5-1 邏輯與集合

1. 邏輯

(1)敘述(命題)：能判斷真偽的語句。習慣「真」以「T」表示，「偽」以「F」表示。

(2)否定敘述：敘述 p 的否定敘述，以「$\sim p$」表示。

(3)複合敘述：將兩個敘述以「且」、「或」連接。「且」以「$\wedge$」表示，「或」以「$\vee$」表示。

敘述 p	敘述 q	$p\wedge q$	$p\vee q$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	F	F	F

(4)笛摩根律：$\sim(p\wedge q)=$ $(\sim p)\vee(\sim q)$ ；$\sim(p\vee q)=$ $(\sim p)\wedge(\sim q)$

2. 集合

(1)由一群物件組合出來的群體，這些物件稱為 元素 ，這個群體稱為 集合 。

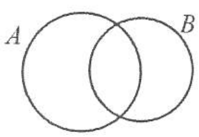
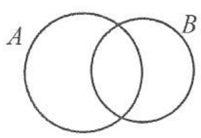
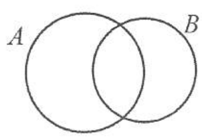
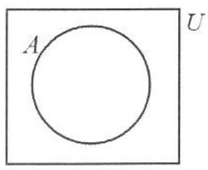
習慣集合以大寫的英文字母表示，元素以小寫英文字母表示。$n(A)$ 表示集合 A 內的元素個數。

(2)"="(等於)：$A=B$表示集合 A 和集合 B 有相同的元素。

"$\subset$"(包含於)：$A\subset B$ 表示集合 A 的元素，集合 B 都有。也稱 A 是 B 的 子集 。

"$\in$" (屬於)：$a\in A$表示集合 A 有元素 a。

(3)運算

運算	$A\cap B$	$A\cup B$	$A-B$	A'	$A\times B$
名稱	交集	聯集	差集	補(餘)集	積集
文氏圖					$\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$

習慣上，U 表示 宇集 ，$\varnothing$ 表示 空集合

(4)笛摩根律：$(A\cup B)'=$ $A'\cap B'$ ；$(A\cap B)'=$ $A'\cup B'$

3. 集合計數：

$n(A\cup B)=$ $n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ $n(A-B)=$ $n(A)-n(A\cap B)$ $n(A')=$ $n(U)-n(A)$

$n(A\cup B\cup C)=$ $n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)$ $n(A\times B)=$ $n(A)\times n(B)$

EXAMPLE 1

學校規定上學期成績需同時滿足以下兩項要求，才有資格參選模範生。

一、國文成績或英文成績 70 分(含)以上；

二、數學成績及格。

已知小文上學期國文 65 分而且他不符合參選模範生資格。請問哪一個選項的推論是正確的？

(1) 小文的英文成績未達 70 分

(2) 小文的數學成績不及格

(3) 小文的英文成績 70 分以上但數學成績不及格

(4) 小文的英文成績未達 70 分且數學成績不及格

(5) 小文的英文成績未達 70 分或數學成績不及格

小文是模範生：$\underbrace{\text{英文70}}_{A}$ 且 $\underbrace{\text{數學及格}}_{B}$ $A \cap B$

