3-1 多項式

1. 多項式：$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，其中 n 為非負整數。

   (1)若 $a_n\neq 0$，稱 $f(x)$ 為 n 次多項式，記作 $\deg f(x)=n$ ，其中 a_n 稱為首項係數，a_0 稱為常數。

   (2)若 $f(x)=0$ ，稱 $f(x)$ 為零多項式，沒有定義其次數。

2. 係數問題：設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ ，其中 $a_n\neq 0$ 。

   (1)常數項 $a_0=$ $f(0)$ 。

   (2)各項係數和 $a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0=$ $f(1)$ 。

   (3)偶次項係數和 $a_0+a_2+a_4+\cdots=$ $\frac{f(1)+f(-1)}{2}$ 。

   (3)奇次項係數和 $a_1+a_3+a_5+\cdots=$ $\frac{f(1)-f(-1)}{2}$ 。

3. 除法原理

   設兩多項式 $f(x),g(x)$ ($g(x)$ 為非零多項式)，則必存在唯一一組 $Q(x),r(x)$ ，使得 $f(x)=g(x)Q(x)+r(x)$ ，其中 $r(x)=0$ 或 $\deg r(x)<\deg g(x)$ 。

   ★被除式＝除式×商式＋餘式

   <<綜合除法>>除式為 $x-a$

   例：$3x^2+2x-1$ 除以 $(x-1)$

   根

   $$\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & -1 & 1 \\ & 3 & 5 & \\ \hline 3 & 5 & 4 & \end{array}$$

   商 $3x+5$，餘 4

4. 餘式定理、因式定理⇒除式為 0

   (1)餘式定理：多項式 $f(x)$ 除以 $(ax-b)$ 的餘式為 $f(\frac{b}{a})$ 。

   (2)因式定理：多項式 $f(x)$ 有因式 $(ax-b)$ ⇔ $f(\frac{b}{a})=0$ 。

   ★若 $f(a)=f(b)=f(c)=0$ ，則 $f(x)$ 有因式 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 。

5. 求餘式問題

   (1)除式為二次式，設餘式為 $ax+b$ 。

   (2)除式為三次式，設餘式為 ax^2+bx+c 。

EXAMPLE 1

$f(x)=(x^2+x+a)^3$ 展開式中的各項係數和為 8，求 a 值。

$f(1)=(1+1+a)^3=8$

$2+a=2$，$a=0$ #

EXAMPLE 2

求 $(10+9x+8x^2+\cdots+x^9)(10x^9+9x^8+8x^7+\cdots+1)$ 乘開後 x^9 的係數。

$10\cdot 10+9\cdot 9+\cdots+1\cdot 1$

$=\frac{10\times 11\times 21}{6}=385$ #

EXAMPLE 3

設 $f_1(x), f_2(x)$ 為實係數三次多項式，$g(x)$ 為實係數二次多項式。已知 $f_1(x), f_2(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式分別為 $r_1(x), r_2(x)$。試選出正確的選項。

(1) $-f_1(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $-r_1(x)$

(2) $f_1(x)+f_2(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $r_1(x)+r_2(x)$

(3) $f_1(x)f_2(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $r_1(x)r_2(x)$

(4) $f_1(x)$ 除以 $-3g(x)$ 的餘式為 $\frac{-1}{3}r_1(x)$

(5) $f_1(x)r_2(x)-f_2(x)r_1(x)$ 可被 $g(x)$ 整除

$f_1(x)=g(x)\cdot Q_1(x)+r_1(x)$ …… ①

$f_2(x)=g(x)\cdot Q_2(x)+r_2(x)$ …… ②

(1) 由①知：$-f_1(x)=-g(x)\cdot Q_1(x)-r_1(x)$

$=g(x)\cdot[-Q_1(x)]+\underline{[-r_1(x)]}$ (○)

(2) $f_1(x)+f_2(x)=g(x)[Q_1(x)+Q_2(x)]+\underline{[r_1(x)+r_2(x)]}$ (○)

(3) $f_1(x)\cdot f_2(x)=g(x)[g(x)Q_1(x)Q_2(x)+Q_1(x)r_2(x)+Q_2(x)r_1(x)]+r_1(x)r_2(x)$

但 $\deg(r_1(x)\cdot r_2(x))$ 可能為二次式，故不一定是餘式 (×)

(4) $f_1(x)=(-3g(x))(\frac{-1}{3}Q_1(x))+\underline{r_1(x)}$ (×)

(5) $f_1(x)r_2(x)-f_2 r_1(x)=g(x)[r_2(x)Q_1(x)-r_1(x)Q_2(x)]$ (○)

選 (1)(2)(5)

