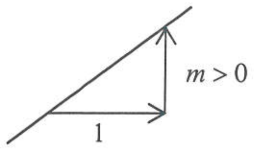
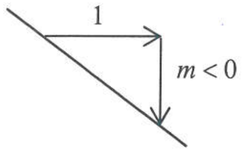
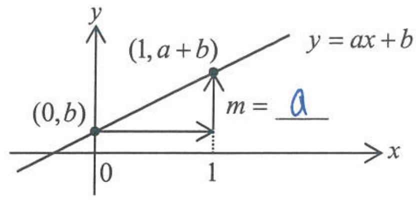
2-1 直線

1. 斜率 (m)：向右 1 單位鉛直的變化量稱為斜率。







(1)斜率的正負：$m>0$ 表示 ↗ ；$m<0$ 表示 ↘ 。

(2)斜率的大小：$|m|$ 越大表示直線越 陡 。

★過兩點 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2) 的直線斜率為 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 、直線 $ax+by+c=0$ 的斜率為 $\dfrac{-a}{b}$ 。

2. 截距：與坐標軸的交點坐標。

設直線 L 與 x 軸的交點為 $(\alpha,0)$，稱 x 截距為 α ；與 y 軸的交點為 $(0,b)$，稱 y 截距為 b 。

★直線 $y=ax+b$ 係數的意義：a 表示 斜率 ，b 表示 y 截距 。

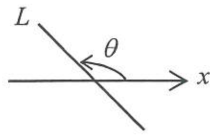
3. 直線方程式⇒① 斜率 ② 點

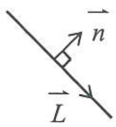
(1)斜直線：給定直線斜率 m 且過點 (x_0,y_0) 的直線方程式為 $y-y_0=m(x-x_0)$

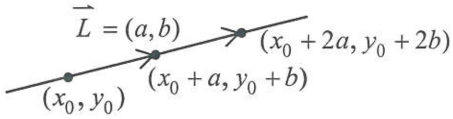
(2)水平線：斜率為 0 且過點 (x_0,y_0) 的直線方程式為 $y=y_0$

(3)鉛直線：斜率 不存在 且過點 (x_0,y_0) 的直線方程式為 $x=x_0$

4. 直線與其他單元連結：







(1)三角函數：直線 L 與正 x 軸夾角為 θ，則直線 L 的斜率為 $\tan\theta$ 。

(2)向量：直線 $L:ax+by+c=0$ 的方向向量 $\overrightarrow{L}=$ $(b,-a)$ ，法向量為 (a,b) 。

(3)參數式：直線 L 之方向向量 $\overrightarrow{L}=(a,b)$ 且過點 $A(x_0,y_0)$，則

①直線 L 的參數式為 $\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\end{cases}$ t為所有實數 或 (x_0+at,y_0+bt) (求點坐標)。

②直線 L 的比例式為 $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}$ 或 $bx-ay=bx_0-ay_0$ (方程式)。

5. 平行與垂直：

已知兩直線 L_1,L_2 的斜率分別為 m_1,m_2，其方向向量分別為 $\overrightarrow{L_1},\overrightarrow{L_2}$，

(1)若 $L_1 // L_2$，則 $m_1=m_2$ (斜率) 或 $\overrightarrow{L_1}//\overrightarrow{L_2}$ (向量)。

(2)若 $L_1\perp L_2$，則 $m_1m_2=-1$ (斜率) 或 $\overrightarrow{L_1}\cdot\overrightarrow{L_2}=0$ (向量)。

★平行垂直直線假設法：設直線 $L:ax+by+c=0$

(1)若 $L_1 // L$，設直線 L_1: $ax+by=k$ (2)若 $L_2\perp L$，設直線 L_2: $bx-ay=k$

6. 兩直線相交情形：

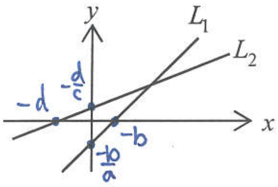
兩直線方程式 $L_1: a_1x+b_1y=c_1$ 、 $L_2: a_2x+b_2y=c_2$

關係	圖形	判別式	解的個數
(1) 平行		$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$	無解
(2) 重合		$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$	無限多解
(3) 相交於一點		$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$	一組解 $(x,y)=$ $(\frac{\Delta_x}{\Delta},\frac{\Delta_y}{\Delta})$