小文不是模範生：$(A\cap B)' = A' \cup B'$

選 (5)#

EXAMPLE 2

甲先生、乙先生、丙先生、丁先生四位男士以及 *A* 小姐、*B* 小姐、*C* 小姐、*D* 小姐四位女士想要混搭兩部計程車，每車載有四名乘客。已知：

（一）甲先生與 *A* 小姐同車

（二）乙先生與 *B* 小姐同車

（三）*C* 小姐與 *D* 小姐不同車

請選出正確的選項。

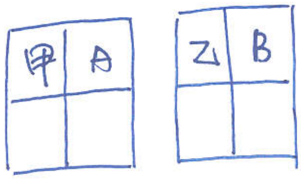
(1) *A* 小姐與 *D* 小姐必不同車

(2)甲先生與 *B* 小姐必不同車

(3)乙先生與丙先生必同車

(4)如果乙先生與丁先生同車，則丙先生與 *B* 小姐必同車

(5)如果 *D* 小姐與乙先生同車，則 *C* 小姐與 *A* 小姐必同車



丙丁不同車

若果甲A和乙B同車，則C、D同車

故甲A和乙B必不同車 且 C、D不同車

(1)無法判斷 (2)正確 (3)無法判斷

(4)乙丁同車，丙必在甲A車 (X) (5)正確，選(2)(5)#

EXAMPLE 3

某班 35 人，每天習慣喝含糖茶飲料的有 25 人，習慣喝咖啡的有 10 人，兩者都有的有 6 人，下列何者正確？

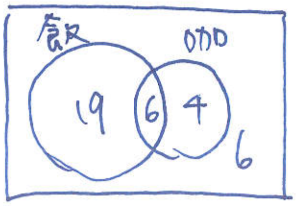
(1)只喝含糖茶飲料的有 19 人

(2)只喝咖啡的有 4 人

(3)全班都喝含糖茶飲料或咖啡

(4)不喝含糖茶飲料且不喝咖啡的有 6 人

(5)不喝含糖茶飲料的有 10 人



(1) 正確

(2) 正確

(3) 有6人都不喝 (X)

(4) 正確

(5) 正確

選 (1)(2)(4)(5)#

EXAMPLE 4

某一班共有 45 人，問卷調查有手機與平板電腦的人數。從統計資料顯示此班有 35 人有手機，而有 24 人有平板電腦。設：

A 為同時有手機與平板電腦的人數

B 為有手機，但沒有平板電腦的人數

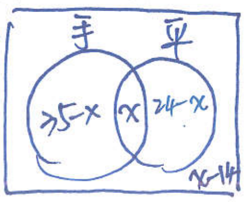
C 為沒有手機，但有平板電腦的人數

D 為沒有手機，也沒有平板電腦的人數

請選出恆成立的不等式選項。

(1) $A>B$ (2) $A>C$ (3) $B>C$ (4) $B>D$ (5) $C>D$

[法一]



設二者都有的 x 人

$$\begin{cases} 35-x\geq 0 \\ x\geq 0 \\ 24-x\geq 0 \\ x-14\geq 0 \end{cases} \Rightarrow 14\leq x\leq 24$$

$14\leq A\leq 24$

$11\leq B\leq 21$

$0\leq C\leq 10$

$0\leq D\leq 10$

[法二] 極端值

選 (2)(3)(4)#

A、B、C、D、E
F、G、H、I、J

EXAMPLE 5

某商店出售 10 種不同款式的公仔。今甲、乙、丙三人都各自收集公仔。試選出正確的選項。

(1) 若甲、乙兩人各自收集 6 款公仔，則他們兩人合起來一定會收集到這 10 款不同的公仔

(2) 若甲、乙兩人各自收集 7 款公仔，則至少有 4 款公仔是兩人都擁有

(3) 若甲、乙、丙三人各自收集 6 款公仔，則至少有 1 款公仔是三人都擁有

(4) 若甲、乙、丙三人各自收集 7 款公仔，則至少有 2 款公仔是三人都擁有

(5) 若甲、乙、丙三人各自收集 8 款公仔，則至少有 4 款公仔是三人都擁有

(1) 可甲、乙收集相同 6 款

(2) $n(甲\cap乙)=n(甲)+n(乙)-n(甲\cup乙)$
$\geq 7+7-10=4$ (O)

(3) 甲 $=\{A,B,C,D,E,F\}$
乙 $=\{E,F,G,H,I,J\}$, $n(甲\cap乙\cap丙)=0$
丙 $=\{A,B,C,D,I,J\}$

(4) 甲 $=\{A,B,C,D,E,F,G\}$
乙 $=\{H,I,J,D,E,F,G\}$, $n(甲\cap乙\cap丙)=1$
丙 $=\{A,B,C,H,I,J,D\}$