EXAMPLE 4

設 $f(x)=x^4-5x^3+4x^2+5x+6$
$=a(x-3)^4+b(x-3)^3+c(x-3)^2+d(x-3)+e$，求

(1) a,b,c,d,e 值 (2) $f(3)$ (3) $f(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$

(4) $f(2.9)$ 的小數點後第 2 位數字

(5) $f(x)$ 除以 $(x-3)^2$ 的餘式

$$\begin{array}{rrrrr|l}
1 & -5 & 4 & 5 & 6 & 3 \\
 & 3 & -6 & -6 & -3 & \\ \hline
1 & -2 & -2 & -1 & 3 & \\
 & 3 & 3 & 3 & & \\ \hline
1 & 1 & 1 & 2 & & \\
 & 3 & 12 & & & \\ \hline
1 & 4 & 13 & & & \\
 & 3 & & & & \\ \hline
1 & 7 & & & &
\end{array}$$

(1) $\underline{a=1, b=7, c=13, d=2, e=3}$ #

(2) $f(3)=e=\underline{3}$ #

(3) 設 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $2x=1+\sqrt{5}$

$\Rightarrow 2x-1=\sqrt{5}$, $4x^2-4x+1=5$

$\Rightarrow x^2-x-1=0$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -4 & 1 & & \\ \hline
1\ -1\ -1 & 1 & -5 & 4 & 5 & 6 \\
 & 1 & -1 & -1 & & \\ \hline
 & & -4 & 5 & 5 & \\
 & & -4 & 4 & 4 & \\ \hline
 & & & 1 & 1 & 6 \\
 & & & 1 & -1 & -1 \\ \hline
 & & & & 2 & 7
\end{array}$$

$f(x)=(x^2-x-1)(x^2-4x+1)+2x+7$

$f(\frac{1+\sqrt{5}}{2})=0+2(\frac{1+\sqrt{5}}{2})+7$

$=\underline{8+\sqrt{5}}$ #

(4) $f(2.9)=(-0.1)^4+7(-0.1)^3+13(-0.1)^2+2(-0.1)+3\approx\underline{2.93}$ #

(5) 餘式：$d(x-3)+e=\underline{2x-3}$ #

EXAMPLE 5

求下列各除法後的餘式：

(1) x^8+7x^2-6x+2 除以 $(x-1)$

(2) $x^{304}-5x^{303}-2$ 除以 (x^2-4x-5)

(3) $f(x)=2x^4-5x^2-6$，$f(x-2)$ 除以 $(x-1)$

(1) $f(1)=1+7-6+2=\underline{4}$ #

(2) $x^{304}-5x^{303}-2=(x^2-4x-5)\cdot Q(x)+ax+b$

$x=-1$ 代入 $\Rightarrow 1+5-2=0-a+b$

$x=5$ 代入 $\Rightarrow 5^{304}-5^{304}-2=0+5a+b$

$\begin{cases}-a+b=4\\ 5a+b=-2\end{cases}$ $6a=-6$, $a=-1$, $b=3$

$\underline{餘式：-x+3}$ #

(3) $f(x-2)=(x-1)\cdot Q(x)+r$

$x=1$ 代入 $\Rightarrow f(-1)=0+r=2(-1)^4-5(-1)^2-6$

$\Rightarrow \underline{r=-9}$ #

EXAMPLE 6

若 $(x+1)f(x)$ 除以 x^2+x+1 餘 $5x+3$，求 $f(x)$ 除以 x^2+x+1 的餘式。

設餘式 $ax+b$

$f(x)=(x^2+x+1)\cdot Q(x)+(ax+b)$

$\xrightarrow{乘上(x+1)}$ $(x+1)f(x)=(x^2+x+1)\cdot[(x+1)\cdot Q(x)]$
$+\underline{(x+1)\cdot(ax+b)}$

$=ax^2+(a+b)x+b$

$$\begin{array}{r|rrr}
 & a & & \\ \hline
1\ 1\ 1 & a & a+b & b \\
 & a & a & a \\ \hline
 & & b & b-a
\end{array}$$

$\begin{cases}b=5\\ b-a=3\end{cases}$ $\Rightarrow a=2$

餘 $=\underline{2x+5}$ #

EXAMPLE 7

$f(x)$ 除以 x^2-5x+4 餘 $x+2$，$f(x)$ 除以 x^2-5x+6 餘 $3x+4$，求 $f(x)$ 除以 x^2-4x+3 的餘式。

$f(x)=(x^2-5x+4)\cdot Q_1(x)+(x+2)$

$f(1)=3,\ f(4)=6$

$f(x)=(x^2-5x+6)\cdot Q_2(x)+(3x+4)$

$f(2)=10,\ f(3)=13$

設餘式 $ax+b$

$f(x)=(x^2-4x+3)\cdot Q(x)+ax+b$

$f(1)=a+b,\ f(3)=3a+b$

$\begin{cases} a+b=3 \\ 3a+b=13 \end{cases}$, $2a=10,\ a=5,\ b=-2$

餘式：$5x-2$ #

EXAMPLE 8

$f(x)$ 除以 $x-1$ 餘 9，$f(x)$ 除以 $x+2$ 餘 3，$f(x)$ 除以 $x-3$ 餘 43，求 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x+2)(x-3)$ 的餘式。