EXAMPLE 1

兩直線 L_1, L_2 的方程式分別為 $L_1: x+ay+b=0$ 、 $L_2: x+cy+d=0$ ，試問下列哪些選項正確？

(1) $a>0$ (2) $b>0$ (3) $c>0$ (4) $d>0$ (5) $a>c$



L_1之 x截距：$-b>0, b<0$

L_1之 y截距：$\frac{-b}{a}<0, a<0$

L_2之 x截距：$-d<0, d>0$

L_2之 y截距：$\frac{-d}{c}>0, c<0$

L_1之斜率 $=-\frac{1}{a}$

L_2之斜率 $=-\frac{1}{c}$

得 $-\frac{1}{a}>-\frac{1}{c}>0$

$\Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{c}$

$ac>0 \Rightarrow c<a$

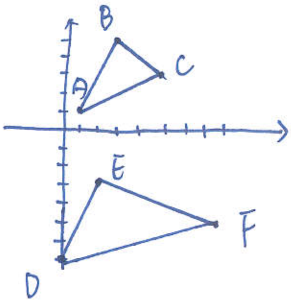
選 (4)(5) #

EXAMPLE 2

設 $A(1,1), B(3,5), C(5,3), D(0,-7), E(2,-3), F(8,-6)$ 為坐標平面上的點。若直線 L 分別與 ΔABC 及 ΔDEF 各有 1 個交點，則 L 的斜率之最小可能值為何？

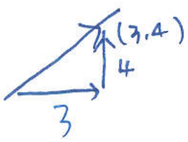
與 ΔABC、ΔDEF 各1交點 ⇒ 頂點

最小的斜率 $m_{CF}=\frac{-6-3}{8-5}=-3$ #



EXAMPLE 3

直線 L 的方向向量 $\overrightarrow{L}=(3,4)$ ，求直線 L 的斜率。



$m=\frac{4}{3}$ $(\frac{\Delta y}{\Delta x})$ #

EXAMPLE 4

求過點 $A(1,2)$ 、 $B(3,4)$ 之直線方程式。

① 點 $A(1,2)$ ② $m=\frac{4-2}{3-1}=1$

方程式： $y-2=1\cdot(x-1)$ #

EXAMPLE 5

設 $A(0,0), B(10,0), C(10,6), D(0,6)$ 為坐標平面上的四點。若直線 $y=m(x-7)+4$ 將四邊形 $ABCD$ 分成面積相等的兩塊，求 m 。

① 將 ABCD 面積平分 ⇒ 過中心 $(5,3)$

$(5,3)$ 在 $y=m(x-7)+4$ 上

$\Rightarrow 3=m(5-7)+4$, $m=\frac{1}{2}$ #

EXAMPLE 6

在坐標平面上，設 A 為直線 $3x-y=0$ 上一點， B 為 x 軸上一點。若 $\overline{AB}$ 的中點坐標為 $(\frac{7}{2},6)$ ，求 A 點與 B 點坐標。

設 $A(a,3a)$, $B(b,0)$

A.B 中點 $(\frac{a+b}{2},\frac{3a}{2})=(\frac{7}{2},6) \Rightarrow a=4, b=3$

故 $A(4,12)$, $B(3,0)$

EXAMPLE 7

設a,b均為整數，已知直線$L:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$恆過定點$P(3,-2)$，則下列敘述哪些正確？

(1)此直線L共有 7 條
(2)L一定不過第二象限
(3)L一定不過坐標原點
(4)L與兩坐標軸所圍之三角形面積最大為 16
(5)L與兩坐標軸所圍之三角形面積最小為 1

(1) ∵ P在L上 ⇒ $\frac{3}{a}+\frac{-2}{b}=1$，$3b-2a=ab$

$ab+2a-3b=0$，$(a-3)(b+2)=-6$

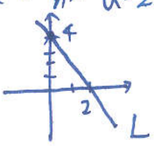
∵ a,b 均為整數，$(a-3)(b+2)=1\times(-6)=(-1)\times6$
$=2\times(-3)=(-2)\times3$
$=3\times(-2)=(-3)\times2$
$=6\times(-1)=(-6)\times1$

但 $a-3=-3$，$b+2=2$ 時

$(a,b)=(0,0)$ 不合，故有7組解 (O)

$(a,b)=(4,-8),(2,4),(5,-5),(1,1),(6,-4),\cancel{(0,0)},(9,-3),(-3,-1)$

(2) 取 $a=2$，$b=4$ 時 (符合$(-1)\times6$)



如圖，L過第二象限 (×)

(3) 若過$(0,0)$，則 $\frac{0}{a}+\frac{0}{b}=0\neq1$，(不合) (O)

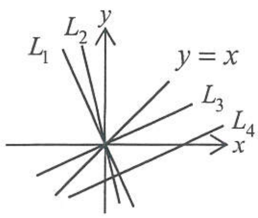
(4)(5) 三角形面積$=\frac{1}{2}|ab|$ 最大為 $\frac{1}{2}\times4\times8=16$ (O)
最小為 $\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$ (×)

