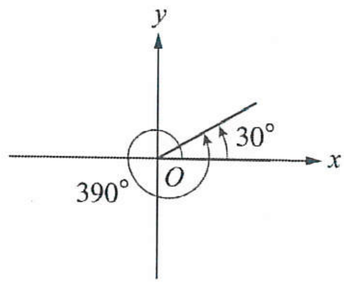
8-1 三角函數

1. 標準位置角(廣義角)：

(1)以正 x 軸為始邊，旋轉到終邊的角度。

(2)方向：逆時針方向旋轉為正角(+)，順時針方向旋轉為負角(−)。



2. 同界角： 標準位置角的終邊相同，稱為同界角。

如：30° 和 390°。若 α,β 為同界角，則 $\alpha-\beta=360°k$ (其中 k 為整數)。

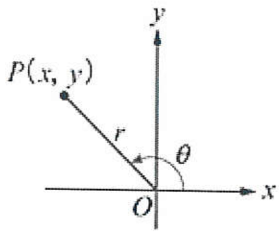
3. 廣義角三角函數：看與 x 軸 的夾角

當 θ 是一個標準位置角時，在 θ 的終邊上任取一點 $P(x,y)$，定義

正弦 $\sin\theta=\dfrac{y}{r}$ $\left(\dfrac{對}{斜}\right)$ 值域：$[-1,1]$

餘弦 $\cos\theta=\dfrac{x}{r}$ $\left(\dfrac{鄰}{斜}\right)$ 值域：$[-1,1]$

正切 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ $\left(\dfrac{對}{鄰}\right)$ 值域：$\mathbb{R}$



$r=\sqrt{x^2+y^2}$

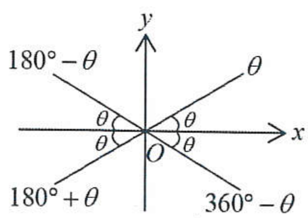
4. 特殊角的三角函數值

	30°	45°	60°	第一象限遞增(減)	0°	90°	180°	270°	I	II	III	IV
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	0	1	0	−1	+	+	−	−
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	↘	1	0	−1	0	+	−	−	+
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	↗	0	×	0	×	+	−	+	−

5. 廣義角化銳角三角函數

(1)值(不看正負)：與 x 軸之夾角相同，值就相同。

(2)正負：看象限。



6. 基本關係：(所有三角函數均可以化成 $\sin\theta$ 、 $\cos\theta$)

(1)商數：$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ (2)平方：$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ (3)餘角：$\cos(90°-\theta)=\sin\theta$

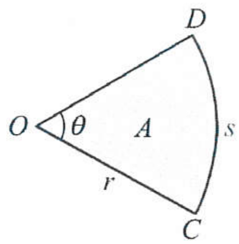
7. 弧度量與度度量的轉換：

(1)$180°=\pi$ 弧度 (2)$1°=\dfrac{\pi}{180}$ 弧度 (3)1 弧度 $=\dfrac{180°}{\pi}\approx 57°$

8. 扇形公式：

已知扇形的中心角為θ，半徑為r，則

(1)扇形弧長 $s=$ $r\theta$　　(2)扇形面積 $A=$ $\frac{1}{2}r^2\theta$



EXAMPLE 1

試求下列三角函數的值：

(1) $\sin 150°$
$(\text{I}, 30°)$
$= +\sin 30°$
$= \frac{1}{2}$

(2) $\cos 210°$
$(\text{III}, 30°)$
$= -\cos 30°$
$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\tan\frac{7\pi}{6}$ $\to 210°$
$(\text{III}, 30°)$
$= +\tan 30°$
$= \frac{\sqrt{3}}{3}$

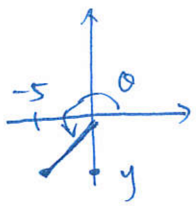
(4) $\sin\frac{3\pi}{2}$ $\to 270°$
$= -1$

(5) $\cos 2010°$ $-1800°$
$= \cos 210°$
$= -\cos 30°$
$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(6) $\tan(-765°)$ $+720°$
$= \tan(-45°)$
$(\text{IV}, 45°)$
$= -\tan 45°$
$= -1$

