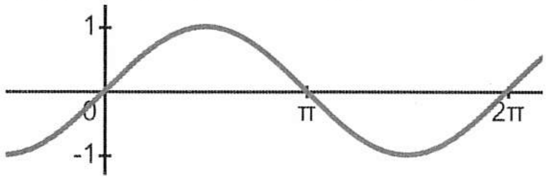
# 9-1 三角函數的圖形

1. 三角函數的圖形與性質：

| 函數 | 圖形 | 振幅 | 週期 | 對稱軸 | 對稱中心 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y=\sin x$ |   | 1 | $2\pi$ | 通過最高(低)點的鉛直線 | 與 $x$ 軸的交點 |

2. 函數圖形的平移伸縮

(1)向右平移 $h$ 單位　：$y=\sin x \longleftrightarrow$ $\underline{y=\sin(x-h)}$

(2)向上平移 $k$ 單位　：$y=\sin x \longleftrightarrow$ $\underline{y=\sin x+k}$

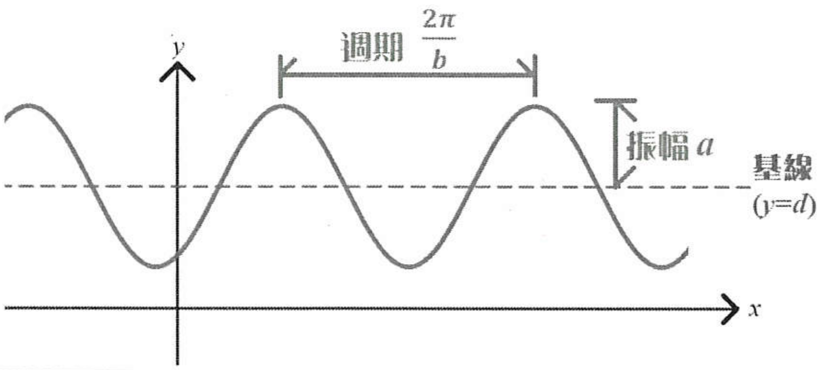
(3)水平方向伸縮 $s$ 倍：$y=\sin x \longleftrightarrow$ $\underline{y=\sin\frac{x}{s}}$

(4)鉛直方向伸縮 $t$ 倍：$y=\sin x \longleftrightarrow$ $\underline{y=t\cdot\sin x}$

3. $y=a\sin(bx+c)+d$ 的意義

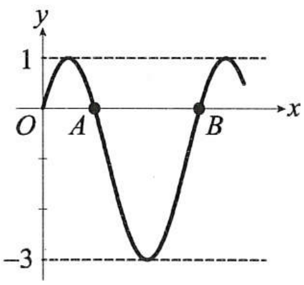
(1) $a$：<u>鉛直方向伸縮 $a$ 倍</u> ⇒振幅為 <u>$a$</u>　(2) $b$：<u>水平方向伸縮 $\frac{1}{b}$ 倍</u> ⇒週期為 $\underline{\frac{2\pi}{b}}$

(3) $d$：<u>向上平移 $d$ 單位</u> ⇒基線為 <u>$y=d$</u>　(4) $c$：左右平移(用最高點或最低點代入求得)




**EXAMPLE 1**

下圖為函數 $y=a\sin\left(bx+c\right)+d$ 的部分圖形，其中 $a>0$，$b>0$，$-\frac{\pi}{2}\le c\le\frac{\pi}{2}$，$A(\frac{\pi}{3},0)$，$B\left(\pi,0\right)$，求常數 $a$，$b$，$c$，$d$ 的值。




最高點 1，最低點 −3

基線 $y=-1$，$d=-1$

振幅 2，$a=2$

週期(OB)，$\pi=\frac{2\pi}{b}$，$b=2$

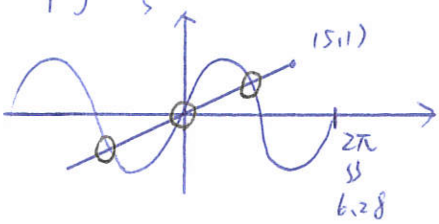
最高點 $x=\frac{0+\frac{\pi}{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$

$2\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{6}+c\right)-1=1$，$\sin\left(\frac{\pi}{3}+c\right)=1$，$c=\frac{\pi}{6}$　$(a,b,c,d)=\underline{\left(2,2,\frac{\pi}{6},-1\right)}$ *