選(1)(3)(4)

EXAMPLE 9

坐標平面上四條直線L_1,L_2,L_3,L_4與x軸、y軸與$y=x$的相關位置如圖所示，其中$L_1\perp L_3$且$L_3 // L_4$。設L_1,L_2,L_3,L_4的方程式分別為$y=m_1x$，$y=m_2x$，$y=m_3x$及$y=m_4x+c$，試問下列哪些正確？

(1)$m_3>m_2>m_1$　(2)$m_1m_4=-1$　(3)$m_1<-1$
(4)$m_2m_3<-1$　(5)$c>0$



(1) $L_1\perp L_3\Rightarrow m_1\cdot m_3=-1$
$L_3 // L_4\Rightarrow m_3=m_4$
又 $m_2<m_1<0$ 且 $|m_2|>|m_1|$
故 $m_3>0>m_1>m_2$ (×)

(2) $m_1\cdot m_3=m_1\cdot m_4=-1$ (O)

(3) $y=x$之斜率為1，$m_3<1$，又 $m_1\cdot m_3=-1$
$m_1<0\Rightarrow m_1\cdot m_3>m_1\cdot1\Rightarrow -1>m_1$ (O)

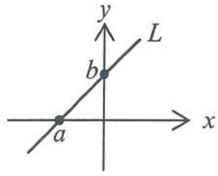
(4) $m_2<m_1$ 又 $m_3>0\Rightarrow m_2\cdot m_3<m_1\cdot m_3=-1$ (O)

(5) $y=m_4x+c$之y截距為 $c<0$ (×)．選(2)(3)(4)

補充 截距式：常用於直線L與兩軸所圍三角形

設直線L之x截距為a、y截距b，則

L的方程式為 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 。



EXAMPLE 8

直線L恆過定點$(3,-2)$，且L與兩坐標軸在第一象限所圍成之三角形面積為 4，求L的方程式。

設直線L斜率m ⇒ $y+2=m(x-3)$，$mx-y=2+3m$

得 x截距：$\frac{2+3m}{m}$，y截距：$-(2+3m)$

所圍三角形面積 $=\frac{1}{2}\times\frac{2+3m}{m}\times-(2+3m)=4$

∴ $-(2+3m)^2=8m$，$4+12m+9m^2=-8m$

$9m^2+20m+4=0$，$(9m+2)(m+2)=0$

$m=\frac{-2}{9}$ 或 -2

y截距<0
(不合)
∵第一象限

∴ $L: y+2=-2(x-3)$ #

EXAMPLE 10

若實數a,b,c,d使得$\begin{cases}ax+8y=c\\x-4y=3\end{cases}$有解且$\begin{cases}-3x+by=d\\x-4y=3\end{cases}$無解，則下列哪些選項正確？

(1)$a\neq2$　(2)$c=-6$　(3)$b=12$　(4)$d\neq-9$

(5)$\begin{cases}ax+8y=c\\-3x+by=d\end{cases}$無解

∵ $\begin{cases}-3x+by=d\\x-4y=3\end{cases}$ 無解 ∴ $\frac{-3}{1}=\frac{b}{-4}\neq\frac{d}{3}$

$\Rightarrow b=12$，$d\neq-9$

$\begin{cases}ax+8y=c\\x-4y=3\end{cases}$ 有解．可能為 $\underbrace{\text{1解}}_{a\neq-2}$ 或 $\underbrace{\text{無限多解}}_{a=-2\text{ 且 }c=-6}$

(5) 若 $ax+8y=c$ 與 $x-4y=3$ 相交
又 $-3x+by=d$ 與 $x-4y=3$ 平行，
則 $ax+8y=c$ 與 $-3x+by=d$ 相交 (×)