EXAMPLE 2

設設 $P(-5, y)$ 為θ之終邊的一點。已知 $\tan\theta = 2$，求 $\sin\theta$ 與 $\cos\theta$ 的值。 $\theta \in \text{III}$



$\tan\theta = \frac{y}{-5} = 2$, $y = -10$

$r = \sqrt{(-5)^2 + (-10)^2} = 5\sqrt{5}$

$\therefore \sin\theta = \frac{-10}{5\sqrt{5}} = \frac{-2}{\sqrt{5}}$

$\cos\theta = \frac{-5}{5\sqrt{5}} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$

EXAMPLE 3

已知 $0° \le x < 360°$，求下列各條件的x值：

(1) $\sin x = \frac{1}{2}$　(2) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$　(3) $\tan x = -1$

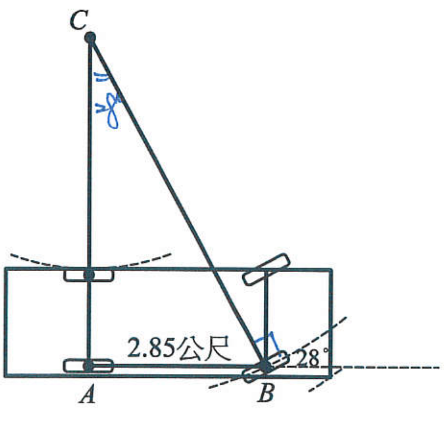
$30°$, I or II　$\Rightarrow x = 30°, 150°$

$30°$, I or IV　$\Rightarrow x = 30°$ or $330°$

$45°$, II or IV　$\Rightarrow x = 135°$ or $315°$

EXAMPLE 4

右圖為汽車迴轉示意圖。汽車迴轉時，將方向盤轉動到極限，以低速讓汽車進行轉向圓周運動，汽車轉向時所形成的圓周的半徑就是迴轉半徑，如圖中的$\overline{BC}$即是。已知在低速前進時，圖中A處的輪胎行進方向與$\overline{AC}$垂直，B處的輪胎行進方向與$\overline{BC}$垂直。在圖中，已知軸距$\overline{AB}$為 2.85 公尺，方向盤轉到極限時，輪子方向偏了 28 度，試問此車的迴轉半徑$\overline{BC}$為多少公尺（小數點後第一位以下四捨五入，$\sin 28° \approx 0.4695$，$\cos 28° \approx 0.8829$）。



$\angle C = 28°$

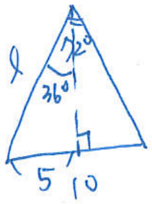
$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \sin 28°$，又 $\overline{AB} = 2.85$

$\therefore \overline{BC} = \frac{2.85}{0.4695} \approx 6.1$

EXAMPLE 5

有一個等腰三角形底邊為 10，頂角 72°，下列何者可以表示腰長？

(1) $5\sin 36°$　(2) $5\tan 36°$　(3) $\dfrac{5}{\tan 36°}$　(4) $\dfrac{5}{\sin 36°}$

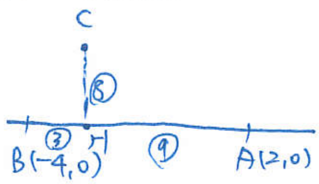


$\dfrac{5}{l} = \sin 36°$

$\therefore l = \dfrac{5}{\sin 36°}$，選 (4)

EXAMPLE 6

x 軸上有 $A(2,0)$、$B(-4,0)$ 兩觀測站同時觀察 x 軸上方的目標 C 點，測得 $\angle BAC$ 和 $\angle ABC$ 之值後，通知砲台 $D(\frac{5}{2},-8)$ 此二角正切值分別為 $\frac{8}{9}$ 和 $\frac{8}{3}$。求 $\overline{CD}$ 的距離。