設餘式 ax^2+bx+c

$f(x)=(x-1)(x+2)(x-3)Q(x)+ax^2+bx+c$

$f(1)=a+b+c=9 \cdots ①$

$f(-2)=4a-2b+c=3 \cdots ②$

$f(3)=9a+3b+c=43 \cdots ③$

②−①：$3a-3b=-6$，$a-b=-2$

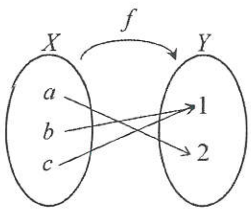
③−①：$8a+2b=34$，$4a+b=17$

$\therefore 5a=15,\ a=3,\ b=5,\ c=1$

餘式：$3x^2+5x+1$ #

3-2 多項式函數的圖形

1. 函數：對每一個 x 值存在唯一的 y 值，使得 $x \xrightarrow{f} y$，稱 y 是 x 的一個函數，記作 $f(x)=y$。在坐標平面上，滿足 $y=f(x)$ 的所有點 (x,y) 所成的圖形成為函數 $f(x)$ 的圖形。



X 所形成的集合稱為 定義域

$f(X)=Y$ 所形成的集合稱為 值域

2. 函數圖形的平移

(1)向右平移 h 單位 ⇒ $x \to x-h$

$y=f(x)$ 的圖形向右平移 h 單位與 $y=f(x-h)$ 的圖形重合。

(2)向上平移 k 單位 ⇒ $y \to y-k$

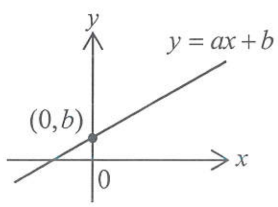
$y=f(x)$ 的圖形向右平移 k 單位與 $y-k=f(x)$ 的圖形重合。

3. 線性函數：$f(x)=y=ax+b$

(1) $a=0$ 稱為 常數函數，圖形為 水平線。

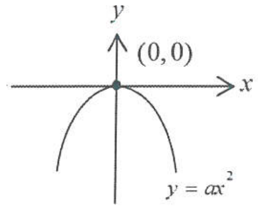
(2) $a\neq 0$ 稱為 一次函數，圖形為 斜直線。

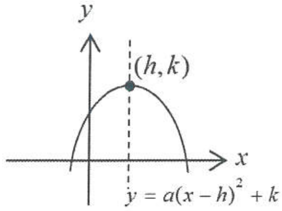
(3) a 表示直線的 斜率，b 表示 y截距。

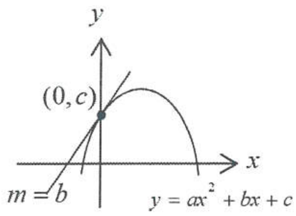


4. 二次函數：$f(x)=y=ax^2+bx+c$，圖形為 拋物線

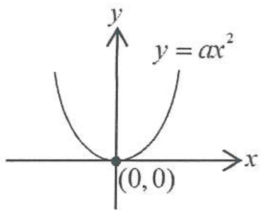
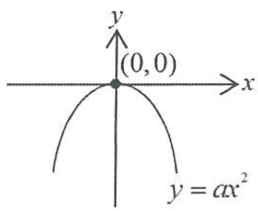
基本型	$\Leftrightarrow$	標準式	$\Leftrightarrow$	一般式
$y=ax^2$	平移 (h,k)	$y=a(x-h)^2+k$	乘開.配方	$y=ax^2+bx+c$







(1)基本型 $y=ax^2$

分類	$a>0$	$a<0$	圖形特徵
圖形			①頂點 $(0,0)$ ②對稱軸 $x=0$

(2)標準式 $y=a(x-h)^2+k \Rightarrow$ 使用時機為已知① 頂点 ② 對稱軸

圖形特徵：頂點為 (h,k)；對稱軸為 $x=h$。

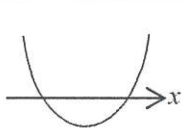
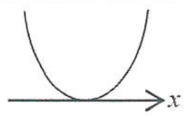
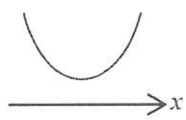
(3)一般式 $y=ax^2+bx+c \Rightarrow$ 使用時機為 過三点