選(3)(4) #

2-2 點與直線

1. 點與直線的關係：

設直線 $L: f(x,y)=ax+by+c=0$，其中 $a>0$

(1)點 A 在直線 L 上 $\Rightarrow$ $f(A)=0$

(2)點 A 在直線 L 的右側 $\Rightarrow$ $f(A)>0$

(3)點 A 在直線 L 的左側 $\Rightarrow$ $f(A)<0$

(4)點 A,B 在直線 L 的同側 $\Rightarrow$ $f(A)f(B)>0$

(5)點 A,B 在直線 L 的異側 $\Rightarrow$ $f(A)f(B)<0$

(6)線段 $\overline{AB}$ 與直線相交 $\Rightarrow$ $f(A)f(B)\le 0$

2. 二元一次不等式：

(1) $ax+by+c=0$ 的圖形為 一直線 ，$ax+by+c>0$(或 <0) 的圖形為 半平面 。

(2)半平面(左、右、上、下)的判定：

①x 的係數為 a $\Rightarrow$ 判定 左或右

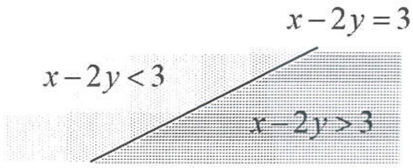
若 $a>0$ 時，右 大 左 小 ；

若 $a<0$ 時，右 小 左 大 。

②y 的係數為 b $\Rightarrow$ 判定 上或下

若 $b>0$ 時，上 大 下 小 ；

若 $b<0$ 時，上 小 下 大 。

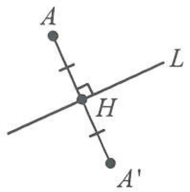


3. 投影點與對稱點：求點 A 對直線 L 的對稱點為 A'

[步驟 1]做垂直 L 之直線 $\overline{AA'}$(垂直假設法)

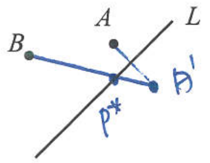
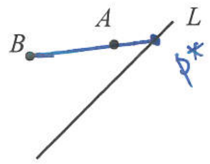
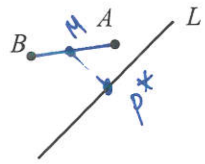
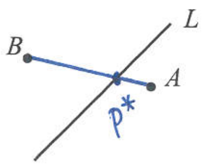
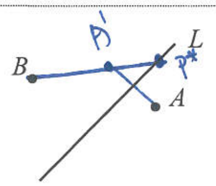
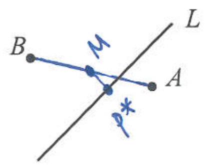
[步驟 2]投影點 H 為直線 L 與直線 $\overline{AA'}$ 的交點

[步驟 3]對稱點 A' 與點 A 的中點為投影點 H



4. 最短距離：

設 P 為直線 L 上的點，找出滿足下列條件的點 P 。

	$\overline{PA}+\overline{PB}$ 有最小值	$\lvert\overline{PA}-\overline{PB}\rvert$ 有最大值	$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 有最大值
A,B 在直線 L 同側			
A,B 在直線 L 異側			

5. 距離公式：

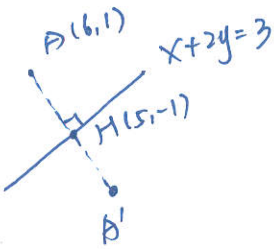
(1)點 $A(x_0,y_0)$ 到直線 $L: ax+by+c=0$ 的距離為 $d(A,L)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(2)兩平行線 $L_1: ax+by+c_1=0, L_2: ax+by+c_2=0$ 的距離 $d(L_1,L_2)=\dfrac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

EXAMPLE 1

先求投影点.

給定點 $A(6,1)$、直線 $L:x+2y=3$，求點 A 對直線 L 的對稱點 A' 的坐標。



直線 $\overleftrightarrow{AH} \perp L$

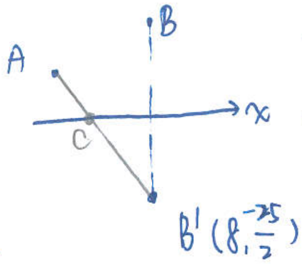
$\Rightarrow \overleftrightarrow{AH}: 2x-y \overset{(6,1)}{=} 11$

$H\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x-y=11 \end{cases}$, $5y=-5$, $y=-1$, $x=5$

$\frac{A+A'}{2}=H$, $A'=2H-A=(4,-3)$ #

EXAMPLE 2

給定兩點 $A(-4,\frac{7}{2}), B(8,\frac{25}{2})$，在 x 軸上找一點 C 使得 ΔABC 的周長最小，求 ΔABC 周長的最小值。



作 B 對 x 軸之對稱点 $B'(8,\frac{-25}{2})$

ΔABC 周長 $=\overline{AC}+\overline{BC}+\overline{AB}$

$=\overline{AC}+\overline{B'C}+\sqrt{12^2+9^2}$

$\geq \overline{AB'}+15$

$=\sqrt{12^2+16^2}+15$

$=20+15=35$ #

EXAMPLE 3

$5a+12b+4=0$

求點 $P(a,b)$ 在直線 $L:5x+12y+4=0$ 上，求 $\sqrt{(a-1)^2+(b-2)^2}$ 的最小值。

[法一] 柯西.