設 C 在 x 軸投影為 H

$\tan A = \dfrac{8}{9} = \dfrac{\overline{CH}}{\overline{AH}}$

$\tan B = \dfrac{8}{3} = \dfrac{\overline{CH}}{\overline{BH}}$

$\therefore \overline{AH} : \overline{BH} : \overline{CH} = 9:3:8$

又 $\overline{AB} = 6$，$\therefore \overline{CH} = 4$，$\overline{BH} = \frac{3}{2}$

得 $C(-\frac{5}{2},4) \Rightarrow \overline{CD} = \sqrt{5^2+12^2} = 13$

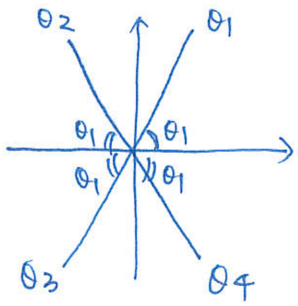
EXAMPLE 7

設 θ_1，θ_2，θ_3，θ_4 分別為第一、第二、第三、第四象限角，且都介於 0° 與 360° 之間。已知 $|\cos\theta_1| = |\cos\theta_2| = |\cos\theta_3| = |\cos\theta_4| = \dfrac{1}{3}$，請問下列哪些選項是正確的？

(1) $\theta_1 < 45°$　(2) $\theta_1 + \theta_2 = 180°$　(3) $\cos\theta_3 = -\dfrac{1}{3}$　(4) $\sin\theta_4 = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　(5) $\theta_4 = \theta_3 + 90°$

(1) $\cos\theta_1 = \frac{1}{3} < \underset{\cos 45°}{\underset{\parallel}{\frac{1}{\sqrt{2}}}} \Rightarrow \theta_1 > 45°$　(×)

(2)



$\theta_2 = 180° - \theta_1$　(○)

(3) $\cos\theta_3 = -\frac{1}{3}$　(○)

(4) $\sin\theta_4 = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$　(×)

(5) $\theta_4 = 360° - \theta_1$　(×)

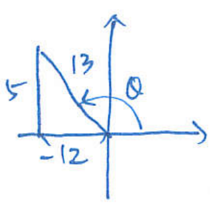
$\theta_3 = 180° + \theta_1$

選 (2)(3)

EXAMPLE 8

已知 θ 為第二象限角，$\sin\theta = \dfrac{5}{13}$，求下列各值：

(1) $\sin(180°+\theta)$　(2) $\cos(180°-\theta)$　(3) $\tan(-\theta)$



$\therefore \cos\theta = \dfrac{-12}{13}$

$\tan\theta = -\dfrac{5}{12}$

(1) $\sin(180°+\theta) = -\sin\theta = -\dfrac{5}{13}$

(2) $\cos(180°-\theta) = -\cos\theta = \dfrac{12}{13}$

(3) $\tan(-\theta) = -\tan\theta = \dfrac{5}{12}$

EXAMPLE 9

設 θ 為第三象限角且 $\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{1}{2}$，求下列各值：(1) $\sin\theta\cos\theta$　(2) $\sin\theta + \cos\theta$

(1) $(\sin\theta - \cos\theta)^2 = \frac{1}{4}$

$1 - 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}$

$\sin\theta \cdot \cos\theta = \frac{3}{8}$

(2) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$

$\sin\theta + \cos\theta = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}$（取負，$\theta \in$ III）$= -\frac{\sqrt{7}}{2}$

EXAMPLE 10

已知 $3\sin\theta+4\cos\theta=5$，求 $\sin\theta$ 的值。

$$\begin{cases}3\sin\theta+4\cos\theta=5 \Rightarrow \cos\theta=\dfrac{5-3\sin\theta}{4}\\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1\end{cases}$$

代入得：$\sin^2\theta+\left(\dfrac{5-3\sin\theta}{4}\right)^2=1$

$16\sin^2\theta+25-30\sin\theta+9\sin^2\theta=16$

$25\sin^2\theta-30\sin\theta+9=0$

$(5\sin\theta-3)^2=0$, $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$

EXAMPLE 11

比較下列五個數的大小關係：

$a=\sin 870°$、$b=\cos(-430°)$、$c=\tan 1310°$、$d=\cos 1900°$、$e=\sin(-2095°)$

① 化同函數.