**EXAMPLE 2**

求方程式 $\sin x=\frac{x}{5}$ 解的個數。

$\begin{cases} y=\sin x \\ y=\frac{x}{5} \end{cases}$ 的交點坐標




<u>3個交點</u> #

**EXAMPLE 3**

關於函數 $f(x)=2\sin(3x-\frac{\pi}{2})+5$，試問下列選項何者為真？

(1)將函數 $y=2\sin x$ 水平方向壓縮為 $\frac{1}{3}$ 倍，再向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 單位，向上平移 5 單位可得 $f(x)$ 的圖形

(2) $f(3)<0$　(3) $f(x)$ 的週期為 $\frac{2\pi}{3}$　(4) $f(x)$ 的圖形對稱於直線 $x=\frac{11\pi}{6}$。

(1) $y=2\sin x \xrightarrow{x\to\frac{x}{3}} y=2\sin 3x \xrightarrow{x\to x-\frac{\pi}{6}} y=2\sin[3(x-\frac{\pi}{6})]=2\sin(3x-\frac{\pi}{2}) \xrightarrow{y\to y-5} y=2\sin(3x-\frac{\pi}{2})+5$ (o)

(2) $f(3)=2\sin(9-\frac{\pi}{2})+5\geq -2+5=3$ (x)　(3) 週期 $\frac{2\pi}{3}$ (o)

(4) $\sin(3\cdot\frac{11\pi}{6}-\frac{\pi}{2})=\sin(5\pi)=0$，不是最高(低)點 (x)

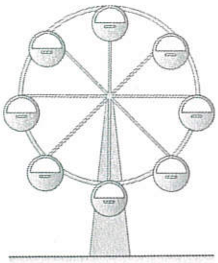
選 (1)(3) #

**EXAMPLE 4**

中一中校慶園遊會區中有一圓形摩天輪，如附圖所示，中心高 22 公尺，直徑 40 公尺，逆時針方向運轉一圈需時 18 分鐘。設摩天輪開始運轉時，甲車廂恰在離地最近的位置上，$x$ 分鐘後車廂離地的高度 $y$（公尺）可表為 $y=a\sin(bx-\frac{\pi}{2})+c$，其中 $a$ 與 $b$ 都是正數。請選出所有正確選項。

(1)運轉 6 分鐘後，甲車廂繞中心旋轉 $\frac{2\pi}{3}$ 徑 (2)若甲車廂共繞行 $60\pi$ 公尺，則摩天輪已運轉 54 分鐘

(3)運轉 24 分鐘後，甲車廂離地面 32 公尺　(4) $2a+c=62$　(5) $b=9\pi$。



最高點 42，最低點 2

∴基線 $y=22$，$c=22$

振幅 20，得 $a=20$

週期 18，得 $\frac{2\pi}{b}=18$，$b=\frac{\pi}{9}$

$y=20\cdot\sin(\frac{\pi}{9}x-\frac{\pi}{2})+22$

(1) $2\pi\times\frac{6}{18}=\frac{2}{3}\pi$ (o)

(2) 繞 k 圈 $\Rightarrow k=\frac{60\pi}{2\pi\times20}=\frac{3}{2}$ 圈，需 $\frac{3}{2}\times18=27$ (x)

(3) $y=20\sin(\frac{\pi}{9}\times24-\frac{\pi}{2})+22=20\sin\frac{13}{6}\pi+22=32$ (o)

(4) $2a+c=62$ (o)

(5) $b=\frac{\pi}{9}$ (x)

選 (1)(3)(4) #

**EXAMPLE 5**

已知某海濱浴場海浪的高度 $y$（m）是時間 $t$（$0\le t\le 24$，單位：$h$）的函數，記作：$y=f(t)$，附表是某日各時的浪高數據：

| $t$ ($h$) | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ ($m$) | 1.5 | 1.0 | 0.5 | 1.0 | 1.5 | 1.0 | 0.5 | 0.99 | 1.5 |

經長期觀測，$y=f(t)$ 的曲線可近似地看成是函數 $y=A\sin(\omega t+\frac{\pi}{2})+b$。依據規定，當海浪高度高於 1.25 m 時才對衝浪愛好者開放，判斷一天內有______小時的時間可供飆網者進行運動。

最高點 1.5，最低點 0.5

基線 $y=1$，$b=1$

振幅 0.5，$a=0.5$

週期 12，$\frac{2\pi}{\omega}=12$，$\omega=\frac{\pi}{6}$

$y=0.5\sin(\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{2})+1>1.25$

$\sin(\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{2})>0.5$，其中 $\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{2}\le\frac{9}{2}\pi$

$\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{2}\le\frac{5}{6}\pi$，$\frac{13\pi}{6}\le\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{2}\le\frac{17\pi}{6}$，$\frac{25\pi}{6}\le\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{2}\le\frac{9}{2}\pi$

$0\le t\le2$，$10\le t\le14$，$22\le t\le24$，共 8 小時