$[(a-1)^2+(b-2)^2][5^2+12^2] \geq (5a-5+12b-24)^2$

$\Rightarrow [(a-1)^2+(b-2)^2]\times 13 \geq (-33)^2 \Rightarrow (a-1)^2+(b-2)^2 \geq \frac{1089}{13}$

$\Rightarrow \sqrt{(a-1)^2+(b-2)^2} \geq \frac{33}{\sqrt{13}}$

[法二] (a,b) 到 $(1,2)$ 距

$\frac{|5\times1+12\times2+4|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\frac{33}{13}$

EXAMPLE 4

兩平行直線 $L_1:3x+4y+5=0$ 及 $L_2:6x+8y+k=0$ 的距離~~。~~ 為 2，求 k 值。

$\Rightarrow 6x+8y+10=0$

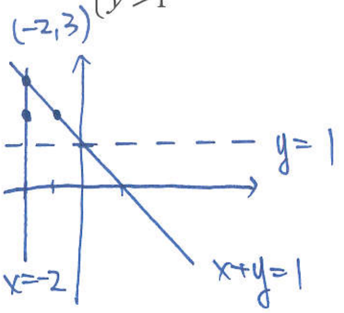
$\frac{|k-10|}{\sqrt{6^2+8^2}}=2$, $k=10\pm20$

$=-10$ 或 30 #

EXAMPLE 5

$\begin{cases} x+y \leq 1 \\ x \geq -2 \\ y > 1 \end{cases}$ 的可行解區域有幾個格子點？

(x,y) 均為整數

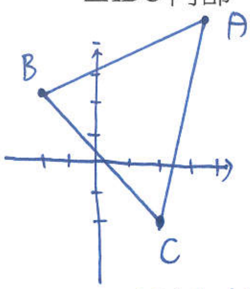


共 3 個格子点

$(-2,2),(-1,2),(-2,3)$

EXAMPLE 6

設 $A(4,5), B(-2,2), C(2,-2), P(k,2k-3)$，若點 P 為 ΔABC 內部一點(含邊界)，求實數 k 的範圍。



$\overleftrightarrow{AB}$: ①点 $(4,5)$ ② $m=\frac{-3}{-6}=\frac{1}{2} \Rightarrow y-5=\frac{1}{2}(x-4)$

$\Rightarrow x-2y+6=0$

$\overleftrightarrow{AC}$: ①点 $(4,5)$ ② $m=\frac{7}{2} \Rightarrow y-5=\frac{7}{2}(x-4)$

$\Rightarrow 7x-2y-18=0$

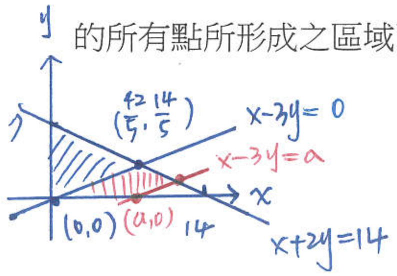
$\overleftrightarrow{BC}$: ①点 $B(-2,2)$ ② $m=\frac{-4}{4}=-1 \Rightarrow y-2=-1(x+2)$

$\Rightarrow x+y=0$

$\begin{cases} x-2y+6\geq0 \\ 7x-2y-18\leq0 \\ x+y\geq0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k-4k+6+6\geq0 \\ 7k-4k+6-18\leq0 \\ k+2k-3\geq0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k\leq4 \\ k\leq4 \\ k\geq1 \end{cases} \Rightarrow 1\leq k\leq4$ #

EXAMPLE 7

設 a 為一實數，已知在第一象限滿足 $\begin{cases} x-3y \leq a \\ x+2y \leq 14 \end{cases}$ 的所有點所形成之區域面積為 $\frac{213}{5}$，求 a 值。



$\begin{cases} x-3y=0 \\ x+2y=14 \end{cases}$, $y=\frac{14}{5}$, $x=\frac{42}{5}$

所圍面積 $=\frac{1}{2}\times7\times\frac{42}{5}=\frac{147}{5}<\frac{213}{5}$

$\begin{cases} x-3y=a \\ x+2y=14 \end{cases}$, $5y=14-a$, $y=\frac{14-a}{5}$

所圍面積 $=\frac{1}{2}\times7\times14-\frac{1}{2}(14-a)\times\frac{14-a}{5}=\frac{213}{5}$