$a=\sin 870°=\sin 150°=\sin 30°$

$b=\cos(-430°)=\cos(-70°)=\cos 70°=\sin 20°$

$c=\tan 1310°=\tan 230°=\tan 50°>\tan 45°=1$

$d=\cos 1900°=\cos 100°=-\cos 80°=-\sin 10°$

$e=\sin(\underbrace{-2095°}_{+2160°})=\sin 65°$

$c>e>a>b>d$

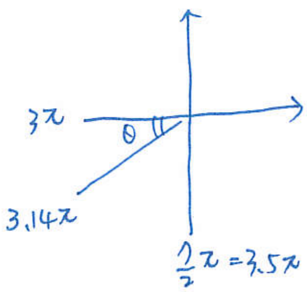
EXAMPLE 12

令 $a=\cos(\pi^2)$，選出正確選項。

(1) $a=-1$　(2) $-1<a\le\dfrac{-1}{2}$　(3) $\dfrac{-1}{2}<a\le 0$

(4) $0<a\le\dfrac{1}{2}$　(5) $\dfrac{1}{2}<a\le 1$

$\cos(\pi^2)\approx\cos(3.14\pi)$



$3.14\pi\in$ Ⅲ

且 $\theta<60°$

選 (2) #

EXAMPLE 13

周長為 4 的扇形，其面積最大為何？

設半徑 r，圓心角 θ

$r\theta+2r=4$，求 $\frac{1}{2}r^2\theta$ 之 Max

$\dfrac{r\theta+2r}{2}\ge\sqrt{2r^2\theta}$

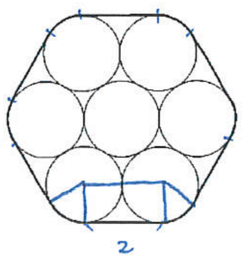
$2\ge\sqrt{2r^2\theta}$

$4\ge 2r^2\theta$

$\therefore\ \frac{1}{2}r^2\theta\le 1$ #

EXAMPLE 10

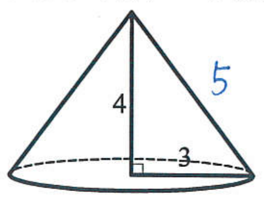
包裝七根半徑皆為 1 的圓柱，其截面如下圖所示。試問外圍粗黑線條的長度。



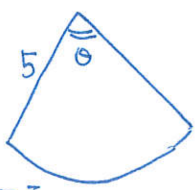
$2\times 6+\pi\cdot 1^2=12+\pi$

EXAMPLE 11

一直圓錐之底半徑為 3，高為 4，今沿其一斜高剖開成一扇形，求側面的表面積。



展開 ⇒



底圓周長 $=2\cdot 3\cdot\pi$　弧長 $=2\cdot 3\cdot\pi$

設圓心角 θ

$5\cdot\theta=6\pi$,　$\theta=\dfrac{6\pi}{5}$

面積 $=\dfrac{1}{2}\cdot 5^2\cdot\dfrac{6\pi}{5}=15\pi$

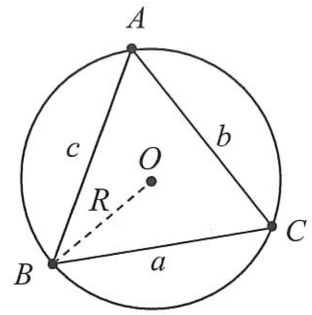
8-2 正弦定理、餘弦定理

1. 正弦定理：使用時機⇒(1)<u>角多</u>　(2)<u>一邊及其對角</u>　(3)<u>與 R 有關</u>

設 a,b,c 分別表示 ΔABC 三內角 $\angle A,\angle B,\angle C$ 的對邊長，

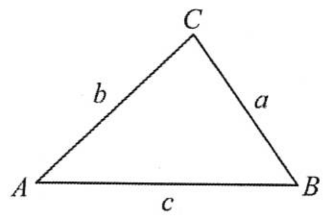
R 為 ΔABC 外接圓半徑，則 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ 。