(5) $n(甲\cap乙)=n(甲)+n(乙)-n(甲\cup乙)\geq 8+8-10=6$
$n(甲\cap乙\cap丙)=n(甲\cap乙)+n(丙)-n((甲\cap乙)\cup丙)$
$\geq 6+8-10=4$ (O)

選 (2)(5) #

EXAMPLE 6

某班級 50 位學生，段考國文、英文、數學及格的人數分別為 45、39、34 人，且英文及格的學生國文也都及格。現假設數學和英文皆及格的有 x 人，數學及格但英文不及格的有 y 人。請選出正確的選項。

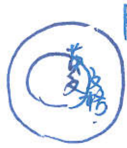
(1) $x+y=39$

(2) $y\leq 11$

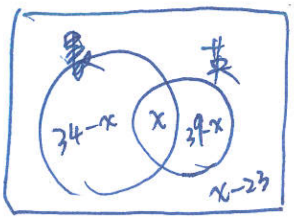
(3)三科中至少有一科不及格的學生有 $39-x+y$ 人

(4)三科中至少有一科不及格的學生最少有 11 人

(5)三科中至少有一科不及格的學生最多有 27 人



⇒ 國文不及格者，英文也都不及格



(1) $y=34-x \Rightarrow x+y=34$ (X)

(2) $\begin{cases} 34-x\geq 0 \\ x\geq 0 \\ 39-x\geq 0 \\ x-23\geq 0 \end{cases} \Rightarrow 23\leq x\leq 34$

$\therefore 0\leq y=34-x\leq 11 \Rightarrow y\leq 11$ (O)

(3) $\underbrace{34-x}_{=y}+39-x+(x-23)$ (X)

(4)
(5) 由 (3) 知 $D=50-x$

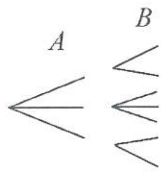
$16\leq 50-x\leq 27$.

選 (2)(5) #

2. 討論

(1)窮舉法：將所有情形逐一列出。

◎若與個數有關可由(小→大)或(大→小)討論。

(2)樹狀圖：將事情分成步驟 A、步驟 B、… $\Rightarrow$ 

(3)轉化為方程式：由係數__大__的開始討論。

EXAMPLE 1

一乒乓球隊有 6 位選手，其中甲、乙、丙為右手持拍的選手，丁、戊為左手持拍的選手，而己為左右手皆可持拍的選手。現在要派出兩名選手參加雙打，規定由一名可以右手持拍的選手與一名可以左手持拍的選手搭配。請問共有多少種可能的搭配。

[法一] 右 左

甲 < 丁、戊、己

乙 <

丙 <

己 < 丁、戊

[法二] 沒己 有己

$3\times2+1\times5=11$

11#

EXAMPLE 2

每次用 20 根相同的火柴棒圍成一個三角形，共可圍成幾種不全等的三角形。

設三邊長 $x\geq y\geq z$

最大邊小於 $\frac{20}{2}=10$

(9, 9, 2) (8, 6, 6)

(9, 8, 3) (7, 7, 6)

(9, 7, 4)

(9, 6, 5)

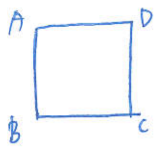
(8, 8, 4)

(8, 7, 5)

共 8 種

EXAMPLE 3

將正方形 $ABCD$ 的每一條邊各自標上 1,2,3 中的某一個數，使得任兩條相鄰的邊都標有恰好差 1 的兩個數。滿足這種條件的標示法有幾種。



可推得 ① $\overline{AB}=\overline{CD}$ 或 ② $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 差 2

	$\overline{AB}$	$\overline{CD}$	$\overline{BC}$	$\overline{AD}$	
①	1	1	2	2	
	2	2	1 or 3	1 or 3	⇒ 4 種
	3	3	2	2	
②	1	3	2	2	
	3	1	2	2	