①a表示 開口 $\begin{cases}\text{[1]正負：}a>0\text{表示 U；}a<0\text{表示 ∩}\\ \text{[2]大小：}|a|\text{越大，開口越 窄}\end{cases}$

②b表示 與y軸交点之切線斜率

③c表示 y截距

④$D=$ b^2-4ac 表示 與x軸之交点個數

判別式	$D>0$	$D=0$	$D<0$
圖形			

5. 二次函數的應用

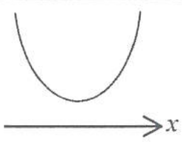
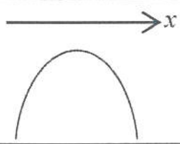
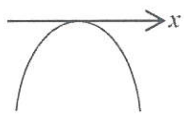
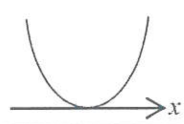
(1)求最大最小值 $\Rightarrow$ 配方法

$f(x)=ax^2+bx+c=a(x-h)^2+k$

①$a>0$：當 $x=h$ 時，$f(x)$ 有最小值 k。(頂點是圖形的最 低 點。)

②$a<0$：當 $x=h$ 時，$f(x)$ 有最大值 k。(頂點是圖形的最 高 點。)

(2)恆正、恆負

	恆正	恆負	恆非正	恆非負
圖形				
判斷式	$\begin{cases}a>0\\D<0\end{cases}$	$\begin{cases}a<0\\D<0\end{cases}$	$\begin{cases}a<0\\D\leq 0\end{cases}$	$\begin{cases}a>0\\D\leq 0\end{cases}$

EXAMPLE 1

某次段考全班最高分和最低分分別為 70 分和 20 分。老師依據線性函數調整使得最高分為和最低分為 90 分和 60 分。已知某生調整後為 81 分，則該生的原始成績為何？

設 $f(x)=ax+b$

$f(70)=70a+b=90$，$50a=30$

$f(20)=20a+b=60$，$a=\frac{3}{5}$，$b=48$

$f(x)=\frac{3}{5}x+48=81$，$\frac{3}{5}x=33$，$\underline{x=55}$ #

EXAMPLE 2

~~關於下列不等式，請選出正確的選項。~~

~~(1) $\sqrt{13}>3.5$　(2) $\sqrt{13}<3.6$　(3) $\sqrt{13}-\sqrt{3}>\sqrt{10}$~~

~~(4) $\sqrt{13}+\sqrt{3}>\sqrt{16}$　(5) $\frac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{3}}>0.6$~~

若 $y=f(x)$ 為一次函數，已知 x 值增加 3 時，所對應 y 值減少 6，又 $f(0)=6$，求 $f(x)$。

$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-6}{3}=-2$，$f(0)$ 即 y 截距

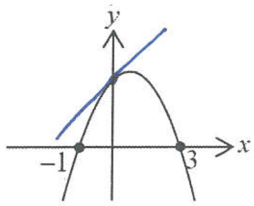
$f(x)=\underline{-2x+6}$ #

EXAMPLE 3

已知 $y=f(x)=ax^2+bx+c$ 的圖形，則下列哪些選項正確？

(1) $a>0$　(2) $b>0$　(3) $b^2-4ac<0$

(4) $c=-3a$　(5) $5a-2b+c>0$



(1) 開口朝下：$a<0$ (x)

(2) 與 y 軸交點之切線 $m=b>0$ (o)

(3) 與 x 軸交點個數為 2，$D>0$ (x)

(4) $f(x)$ 過點 $(-1,0)$, $(3,0)$，即有因式 $(x+1)(x-3)$

$\Rightarrow f(x)=a(x+1)(x-3)=ax^2-2ax-3a$，$c=-3a$ (o)

(5) $5a-2b+c=a+4a-2b+c=a+f(-2)<0$ (x)

選 (2)(4) #

EXAMPLE 4

設 $a<b<c$，$y=f(x)$ 的圖形是開口向上的拋物線，與 x 軸交於 $(a,0),(b,0)$。$y=g(x)$ 的圖形也是開口向上的拋物線，與 x 軸交於 $(b,0),(c,0)$。試求 $y=f(x)+g(x)$ 的圖形可能的選項。

(1)水平線　(2)和 x 軸交於一點的直線

(3)和 x 軸無交點的拋物線

(4)和 x 軸交於一點的拋物線

(5)和 x 軸交於二點的拋物線

$f(x)=k(x-a)(x-b)$，$k>0$

$g(x)=t(x-b)(x-c)$，$t>0$

$\Rightarrow f(x)+g(x)=(x-b)\left[k(x-a)+t(x-c)\right]$

$=(k+t)(x-b)\left(x-\frac{ka+tc}{k+t}\right)$

與 x 軸交點為 $x=b$，$\frac{ka+tc}{k+t}$

$\because$ b 在 a、c 之間，故 $\frac{ka+tc}{k+t}$ 可能為 b

選 (4)(5) #

EXAMPLE 5

二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形頂點 $(2,3)$ 且過點 $(3,1)$，求 (a,b,c)。