換句話說，$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$ 。



2. 餘弦定理：使用時機⇒(1)<u>邊多</u>　(2)<u>求角度</u>

設 a,b,c 分別表示 ΔABC 三內角 $\angle A,\angle B,\angle C$ 的對邊長，則



$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \quad \Rightarrow \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

★三角形的判斷：設 ΔABC 的三邊長 $a\geq b\geq c$ ，則

(1)若 $a^2=b^2+c^2$ ，則 ΔABC 為<u>直角</u>三角形

(2)若 $a^2>b^2+c^2$ ，則 ΔABC 為<u>鈍角</u>三角形

(3)若 $a^2<b^2+c^2$ ，則 ΔABC 為<u>銳角</u>三角形

3. 三角形面積公式

設 a,b,c 分別表示 ΔABC 三內角 $\angle A,\angle B,\angle C$ 的對邊長，R 為 ΔABC 外接圓半徑，r 為為 ΔABC 內切圓半徑。

$$\Delta ABC=\frac{1}{2}\times 底\times 高=\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{abc}{4R}=rs$$

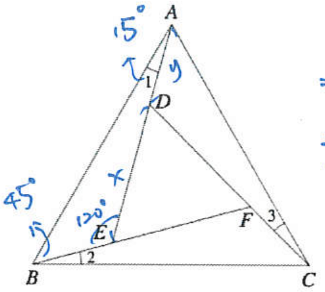
(底、高)　(兩邊一夾角)　(三邊長，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$)　(R 有關)　(r 有關)

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AC}\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$$

(與向量有關)　(平面向量)　(空間向量)

EXAMPLE 1

正三角形 ABC 的邊長為 1，且 $\angle 1=\angle 2=\angle 3=15^\circ$。已知 $\sin 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，求正三角形 DEF 的邊長。



設 $\overline{DE}=x$，$\overline{AD}=y$

$\Rightarrow \overline{BE}=y$

考慮 $\triangle ABE$

$$\frac{1}{\sin 120^\circ}=\frac{y}{\sin 15^\circ}=\frac{x+y}{\sin 45^\circ}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

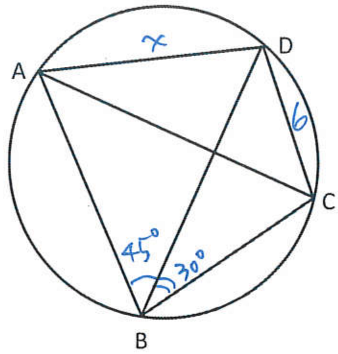
$$\therefore y=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}$$

$$x+y=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\therefore x=\frac{2\sqrt{6}}{6}-\left(\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}\right)=\frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{6}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

EXAMPLE 2

如圖所示，$ABCD$ 為圓內接四邊形。若 $\angle DBC=30^\circ$、$\angle ABD=45^\circ$、$\overline{CD}=6$，求 $\overline{AD}$。



$\triangle BCD$ 和 $\triangle ABD$ 有相同外接圓(半徑)

$$\therefore \frac{6}{\sin 30^\circ}=2R=\frac{x}{\sin 45^\circ}$$

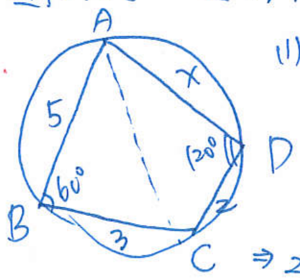
$$\therefore x=6\times\frac{2}{1}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$$

EXAMPLE 3

圓內接四邊形 $ABCD$，設 $\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=3$，$\overline{CD}=2$，$\angle D=120^\circ$，則下列選項哪些是正確的？

(1) $\overline{AD}=3$ (2) $\overline{AC}=3\sqrt{2}$ (3) $ABCD$ 面積為 $\dfrac{21\sqrt{3}}{4}$ (4)此圓的半徑為 $\dfrac{\sqrt{19}}{3}$ (5)此圓的半徑為 $\dfrac{\sqrt{57}}{3}$