8 種#

EXAMPLE 4

將 100 元換成 50 元、10 元、5 元，則有幾種不同的兌換方法。

設 50 元有 x 個，10 元有 y 個，5 元有 z 個

$50x+10y+5z=100$

$10x+2y+z=20$

x	0	1	2
y	0~10	0~5	0
z			0
方法	11	6	1

共 18 種#

EXAMPLE 5

某公司生產多種款式的「阿民」公仔，各種款式只是球帽、球衣或球鞋顏色不同。其中球帽共有黑、灰、紅、藍四種顏色，球衣有白、綠、藍三種顏色，而球鞋有黑、白、灰三種顏色。公司決定紅色的球帽不搭配灰色的鞋子，而白色的球衣則必須搭配藍色的帽子，至於其他顏色間的搭配就沒有限制。在這些配色的要求之下，最多可有幾種不同款式的「阿民」公仔。

衣 → 帽 → 鞋

白 — 藍 < 黑、灰

綠 < 黑、灰、紅、藍

藍 < 黑、灰、紅、藍

$7\times3+2\times2=25$#

5-3 排列組合公式

1. 直線排列：n 人排 n 位的方法數=$\underline{\ n!\ }$。

   $(0!=1$、$1!=1$、$2!=2$、$3!=6$、$4!=24$、$5!=120$、$6!=720)$

2. 不盡相異物排列：m 個相同白球和 n 個相同球排列的方法數＝$\underline{\dfrac{(m+n)!}{m!\,n!}}$。

   (有 k 個相同物 ⇒ $\underline{\ 除以\ k!\ }$)

3. 一般組合：n 人挑 m 人的方法數＝$\underline{C_m^n}$＝$\underline{C_{n-m}^n}$＝$\underline{\dfrac{m\times(m-1)\times\cdots(m-n+1)}{1\times2\times\cdots\times n}}$。(分子分母各 n 項)

   ↳ 從 n 人挑 n-m 人不選

   例：$C_4^6=\underline{C_2^6}=\underline{\dfrac{6\times5}{2\times1}}=\underline{15}$。

4. 其他：P_m^n、n^m 均可想成 $\underline{\ 乘法原理\ }$，亦或 $P_m^n=\underline{C_m^n\times m!}$。

   大小　　　　大小

5. 常用技巧

   (1)相鄰：綁在一起，視為一物。

   (2)不相鄰：先排其他，~~在~~再插空。

   (3)有順序關係：視為相同物□□，再排入□□

   (4)指定：直接先排

   (5)否定：全－(不合)

   (6)至少：[反面] 全－(不合)

   [正面] 討論有幾個

EXAMPLE 1

合作社有 5 種不同品牌的巧克力，今甲、乙、丙三人前往購買，求下列各小題的方法數：

(1) 3 人各買一盒巧克力(品牌可重複)，求有幾種買法。
(2) 3 人各買一盒巧克力(品牌均不同)，求有幾種買法。
(3) 3 人各買一盒巧克力(品牌可重複)，求$\boxed{店員}$有幾種取法。
(4) 3 人各買一盒巧克力(品牌均不同)，求店員有幾種取法。

(1) 甲 乙 丙

$5\times5\times5=125$

(2) 甲 乙 丙

$5\times4\times3=60$

(3) 3人均相同 or 2人相同 or 均不同

$C_1^5+\boxed{C_2^5\times2}+C_3^5$

$=5+20+10=35$

(4) $C_3^5=10$

EXAMPLE 2

某冰淇淋店最少需準備 n 桶不同口味的冰淇淋，才能滿足廣告所稱「任選兩球不同口味冰淇淋的組合數超過 100 種」。試問來店顧客從 n 桶中任選兩球（可為同一口味）共有幾種方法？