$\because$ 頂點 $(2,3)$，設 $y=a(x-2)^2+3$

$(3,1)$ 代入 $\Rightarrow 1=a+3$，$a=-2$

$y=-2(x-2)^2+3$

$=-2(x^2-4x+4)+3$

$=-2x^2+8x-5$

$(a,b,c)=\underline{(-2,8,-5)}$ #

EXAMPLE 6

二次函數 $f(x)=ax^2+bx+\frac{1}{a}$，在 $x=2$ 時有最小值 -3，求 $(a,b,\cancel{c})$。

即頂點為 $(2,-3)$ 且 $a>0$

$f(x)=a(x-2)^2-3=ax^2-4ax+(4a-3)$

$\begin{cases} b=-4a \\ \frac{1}{a}=4a-3 \end{cases} \Rightarrow 4a^2-3a-1=0$，$a=\frac{-1}{4}$ or 1 (取正)

$(4a+1)(a-1)=0$

$\therefore (a,b)=(1,-4)$

EXAMPLE 7

求下列各小題中，k的範圍。

(1)對所有實數x，$kx^2+3x+1>0$恆成立。

(2)不等式$kx^2+2x-2>0$無解。

(3) $y=2x^2+x+k$的圖形恆在$y=3x-1$的上方。

(1) $\begin{cases} k>0 \\ D=3^2-4\cdot k\cdot 1<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k>0 \\ k>\frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow \underline{k>\frac{9}{4}}$ #

(2) 亦即 $kx^2+2x-2\le 0$ 恆成立

$\begin{cases} k<0 \\ D=4-4\cdot k(-2)\le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k<0 \\ 8k\le -4 \end{cases} \Rightarrow \underline{k\le \frac{-1}{2}}$ #

(3) $2x^2+x+k>3x-1$ 恆成立

$\Rightarrow 2x^2-2x+(k+1)>0$

$\Rightarrow D=(-2)^2-4\times 2\times(k+1)<0$

$\Rightarrow 1-2k-2<0$，$\underline{k>\frac{-1}{2}}$ #

EXAMPLE 8

若直線$y=ax+b$與$y=x^2$的圖形恰交於一點，亦與$y=(x-2)^2+12$的圖形交於一點，求a,b值。

$\begin{cases} y=ax+b \\ y=x^2 \end{cases}$ 1組解

$\Rightarrow ax+b=x^2 \Rightarrow x^2-ax-b=0$ 恰1解

$D=(-a)^2-4\times 1\times(-b)=a^2+4b=0 \cdots ①$

$\begin{cases} y=(x-2)^2+12 \\ y=ax+b \end{cases}$ 1組解

$\Rightarrow ax+b=x^2-4x+16 \Rightarrow x^2+(-4-a)x+(16-b)=0$ 恰1解

$D=(-4-a)^2-4\times 1\times(16-b)=a^2+8a+4b-48=0 \cdots ②$

①代入② $\Rightarrow 8a=48$，$\underline{a=6，b=-9}$ #

EXAMPLE 9

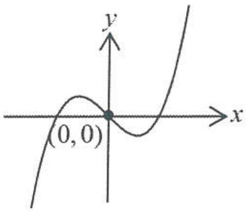
二次函數$y=ax^2+bx+c$的圖形頂點$(2,3)$且過點$(3,1)$，求(a,b,c)。

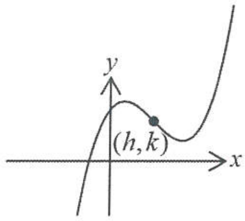
EXAMPLE 10

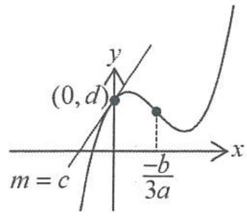
二次函數$f(x)=ax^2+bx+\frac{1}{a}$，在$x=2$時有最小值-3，求(a,b,c)。

6. 三次函數：$f(x)=y=ax^3+bx^2+cx+d$

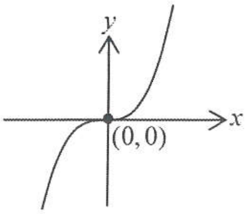
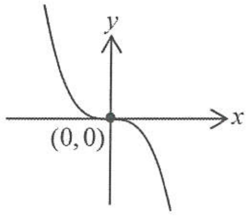
基本型	$\Leftrightarrow$	標準式	$\Leftrightarrow$	一般式
$y=ax^3+px$	平移 (h,k)	$y=a(x-h)^3+p(x-h)+k$	乘開.配方	$y=ax^3+bx^2+cx+d$



