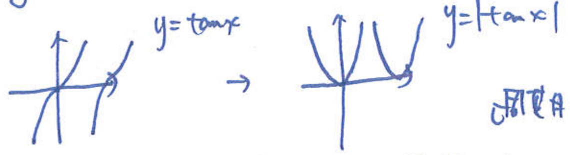
(3) $y=4\sin x\cos x$ (4) $y=\sin x+\cos x$

(5) $y=\sin x+|\sin x|$。

答案：(1)(2)(3)

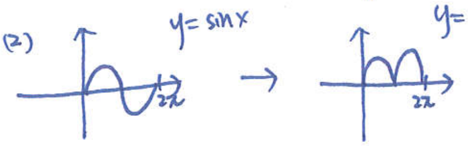
$y=\cos 2x$ 之 週期 $=\frac{2\pi}{2}=\pi$

(1)



週期 $=\pi$

(2)

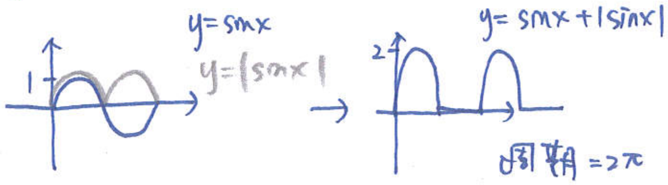


週期 $=\pi$

(3) $y=4\sin x\cdot\cos x=2\sin 2x$， 週期 $=\frac{2\pi}{2}=\pi$

(4) $y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+45^\circ)$，週期 $=2\pi$

(5)



週期 $=2\pi$

EXAMPLE 12

將函數 $y=3\sin x+4\cos x$、$y=\sin x-\cos x$、$y=\sin(3x)+\cos(3x)$的圖形繪於同一坐標平面上，其與 x 軸的相關位置如圖，則下列哪些選項正確？

(1) $f(x)=\sin x-\cos x$

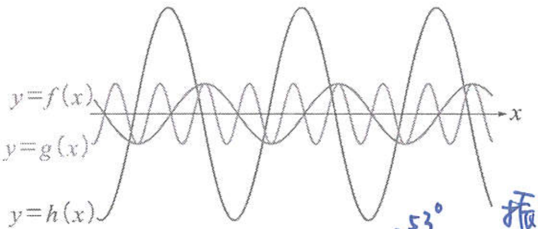
(2)若 $h(\theta)=2$，則 $h(\theta+\pi)=-2$

(3) $g(x)=3\sin x+4\cos x$

(4) $y=h(x)$的振幅為 $y=f(x)$的 3 倍

(5) $h(x)=3\sin x+4\cos x$

答案：(1)(2)(5)



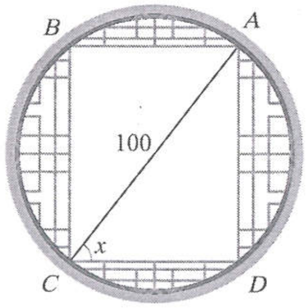
	振幅	週期
$y=3\sin x+4\cos x=5\sin(x+\theta)$ ($\theta=53^\circ$)	5	$2\pi\to h(x)$
$y=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-45^\circ)$	$\sqrt{2}$	$2\pi\to f(x)$
$y=\sin 3x+\cos 3x=\sqrt{2}\sin(3x+45^\circ)$	$\sqrt{2}$	$\frac{2\pi}{3}\to g(x)$

(2) $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$

選 (1)(2)(5)

EXAMPLE 13

附圖為直徑 100 公分的圓形窗花，其中內接一個矩形窗戶 $ABCD$，且 $\angle ACD=x$ 弳。若考慮矩形窗戶 $ABCD$ 之木質內框材料費，其中 $\overline{AB}$ 及 $\overline{CD}$ 每 1 公尺的材料費為 150 元，$\overline{AD}$ 及 $\overline{BC}$ 每 1 公尺的材料費為 300 元，則矩形窗戶 $ABCD$ 之木質內框材料費之最大值為______元。



$150\cdot(1\cdot\cos x\cdot 2)+300\cdot(1\cdot\sin x\cdot 2)$

$=300(\cos x+2\sin x)$

$\le 300\cdot\sqrt{5}$

EXAMPLE 14

已知 $\frac{\pi}{6}\le x\le\pi$，若 $f(x)=\sin 2x-4(\sin x+\cos x)$

(1)令 $t=\sin x+\cos x$，求 t 的範圍。

(2)求當 $x=m$ 時，$f(x)$ 有最小值 n，試求 (m,n)。

(1) $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+45^\circ)$

$75^\circ\le x+45^\circ\le 225^\circ$，$\therefore -\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin(x+45^\circ)\le 1$

$-1\le t\le\sqrt{2}$

(2) $t^2=1+2\sin x\cdot\cos x=1+\sin 2x$

$\therefore \sin 2x=t^2-1$

$f(x)=(t^2-1)-4t$

$=(t-2)^2-5$

$\therefore$ 當 $t=\sqrt{2}$ 時，有最小值 $n=1-4\sqrt{2}$

$x+45^\circ=90^\circ$，$x=45^\circ\Rightarrow m=\frac{\pi}{4}$