$C^n_2 > 100$，$\frac{n(n-1)}{2} > 100$，$n(n-1) > 200$

$n=14$，$C^{14}_2 = 91$

$n=15$，$C^{15}_2 = 105$

所求 = 兩球不同口味，兩球相同口味

$= C^{15}_2 + C^{15}_1 = \underline{120}$ #

EXAMPLE 3

因乾旱水源不足，自來水公司計畫在下周一至周日的 7 天中選擇 2 天停止供水。若要求停水的 2 天不相連，則自來水公司共有多少種選擇方式。

[法一] 先排其他，再插入停水

∨正常∨正∨正∨正∨正∨

$C^6_2 = 15$

[法二] 全 − 兩天相鄰

$C^7_2 - 6 = 21 - 6 = 15$

EXAMPLE 4

啦啦隊競賽規定每隊 8 人，且每隊男、女生均至少要有 2 人。某班共有 4 名男生及 7 名女生想參加啦啦隊競賽。若由此 11 人中依規定選出 8 人組隊，則共有幾種不同的組隊方法。

◎ 至少 ⇒ 說清楚幾人

男 2 女 6，男 3 女 5，男 4 女 4

$C^4_2 C^7_6 + C^4_3 C^7_5 + C^4_4 C^7_4$

$= 6 \times 7 + 4 \times 21 + 1 \times 35 = \underline{161}$ #

EXAMPLE 5

一列火車從第一車到第十車共十節車廂，要指定其中三節車廂准許吸菸，則

(1)共有幾種指定的方法。

(2)若更要求此三節准許吸菸的車廂兩兩不相銜接，則共有幾種指定方法。

(1) $C^{10}_3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3} = \underline{120}$ #

(2) 先排其他

∨禁∨禁∨○∨○∨○∨○∨○∨

$C^8_3 = \underline{56}$ #

EXAMPLE 6

某地共有 9 個電視頻道，將其分配給 3 個新聞台、4 個綜藝台及 2 個體育台共三種類型。若同類型電視台的頻道要相鄰，而且前兩個頻道保留給體育台，則頻道的分配方式共有幾種。

新新新　綜綜綜綜　体体

$\boxed{2!} \times 3! \times 4! \times 2! = \boxed{576}$ #

△先，0.口排列

EXAMPLE 7

某地區的車牌號碼共六碼，其中前兩碼為 O 以外的英文大寫字母，後四碼為 0 到 9 的阿拉伯數字，但規定不能連續出現三個 4。例如：AA1234，AB4434 為可出現的車牌號碼；而 AO1234，AB3444 為不可出現的車牌號碼。則所有第一碼為 A 且最後一碼為 4 的車牌號碼個數為

(1) 25×9^3　(2) $25 \times 9^2 \times 10$　(3) 25×900

(4) 25×990　(5) 25×999

A _ − _ $\boxed{\_\ \_}$ 4 → 3個4不合，後2碼不能同時為4

25　10 10 10

$\Rightarrow 25 \times 10 \times (10 \times 10 - 1) = 25 \times 990$，$\underline{選(4)}$ #

EXAMPLE 8

某動物園的遊園列車依序編號 1 到 7，共有 7 節車廂，今想將每節車廂畫上一種動物。如果其中的兩節車廂畫企鵝，另兩節車廂畫無尾熊，剩下的三節車廂畫上貓熊，並且要求最中間的三節車廂必須有企鵝、無尾熊及貓熊，則 7 節車廂一共有幾種畫法。