$\Rightarrow 490-(14-a)^2=426$

$(14-a)^2=64$

$14-a=\pm8$

$a=6$ 或 22 (不合) #

EXAMPLE 8

坐標平面上兩點 $(4,1)$ 和 $(5,9)$ 在直線 $3x-y-k=0$ 的兩側，其中 k 為整數，請選出正確的選項。

(1)滿足上式的 k 最少有 5 個

(2)所有滿足上式的 k 的總和為 35

(3)所有滿足上式的 k 中，最小的是 7

(4)所有滿足上式的 k 的平均是 9

(5)所有滿足上式的 k 中，奇數和偶數的個數相同

$f(A)\cdot f(B)<0$

$\Rightarrow (11-k)(6-k)<0$

$\Rightarrow (k-6)(k-11)<0$

$\Rightarrow 6<k<11$

故 $k=7,8,9,10$

選 (3)(5) #

2-3 圓方程式

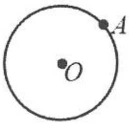
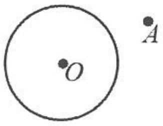
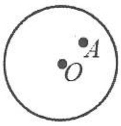
1. 圓方程式⇒① 圓心 ② 半徑

   (1)標準式：給定圓心(h,k)和半徑r的圓方程式為 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

   (2)一般式：過不共線三點的圓方程式為 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$

2. 點和圓的關係

   點$A(x_0,y_0)$與圓$C: f(x,y)=x^2+y^2+dx+ey+f=0$，半徑為$r$，$P$為圓上任一點。

關係	圖形	判斷式	$\overline{AP}$ 最小值	$\overline{AP}$ 最大值
(1)點在圓上		$f(A)=0$		
(2)點在圓外		$f(A)>0$	$\overline{OA}-r$	$\overline{OA}+r$
(3)點在圓內		$f(A)<0$	$r-\overline{OA}$	$\overline{OA}+r$

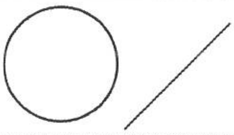
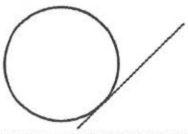
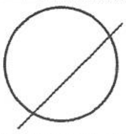
3. 線和圓的關係

   直線$L: ax+by+c=0$與圓$C: f(x,y)=x^2+y^2+dx+ey+f=0$，其中圓心為$O(h,k)$、半徑為$r$。

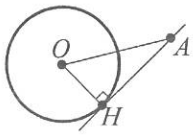
$$d(O,L)=\frac{|ah+bk+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+dx+ey+f=0 \\ ax+by+c=0 \end{cases}$$

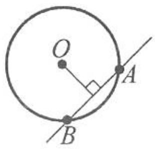
$$\Rightarrow Ax^2+Bx+C=0\ (D=b^2-4ac)$$

關係	圖形	[判別法一] $d(O,L)$	[判別法二]交點個數(解聯立)
(1)相離		$d(O,L)>r$	$D<0$
(2)相切		$d(O,L)=r$	$D=0$
(3)相割		$d(O,L)<r$	$D>0$

★切線段長 $\overline{AH}=\sqrt{\overline{OA}^2-r^2}$



弦長 $\overline{AB}=2\sqrt{r^2-d^2}$



EXAMPLE 1

已知圓 C 的圓心在 $x+2y=3$ 上，且圓 C 通過 $A(5,1), B(3,-1)$，求圓 C 的方程式。

設圓心 $O(3-2t, t)$

$\overline{OA}=\overline{OB} \Rightarrow \sqrt{(-2-2t)^2+(t-1)^2}=\sqrt{(-2t)^2+(t+1)^2}$

$\therefore 4+8t+\cancel{4t^2}+\cancel{t^2}-2t+\cancel{1}=\cancel{4t^2}+\cancel{t^2}+2t+\cancel{1}$

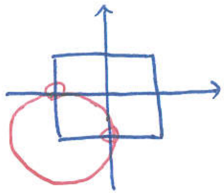
$4t=-4,\ t=-1$. 圓心 $(5,-1),\ r=2$

$C: (x-5)^2+(y+1)^2=4$ #

EXAMPLE 2

以 $(1,1),(-1,1),(-1,-1),(1,-1)$ 四個點為頂點的正方形與圓 $x^2+y^2+2x+2y+1=0$ 有幾個交點。

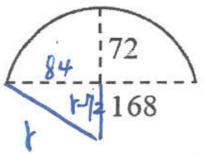
↳ $(x+1)^2+(y+1)^2=1$，$\boxed{圓}$心 $(-1,-1)$, $r=1$



2個交點 #

EXAMPLE 3

工匠在窗子外邊想做一個圓弧型的花台，此花台在窗口的中央往外伸出 72 公分，窗口的寬度是 168 公分。求此圓弧的圓半徑。



設半徑 r

由圖中直角三角形知

$r^2=84^2+(r-72)^2$

$\Rightarrow r^2=84^2+r^2-144r+72^2$

$\Rightarrow 144r=84^2+72^2$

$\Rightarrow r=7^2+6^2=49+36=85$ #

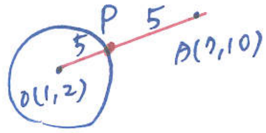
EXAMPLE 4

設 $A(7,10)$，圓 $C: x^2+y^2-2x-4y-20=0$，求

(1) A 到圓 C 的最近距離

(2)承(1)，此時圓上最近點坐標 (分點公式)