㊣ 圓內接四邊形 $\Rightarrow$ 對角互補



(1) 設 $\overline{AD}=x$

$$\overline{AC}^2=5^2+3^2-2\cdot5\cdot3\cdot\cos 60^\circ$$
$$=x^2+2^2-2\cdot x\cdot 2\cdot\cos 120^\circ$$

$\Rightarrow 25+9-15=x^2+4+2x$，$x^2+2x-15=0$

$\therefore x=-5$ or 3 (取正)

(2) $\overline{AC}=\sqrt{3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cdot\cos 60^\circ}=\sqrt{19}$

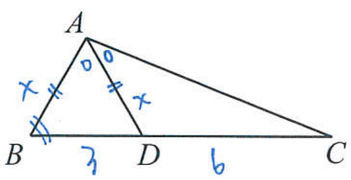
(3) $ABCD$ 面積 $=\frac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$
$=\frac{21}{4}\sqrt{3}$

(4)(5) $\dfrac{\sqrt{19}}{\sin 60^\circ}=2R$，$R=\sqrt{\dfrac{19}{3}}=\dfrac{\sqrt{57}}{3}$

選 (1)(3)(5)#

EXAMPLE 4

如下圖，在 ΔABC 中，$\angle BAC$ 的平分線 AD 交對邊 $\overline{BD}$ 於 D。已知 $\overline{BD}=3$，$\overline{DC}=6$，且 $\overline{AB}=\overline{AD}$，求 $\cos\angle BAD$ 的值。



$\because \overline{AD}$ 是角平分線

$\therefore \overline{AB}:\overline{AC}=3:6 \Rightarrow \overline{AC}=2x$

$$\cos B=\frac{x^2+3^2-x^2}{\cancel{2\cdot x\cdot 3}}=\frac{x^2+9^2-(2x)^2}{\cancel{2\cdot x\cdot 9}\ 3}$$

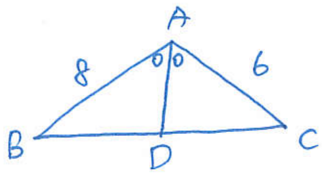
$\Rightarrow 27=x^2+81-4x^2$

$3x^2=54$，$x^2=18$

$$\cos\angle BAD=\frac{18+18-9}{2\cdot18}=\frac{3}{4}$$

EXAMPLE 5

$\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB}=8$，$\overline{AC}=6$，$\angle A=120^\circ$，若 $\overline{AD}$ 為 $\angle A$ 的內角平分線~~，如圖所示~~，求 $\overline{AD}$。



㊣ 大 △ = 小 △ + 小 △

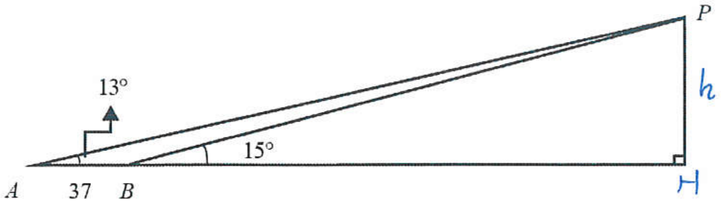
設 $\overline{AD}=x$

$$\frac{1}{2}\cdot8\cdot x\cdot\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\cdot6\cdot x\cdot\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot8\cdot6\cdot\sin 120^\circ$$

$\Rightarrow 14x=48$，$x=\dfrac{24}{7}$

EXAMPLE 6

老王在平地點 A 測得遠方山頂點 P 的仰角為$13°$。老王朝著山的方向前進 37 公丈後來到點 B，再測得山頂點 P 的仰角為$15°$，則山高約為多少公丈。(四捨五入至個位數，$\tan13°\approx0.231$，$\tan15°\approx0.268$)



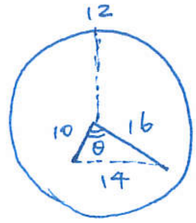
設山高 h $\Rightarrow$ $\overline{BH}=\frac{h}{\tan15°}$，$\overline{AH}=\frac{h}{\tan13°}$