□ □ $\underbrace{□\ □\ □}_{3!}$ □ □

扣除中間，剩餘四節為 企×1，無×1，貓×2

$3!\times C^4_1 C^3_1 C^2_2 = 72$ #

EXAMPLE 9

從玫瑰、菊花、杜鵑、蘭花、山茶、水仙、繡球等七盆花中選出四盆靠在牆邊排成一列，其中杜鵑及山茶都被選到，且此兩盆花位置相鄰的排法有幾種畫。

$\boxed{杜,山}$、○、△

$C^5_2 \times 3! \times 2! = 120$ #

□、○、△排列

EXAMPLE 10

小明想要安排從星期一到星期五共五天的午餐計畫。他的餐點共有四種選擇：牛肉麵、大滷麵、咖哩飯及排骨飯。小明想要依據下列兩原則來安排他的午餐：

（甲）每天只選一種餐點但這五天中每一種餐點至少各點一次

（乙）連續兩天的餐點不能重複且不連續兩天吃麵食

根據上述原則，小明這五天共有幾種不同的午餐計畫？

牛肉麵 or 大滷麵 吃二次：

一 二 三 四 五

麵 飯 麵 飯 麵 ⇒ $C^2_1 \times \frac{3!}{2!} \times 2! = 12$

咖哩飯，排骨飯 吃二次：

⇒ $C^2_1 \times 2! \times (2+2+1+3+2+2) = 48$

共 60 種 #

EXAMPLE 11 分組分堆⇒ 先分組，再分配 (分組有相同個數要除階)

求下列各種方法數：

(1) 6 本不同的書平分 3 堆

(2) 6 本不同的書平分給甲、乙、丙

(3) 6 本不同的書分給甲、乙、丙，每人至少 1 本

(1) 分 (2,2,2) $C^6_2 C^4_2 C^2_2 \times \frac{1}{3!} = 15$ #

(2) 分 (2,2,2) 給甲、乙、丙

$C^6_2 C^4_2 C^2_2 \times \frac{1}{3!} \times 3! = 90$ #

給甲乙丙

(3) 小→大

(1,1,4) $C^6_1 C^5_1 C^4_4 \times \frac{1}{2!}$

(1,2,3) $C^6_1 C^5_2 C^3_3$

(2,2,2) $C^6_2 C^4_2 C^2_2 \times \frac{1}{3!}$

$\times\ 3! = 540$ #

EXAMPLE 12

籃球 3 人鬥牛賽，共有甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬 9 人參加，組成 3 隊，且甲、乙兩人不在同一隊的組隊方法有多少種。

剩下 7 人分 (2,2,3)　甲、乙 配對

$C^7_2 C^5_2 C^3_3 \times \frac{1}{2!} \times 2!$

$= 210$ #

EXAMPLE 13 因數問題

$a=360$，求：

倍

(1) a 的正因數個數　(2) a 的正因數和　(3) a 的正因數中，是 12 的因數個數及其總和。

【key】$a=p_1^{n_1}\times p_2^{n_2}\times\cdots\times p_k^{n_k}$ (質因數分解)

⇒(1) a 的正因數個數＝ $(n_1+1)\times(n_2+1)\times\cdots\times(n_k+1)$

(2) a 的正因數和＝ $(1+p_1+p_1^2+\cdots+p_1^{n_1})\times\cdots\times(1+p_k+p_k^2+\cdots+p_k^{n_k})$

$360=2^3\times3^2\times5$

(1) $2^{x_1}\cdot3^{x_2}\cdot5^{x_3}$

x_1 (0~3)　x_2 (0~2)　x_3 (0~1)

$4\times3\times2=24$ #

(2) $(2^0+2^1+2^2+2^3)(3^0+3^1+3^2)(5^0+5^1)$

$=15\times13\times6=1170$ #

(3) $2^{x_1}\cdot3^{x_2}\cdot5^{x_3}$

x_1 (2,3)　x_2 (1,2)　x_3 (0,1)