$C: (x-1)^2+(y-2)^2=25=5^2$

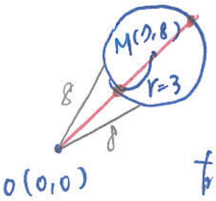


(1) 最近距離 $\overline{AP}=\overline{OA}-5$
$=10-5=5$ #

(2) P 為 O、A 中點 $\Rightarrow P=(4,6)$ #

EXAMPLE 5

坐標平面上，圓 $C:(x-7)^2+(y-8)^2=9$ 上有幾個點與原點的距離為整數？



設圓心 $M(7,8)$

$\overline{OM}=\sqrt{7^2+8^2}=\sqrt{113}\approx 10.\sim$

故圓上點到 $O(0,0)$ 的

最近距離 $=10.\sim-3=7.\sim$

最遠距離 $=10.\sim+3=13.\sim$

距離為整數的有 8, 9, 10, 11, 12, 13

有 $6\times 2=12$ 個點 #

EXAMPLE 6

設 Γ 為圓，點 $(0,0)$ 在 Γ 的外部且點 $(2,6)$ 在 Γ 的內部，選出下列哪些選項正確？

(1) Γ 的圓心不可能在第二象限

(2) Γ 的圓心可能在第三象限且此時半徑大於 10

(3) Γ 的圓心可能在第一象限且此時半徑小於 10

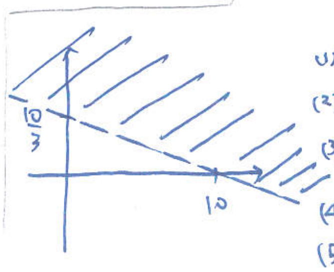
(4) Γ 的圓心可能在 x 軸上且圓心 x 坐標小於 10

(5) Γ 的圓心可能在第四象限且此時半徑大於 10

設圓心 $M(x,y)$, $A(0,0)$, $B(2,6)$

$\begin{cases}\overline{MA}>r\\ \overline{MB}<r\end{cases} \Rightarrow \overline{MA}>\overline{MB} \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}>\sqrt{(x-2)^2+(y-6)^2}$

$\Rightarrow 4x+12y>40,\ x+3y>10$



(1) 由圖知，可能在第二象限 (x)

(2) 不可能在第三象限 (x)

(3) 不一定，取圓心 $(100,100)$, $10<\overline{MB}<r$ (x)

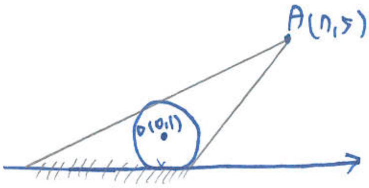
(4) 由圖知，圓心若在 x 軸上，其 x 坐標大於 10 (x)

(5) 若圓心在第四象限, $\sqrt{(0-2)^2+(0-6)^2}<\overline{MB}<r$, $r>10$ (o)

選(5) #

EXAMPLE 7

在坐標平面上 $(7,5)$ 處有一光源，將圓 $x^2+(y-1)^2=1$ 投射到 x 軸，求 x 軸上影長。



投影長即為兩切線在x軸交點的距離.

設切線斜率 m，$\Rightarrow L: y-5=m(x-7)$

$\Rightarrow mx-y+5-7m=0$

$d(O,L)=r \Rightarrow \dfrac{|0-1+5-7m|}{\sqrt{m^2+1^2}}=1$，$|4-7m|=\sqrt{m^2+1}$

$\Rightarrow 16-56m+49m^2=m^2+1$，$48m^2-56m+15=0$

$(12m-5)(4m-3)=0$，$m=\frac{5}{12}$ 或 $\frac{3}{4}$

$y-5=\frac{5}{12}(x-7) \xrightarrow{\text{與x軸交點}} (-5,0)$

$y-5=\frac{3}{4}(x-7) \Longrightarrow (\frac{1}{3},0)$

投影長為 $\frac{16}{3}$ #

EXAMPLE 8

一圓通過點 $A(-2,7)$ 且與直線 $L: 4x+3y-14=0$ 相切於點 $B(-1,6)$，求此圓方程式。設圓心 $O(h,k)$

$\begin{cases}\overline{OA}=\overline{OB} \\ \overline{OB}\perp L\end{cases}$

$\Rightarrow (h+2)^2+(k-7)^2=(h+1)^2+(k-6)^2$

$\Rightarrow 2h-2k=-16$，$h-k=-8$

$\Rightarrow m_{OB}\times m_L=-1$，$\dfrac{k-6}{h+1}\times\dfrac{-4}{3}=-1$

$\Rightarrow 3h-4k=-27$

$\begin{cases}h-k=-8 \\ 3h-4k=-27\end{cases}$

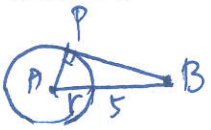
$k=3$，$h=-5$

圓心 $(-5,3)$，$r=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$C: (x+5)^2+(y-3)^2=25$ #