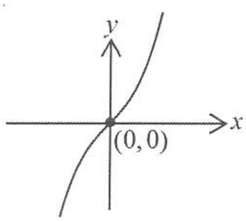
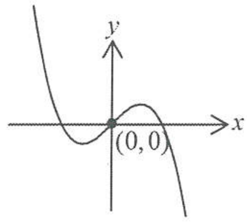
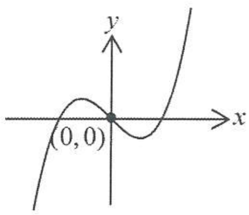
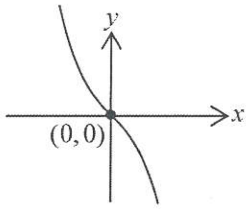




(1)單項式 $y=ax^3$

分類	$a>0$	$a<0$	圖形特徵
圖形			①對稱中心 (0,0)

(2)基本型 $y=ax^3+px$

分類		$a>0$	$a<0$	圖形特徵
圖形	$p>0$			①對稱中心 (0,0) ②有波峰波谷 $\Leftrightarrow$ $a\cdot p<0$
	$p<0$			

(2)標準式 $y=a(x-h)^3+p(x-h)+k \Rightarrow$ 使用時機為已知 對稱中心

三次函數配方 $y=ax^3+bx^2+cx+d=a(x-h)^3+p(x-h)+k$，其中 $h=\frac{-b}{3a}$。[連續綜合除法]

(3)一般式 $y=ax^3+bx^2+cx+d$

①a 表示 開口 $\begin{cases}\text{[1]正負：} a>0 \text{表示 右上；} a<0 \text{表示 右下} \\ \text{[2]大小：} |a| \text{越大，開口越 窄}\end{cases}$

②b：與y軸交點之凹口

③c 表示 與y軸交點之切線斜率

④d 表示 y截距

7. 廣域與局部特徵：

設三次函數 $y=f(x)=\overbrace{ax^3+bx^2+cx+d=A}^{a=A}(x-h)^3+B(x-h)^2+C(x-h)+D$ [連續綜合除法]，

(1)廣域特徵：$y=f(x)$ 的廣域特徵近似於 $y=ax^3$。

(2)局部特徵：$\underbrace{y=f(x)}_{\text{在 } x=h \text{ 附近}}$ 的局部特徵近似於直線 $y=C(x-h)+D$。

EXAMPLE 11

找 $y=2x^3+6x^2-4x+1$ 的對稱中心。

$h=\frac{-b}{3a}=-1$

$k=2(-1)^3+6(-1)^2-4(-1)+1$

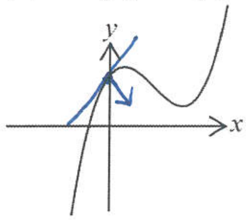
$=9$

中心 $(-1,9)$

EXAMPLE 12

$y=f(x)$ 的圖形如下，試問下列哪些選項為正？

(1) a (2) b (3) c (4) d



(1) 右上：$a>0$

(2) 凹向下：$b<0$

(3) 切線斜率 $m>0 \Rightarrow c>0$

(4) y截距 $d>0$

(1)(3)(4)

EXAMPLE 13

設 $f(x)=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$。已知廣域看 $y=f(x)$ 的圖形會很接近 $y=x^3$ 的圖形，而 $y=f(x)$ 局部看在 $x=-1$ 附近的圖形卻近似於直線 $y=4x+7$，又函數圖形的對稱中心在 $x=2$ 處，求 a,b,c,d 的值。