個數：$2\times2\times2=8$ #

和：$(2^2+2^3)(3^1+3^2)(5^0+5^1)=864$ #

EXAMPLE 14 數字問題

(1)三位數 abc 中，數字均相異的有幾個。

(2)三位數 abc 中，$a<b<c$ 的有幾個。

(3)三位數 abc 中，$a\le b\le c$ 的有幾個。

(4)三位數 100~999 中，含有「0」的數有幾個。

(5)從 100 寫到 999，共寫了幾個「0」。

【key】看到 $a<b<c$ ⇒ C

(1) a b c

$9\times9\times8=648$ #

(2) [法一] $C^9_3=84$ #

[法二] $C^{10}_3-\underbrace{1}_{a=0}\times C^9_2=84$

(3)「$a<b<c$」+「$a=b<c$」+「$a<b=c$」+「$a=b=c$」

$C^9_3+C^9_2+C^9_2+C^9_1=84+36+36+9=165$ #

$\boxed{三數均無0}$

(4) $900-9\times9\times9=171$

[法二] ×0× ⇒ $9\times9=81$

××0 ⇒ $9\times9=81$

×00 ⇒ 9

共 171 個 #

(5) $9\times9\times1\times2+9\times2=180$ 個 #

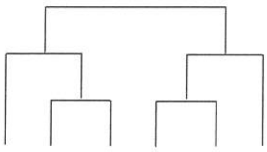
[法二] $9\times10\times1+9\times1\times10=180$

EXAMPLE 15 賽程問題

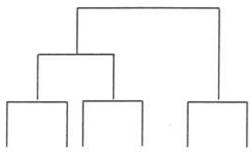
賽程表如下圖所示，有 6 個隊伍排入，共有幾種不同的賽程排法。

【key】有對稱性⇒ 視為相同物(除階)

(1) 圖一



(2) 圖二



(1) $\frac{6!}{2!2!2!}=90$ #

(2) $\frac{6!}{2!2!2!2!}=45$ #

EXAMPLE 16 著色問題⇒接觸面 多 先塗

如下圖所示用 3 種顏色塗 A,B,C,D 且相鄰不得同色，求：

(1)任意塗有幾種著色方法　(2)3 種顏色均須使用，有幾種著色方法

圖一

A	B	C	D

(1) A B C D

$3\times2\times2\times2=24$ #

(2) 全 − 只用2色

$24-\underbrace{C^3_2}_{挑2色}\times2\times1\times1\times1=18$ #

圖二

A	B
D	C

(1) A C B D

A.C同 $3\times1\times2\times2=12$

A.C異 $3\times2\times1\times1=6$

18 #

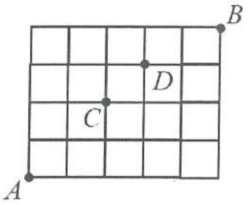
(2) 全 − 只用2色 (A.C同；B.D同)

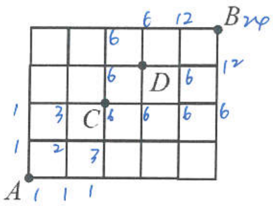
$18-C^3_2\times2\times1=12$ #

EXAMPLE 17 捷徑問題⇒角註法(加法原理)

如下圖，從 A 走到 B，走捷徑(向右或往上走)的方法數。

(1)任意走　　　　(2)經過 C 但不經過 D





→×5
↑×4　排列

$\frac{9!}{5!4!}=126$

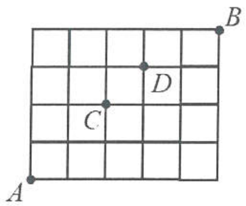
經C − 經C但經D

$\frac{4!}{2!2!}\times\frac{5!}{3!2!}-\frac{4!}{2!2!}\times\frac{2!}{1!1!}\times\frac{3!}{1!2!}$

$=60-36=24$

EXAMPLE 18

如下圖，從 A 走到 B，只能往「→」、「↑」、「↓」的方法數。



$5\times5\times5\times5\times5=3125$

EXAMPLE 19 幾何計數

平面上有 7 個點，其中 A,B,C,D 四點共線，其餘任三點不共線，則

(1)這七個點共可決定幾條直線。

(2)這七個點共可決定幾個三角形。

【key】 __2__ 點決定直線； __3__ 點決定三角形

(1) $C^7_2-C^4_2+1=21-6+1=\underline{16}$

(2) $C^7_3-C^4_3=35-4=\underline{31}$

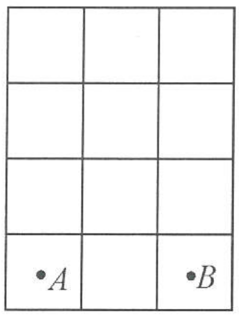
EXAMPLE 20

如下圖所示，每一小格均為1×1的正方形，求：

(1)共有幾個正方形　　(2)共有幾個矩形

(3)共有幾個矩形包含 A 點或 B 點

【key】矩形⇒選四條邊



(1) 1×1：3×4 = 12
2×2：2×3 = 6
3×3：1×2 = 2
共20個

(2) ||挑2，=挑2

$C^4_2\times C^5_2=\underline{60}$

(3) 包含A + 包含B − 包含A且包含B
上下左右　上下左右　上下左右
$4\times1\times1\times3+4\times1\times3\times1-4\times1\times1\times1=\underline{20}$