EXAMPLE 9

平面上兩點 A,B 之距離為 5，以 A 為圓心作一半徑為 r $(0<r<5)$ 的圓 Γ，過 B 作圓 Γ 的切線，切點(之一)為 P。當 r 變動時，ΔPAB 的面積最大可能為何？



$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=5^2$

欲求 $\frac{1}{2}\cdot\overline{PA}\cdot\overline{PB}$ 之最大

$\dfrac{\overline{PA}^2+\overline{PB}^2}{2}\geq\sqrt{(\overline{PA})^2(\overline{PB})^2}=\overline{PA}\times\overline{PB}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\overline{PA}\times\overline{PB}\leq\frac{1}{2}\times\frac{25}{2}=\frac{25}{4}$ #

EXAMPLE 10

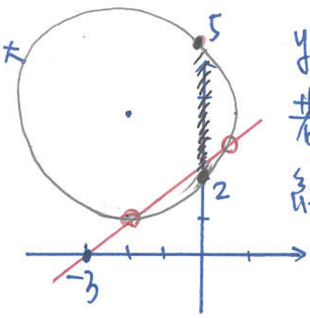
設 m 是實數，若 $x^2+y^2+4x-7y+10=0$ 與直線 $y=m(x+3)$ 在坐標平面上的兩個交點位於不同的象限，求滿足此條件的 m 的範圍。

$(x+2)^2+(y-\frac{7}{2})^2=-10+4+\frac{49}{4}=\frac{25}{4}$

$y=m(x+3)$ 必過 $(-3,0)$

若需有2個不同象限交點，

線與y軸之交點介於兩黑點間(如圖)



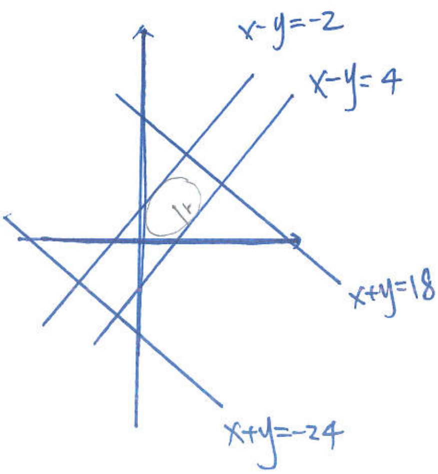
$\begin{cases}x^2+y^2+4x-7y+10=0 \\ x=0\end{cases}$，$y^2-7y+10=0$

$y=5$ or 2

$\dfrac{2-0}{0-(-3)}<m<\dfrac{5-0}{0-(-3)}$，$\frac{2}{3}<m<\frac{5}{3}$ #

EXAMPLE 11

坐標平面上，圓 Γ 完全落在四個不等式：$x-y\leq 4$, $x+y\leq 18$, $x-y\geq -2$, $x+y\geq -24$ 所圍成的區域內，則 Γ 最大可能面積為何？



設圓半徑 r

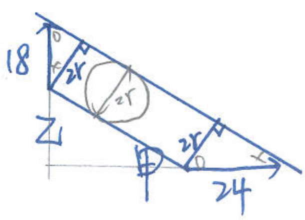
$\Rightarrow 2r=\dfrac{6}{\sqrt{1^2+1^2}}=3\sqrt{2}$

$\Rightarrow r=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

最大面積 $\pi r^2=\frac{9}{2}\pi$ #

EXAMPLE 12

地面上甲、乙兩人從同一地點同時開始移動。甲以每秒 4 公尺向東等速移動，乙以每秒 3 公尺向北等速移動。在移動不久之後，他們互望的視線被一圓柱體建築物阻擋了 6 秒後才又相見。求此建築物底圓的直徑。



$\dfrac{\overset{4}{\cancel{24}}}{2r}=\dfrac{\overset{3}{\cancel{18}}}{\sqrt{18^2-(2r)^2}}$

$\Rightarrow 16(324-(2r)^2)=9(2r)^2$

$\Rightarrow 25(2r)^2=16\times 324$

$\Rightarrow 2r=\dfrac{4\times 18}{5}=\dfrac{72}{5}$