$\overline{AB}=\frac{h}{0.231}-\frac{h}{0.268}=37 \Rightarrow 0.037h=37\times0.231\times0.268$

$\Rightarrow h=231\times0.268\approx62$

EXAMPLE 7

有一時鐘的時針長度為 10 公分，分針長度為 16 公分。假設時針針尖每分鐘所移動的弧長都相等。試問在七點與七點半之間，時針針尖與分針針尖的距離最接近 14 公分是在七點___分。(四捨五入取至最接近的整數分鐘)



$\cos\theta=\frac{10^2+16^2-14^2}{2\cdot10\cdot16}=\frac{1}{2}$

$\theta=60°$

七點 x 分.

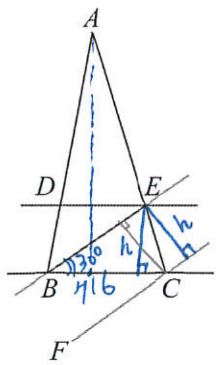
時針與 12 點夾角為 $\frac{360}{12}\times7+\frac{x}{60}\cdot30$

分針與 12 點夾角為 $\frac{x}{60}\times360$

$\therefore\left(210+\frac{x}{2}\right)-6x=60$，$\frac{11}{2}x=150$，$x=\frac{300}{11}\approx27$ 分

EXAMPLE 8

如圖，王家有塊三角形土地 ΔABC，其中 $\overline{BC}=16$ 公尺。政府擬徵收其中梯形 $DBCE$ 部分，開闢以直線 DE、BC 為邊線的馬路，其路寬為 h 公尺，這讓王家土地只剩原有面積的$\frac{9}{16}$。經協商，改以開闢平行直線 BE、FC 為邊線的馬路，且路寬不變，其中 $\angle EBC=30°$，則只需徵收 ΔBCE 區域。依此協商，王家剩餘的土地 ΔABE 有多少平方公尺。



$h=16\cdot\sin30°=8$

$\because\ \frac{\Delta ADE}{\Delta ABC}=\frac{9}{16}$

設 $\overline{AH}$ 為 ΔABC 之高 $\Rightarrow \frac{\overline{AH}-8}{\overline{AH}}=\frac{3}{4}$

$\therefore 4\overline{AH}-32=3\overline{AH}$，$\overline{AH}=32$

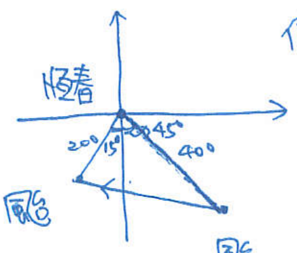
$\Delta ABE=\Delta ABC-\Delta BCE$

$=\frac{1}{2}\times16\times32-\frac{1}{2}\times16\times8$

$=\frac{1}{2}\times16\times24=192$

EXAMPLE 8

氣象局測出在 20 小時期間，颱風中心位置由恆春東南方 400 公里，直線移動到恆春南$15°$西的 200 公里處。求颱風移動的平均速度為每小時多少公里。(整數以下四捨五入，$\sqrt{3}\approx1.732$)



位移 $=\sqrt{200^2+400^2-2\cdot200\cdot400\cdot\cos60°}$

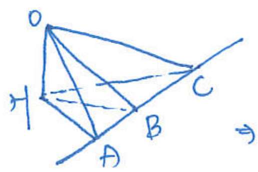
$=200\sqrt{1+4-2\times1\times2\times\frac{1}{2}}$

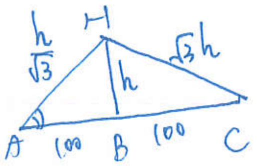
$=200\sqrt{3}$

速度 $=\frac{200\sqrt{3}}{20}=10\sqrt{3}\approx17$

EXAMPLE 9

地面上一直線三點 A,B,C 測得山頂仰角分別為 $60°,45°,30°$ 且 $\overline{AB}$=100 公尺，$\overline{BC}=100$ 公尺，求山高。(A,B,C 三點與山的垂足點不共線)