EXAMPLE 21

有一個兩列三行的表格如右下圖。在六個空格中分別填入數字 1、2、3、4、5、6（不得重複），則 1、2 這兩個數字在同一行或同一列的方法有幾種。

[正面]
同行　同列　　放1,2　放3,4,5,6
$(C^3_1\times C^2_2+C^2_1\times C^3_2)\times2!\times4!=432$

[反面] 全 − 不同行不同列
$6!-6\times2\times4!=432$

5-4 二項式定理

1. 二項式定理：

$$(x+y)^n = \underline{C_n^n x^n + C_{n-1}^n x^{n-1} y^1 + C_{n-2}^n x^{n-2} y^2 + \cdots + C_1^n x^1 y^{n-1} + C_0^n y^n}$$

(1)共有 $\underline{n+1}$ 項　　(2)一般項為 $\underline{C_k^n x^k y^{n-k}}$

2. 巴斯卡定理：

$C_k^n = C_{k-1}^{n-1} + C_k^{n-1}$　（想法：n人中選k人分成「甲被選中」或「甲沒被選中」）

EXAMPLE 1

$(ax^2 - \frac{2}{x})^5$ 的展開式中 x^4 的係數為 5，求a值。

$C_k^5 (ax^2)^k (-\frac{2}{x})^{5-k}$

$= C_k^5 a^k \cdot (-2)^{5-k} \cdot x^{2k+k-5}$

$k=3$ 時，$C_3^5 \cdot a^3 \cdot (-2)^2 \cdot x^4 = 5x^4$

$a^3 = \frac{1}{8}$，$\underline{a = \frac{1}{2}}$ #

EXAMPLE 2 二項式定理的應用

(1)求 $x^{100}+1$ 除以 $(x-1)^2$ 的餘式。

(2)求 12^{10} 除以 100 的餘數。

(1) $[(x-1)+1]^{100} + 1$

$= \underbrace{(x-1)^{100} + C_{99}^{100} \cdot (x-1)^{99} + \cdots + C_2^{100}(x-1)^2}_{(x-1)^2\text{的倍式}} + C_1^{100}(x-1)^1 + C_0^{100} \cdot 1 + 1$

餘式為 $100x - 100 + 1 + 1 = \underline{100x - 98}$ #

(2) $(10+2)^{10} = \underbrace{10^{10} + C_9^{10} 10^9 2^1 + \cdots + C_2^{10} 10^2 2^8}_{100\text{的倍數}} + C_1^{10} \cdot 10 \cdot 2^9 + C_0^{10} 2^{10}$

餘數為 $1024 \Rightarrow \underline{24}$ #

除100餘

EXAMPLE 3

(1)已知 $C_0^3 + C_1^4 + C_2^5 + \cdots + C_{86}^{89} = C_n^m$ 且 $n<10$，求數對 (m,n)。

(2) $2000 < C_1^n + C_2^n + C_3^n + \cdots + C_n^n < 3000$，求$n$值。

(1) $\underbrace{C_4^4 + C_3^4}_{= C_4^5} + C_3^5 + \cdots + C_3^{89} = C_4^{90}$　$\underline{(m,n) = (90,4)}$ #

$C_4^5 + C_3^5 = C_4^6$

(2)

$C_0^n + C_1^n + \cdots + C_n^n = 2^n$

$2000 < 2^n - 1 < 3000$，$\underline{n=11}$ #