廣域接近 $y=x^3 \Rightarrow a=1$

$x=-1$ 附近近似 $y=c(x+1)+d=4x+7$

$\Rightarrow c=4,\ d=3$

$f(x)=(x+1)^3+b(x+1)^2+4(x+1)+3$

$=x^3+(3+b)x^2+(3+2b+4)x+(1+b+7)$

對稱中心 $x=\frac{-(3+b)}{3}=2,\ 3+b=-6,\ b=-9$

$(a,b,c,d)=(1,-9,4,3)$

EXAMPLE 14

三次函數 $y=f(x)$ 圖形的對稱中心為 $(1,2)$，且通過 $(2,6)$ 與 $(3,16)$ 兩點，求 $f(4)$。

$f(x)=a(x-1)^3+p(x-1)+2$

$(2,6)$ 代入 $\Rightarrow 6=a+p+2$

$(3,16)$ 代入 $\Rightarrow 16=8a+2p+2$

$\Rightarrow \begin{cases} a+p=4 \\ 4a+p=7 \end{cases},\ a=1,\ p=3$

$f(4)=1\times 3^3+3\times 3+2=\underline{38}$

EXAMPLE 15

三次實係數多項式函數 $f(x)=2x^3-6x^2+10x+k$ 的圖形之對稱中心為 $(1,5)$，試選出正確的選項。

(1) $k=1$

(2) 若點 (r,s) 在 $y=f(x)$ 的圖形上，則點 $(r+2,s+10)$ 也在 $y=f(x)$ 的圖形上。

(3) $y=f(x)$ 的圖形在 $x=1$ 附近的近似直線為 $y=4(x-1)+5$

(4) $y=f(x)$ 的圖形平移後可與 $y=2x^3+4x+5$ 的圖形重合

(5) $y=f(x)$ 的圖形與 $y=2x^3+4x+5$ 的圖形有交點

(1) $f(x)=2(x-1)^3+p(x-1)+5$

$=2x^3-6x^3+(6+p)x+(-2-p+5)$

$\begin{cases} 6+p=10 \\ 3-p=k \end{cases},\ p=4,\ k=-1$ (×)

(2) (r,s) 和 $(r+2,s+10)$ 之中點為 $(1,5)$ (○)

(3) $y=4(x-1)+5$ (○)

(4) $f(x)=2(x-1)^3+4(x-1)+5$

向左移1單位 $y=2x^3+4x+5$ (○)

(5)

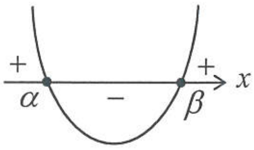
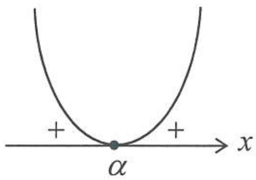
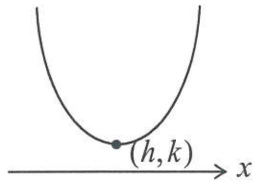
∵ $y=f(x)$ 左移得 $y=2x^3+4x+5$

必沒有交點 (×)

選(2)(3)(4)

3-3 多項不等式

1. 二次式 $f(x)=ax^2+bx+c$，其中 $a>0$，$D=$ b^2-4ac

判別式	$D>0$	$D=0$	$D<0$(恆正)
方程式	$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$ 其中 $\alpha<\beta$	$f(x)=a(x-\alpha)^2$	$f(x)=a(x-h)^2+k$ 其中 $k>0$
圖形			
不等式	$f(x)>0\Rightarrow$ $x<\alpha$ 或 $x>\beta$ $f(x)\le 0\Rightarrow$ $\alpha\le x\le\beta$	$f(x)>0\Rightarrow$ $x\ne\alpha$ $f(x)\le 0\Rightarrow$ $x=\alpha$	$f(x)>0\Rightarrow$ x為所有實數 $f(x)\le 0\Rightarrow$ 無解

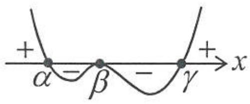
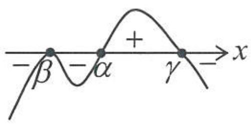
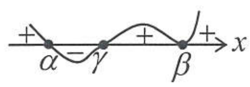
2. 高次不等式 $\Rightarrow$ 解方程式的根

設 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ 的實根為 $\alpha,\beta,\beta,\gamma,\gamma,\gamma$。

(1)首項係數 a_n：判別函數圖形右上 $a_n>0$ 或右下 $a_n<0$

(2)奇數個重根(如 α,γ)：$y=f(x)$ 的圖形在此根穿越 x 軸。

(3)偶數個重根(如 β)：$y=f(x)$ 的圖形在此根與 x 軸相切。

條件	設 $a_n>0$ 且 $\alpha<\beta<\gamma$	設 $a_n<0$ 且 $\beta<\alpha<\gamma$	設 $a_n>0$ 且 $\alpha<\gamma<\beta$
圖形			
不等式	$f(x)<0\Rightarrow$ $\alpha<x<\beta$ 或 $\beta<x<\gamma$	$f(x)\ge 0\Rightarrow$ $x=\beta$ 或 $\alpha\le x\le\gamma$	$f(x)>0\Rightarrow$ $x<\alpha$ 或 $\gamma<x<\beta$ 或 $x>\beta$

EXAMPLE 1

解下列各多項式不等式解的範圍。

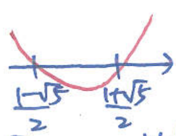
(1) $-x^2+x+2<0$　(2) $x^2-x-1\le 0$　(3) $4x^2+12x+9>0$　(4) $(x^2+x+1)(x-2)(x+3)\le 0$

(5) $x^2(x^2-4)<0$　(6) $(x^2-4x+2)(2x-5)(2x-37)\le 0$　(7) $(x^2+5x-4)(x-1)(x+5)<(x-8)(x-1)(x+5)$

(1) $-(x+1)(x-2)<0$

$x<-1$ 或 $x>2$

(2) $x^2-x-1=0\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt5}{2}$

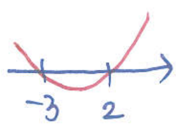


$\frac{1-\sqrt5}{2}\le x\le\frac{1+\sqrt5}{2}$

(3) $(2x+3)^2>0$

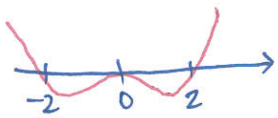
$x<-\frac{3}{2}$ 或 $x>-\frac{3}{2}$

(4) $x^2+x+1=0\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$(無實根)



$-3\le x\le 2$

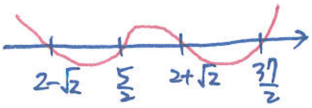
(5)



$-2<x<0$ 或 $0<x<2$

(6) $x^2-4x+2=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{8}}{2}$

$=2\pm\sqrt{2}$



$2-\sqrt{2}\le x\le\frac{5}{2}$ 或 $2+\sqrt{2}\le x\le\frac{37}{2}$

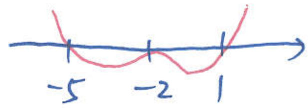
(7) 不能乘除(無法判定正負)

加、減移,一邊為0

$[(x^2+5x-4)-(x-8)](x-1)(x+5)<0$

$(x^2+4x+4)(x-1)(x+5)<0$

$(x+2)^2(x-1)(x+5)<0$

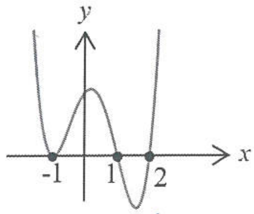


$-5<x<2$ 或 $-2<x<1$

EXAMPLE 2

如下圖所示，已知多項式 $f(x)$ 為四次式，且首項係數為 1，求：

(1) $f(x)\le 0$ 的解　　(2) $f(4)$



(1) $x=-1$ 或 $1\le x\le 2$

(2) 相切 ⇒ 重根

$f(x)=1\cdot(x+1)^2(x-1)(x-2)$

$f(4)=1\cdot 5^2\cdot 3\cdot 2=150$

EXAMPLE 3

設 $a>0$，已知不等式 $|2x-a|<1$ 與 $x^2-ax+\frac{3}{4}<0$ 有相同的解集合，求 a 值。

$|2x-a|<1$, $-1<2x-a<1$, $-1+a<2x<1+a$

$\Rightarrow \frac{-1+a}{2}<x<\frac{1+a}{2}$

$x^2-ax+\frac{3}{4}=(x-\frac{-1+a}{2})(x-\frac{1+a}{2})$

常數項：$\frac{3}{4}=\frac{(-1+a)(1+a)}{4} \Rightarrow a^2-1=3$, $a=\pm 2$

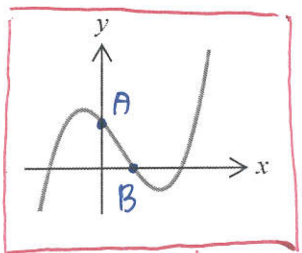
(取正)

$\therefore a=2$

EXAMPLE 4

三次多項式 $y=f(x)$ 圖形如下。已知 $A(0,10)$、$B(\frac{2}{3},0)$ 在 $y=f(x)$ 上且 $f(x)=0$ 有兩個相異整數根。

又 $f(x)\le 0$ 的正整數解恰有 4 個，$f(x)\ge 0$ 的負整數解恰有 5 個。求 $f(3)$ 之值。



漏點A,B

$\because f(x)\le 0$ 恰有4個正整數解，即 $x=1,2,3,4$

故 $f(x)$ 與 x 軸交於 $(4,0)$

$\because f(x)\le 0$ 恰有5個負整數解，即 $x=-1,-2,-3,-4,-5$

故 $f(x)$ 與 x 軸交於 $(-5,0)$

$\because f(x)$ 與 x 軸交於 $(-5,0)$, $(\frac{2}{3},0)$, $(4,0)$ 且為三次式

故 $f(x)=a(x+5)(x-\frac{2}{3})(x-4)$

$(0,10)$ 代入，$10=a\cdot 5\cdot(-\frac{2}{3})\cdot(-4)$, $a=\frac{3}{4}$

$f(3)=\frac{3}{4}\times 8\times\frac{7}{3}\times(-1)=-14$ #