設 $\overline{OH}=h$

$\Rightarrow \overline{AH}=\frac{h}{\sqrt{3}}$，$\overline{BH}=h$，$\overline{CH}=\sqrt{3}h$

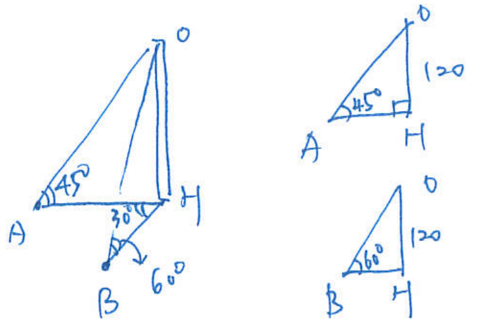
$\cos A=\frac{\left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^2+100^2-h^2}{2\cdot\left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)\cdot100}=\frac{\left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^2+200^2-\left(\sqrt{3}h\right)^2}{2\left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)\cdot200}$

$\Rightarrow 2\left(100^2-\frac{2}{3}h^2\right)=200^2-\frac{8}{3}h^2$

$\Rightarrow \frac{4}{3}h^2=100^2\cdot2 \Rightarrow h=100\sqrt{\frac{3}{2}}=50\sqrt{6}$

EXAMPLE 10

一塔高 120 公尺，樹 A 在塔的正西方，樹 B 在塔的西$30°$南。小明從塔的頂端測得樹 A 底部的俯角為 $45°$，樹 B 底部的俯角為 $60°$，求兩樹的距離。



∴ $\overline{AH}=120$

∴ $\overline{BH}=\frac{120}{\sqrt{3}}$

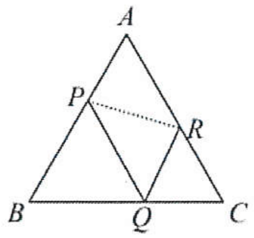
$\overline{AB}=\sqrt{120^2+\left(\frac{120}{\sqrt{3}}\right)^2-2\cdot120\cdot\left(\frac{120}{\sqrt{3}}\right)\cdot\cos30^\circ}$

$=120\sqrt{1+\frac{1}{3}-1}=120\sqrt{\frac{1}{3}}$

$=40\sqrt{3}$ #

EXAMPLE 11

在邊長為 13 的正三角形 ABC 上各邊分別取一點 P,Q,R，使得 $APQR$ 形成一平行四邊形，如下圖所示。若四邊形 $APQR$ 的面積為 $20\sqrt{3}$，求 $\overline{PR}$。



設 $\overline{AP}=x$, $\overline{BP}=13-x$

$\Rightarrow \overline{AR}=13-x$, $\overline{RQ}=x$

又 $\angle C=60°$, $\overline{CQ}=\overline{CR}=x$

▱$APQR$ 面積 $=x\cdot(13-x)\cdot\sin60°=20\sqrt{3}$

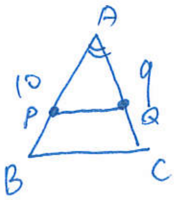
∴ $x(13-x)=40$

∴ $x=5$ or 8

∴ $\overline{PR}=\sqrt{5^2+8^2-2\cdot5\cdot8\cdot\cos60°}=7$ #

EXAMPLE 12

$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=10$，$\overline{AC}=9$，$\cos\angle BAC=\frac{3}{8}$，設點 P、Q 分別在 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 上使得 $\triangle APQ$ 的面積為 $\triangle ABC$ 面積的一半，求 $\overline{PQ}$ 的最小值。



設 $\overline{AP}=p$. $\overline{AQ}=q$

$\frac{1}{2}\cdot p\cdot q\cdot\sin A=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot9\cdot10\cdot\sin A\right)$

∴ $p\cdot q=45$

$\overline{PQ}=\sqrt{p^2+q^2-2\cdot p\cdot q\cdot\cos A}$

$=\sqrt{p^2+q^2-2\times45\times\frac{3}{8}}$

$\geq\sqrt{2\cdot pq-2\times45\times\frac{3}{8}}=\sqrt{90\times\frac{5}{8}}=\frac{15}{2}$ #

$\boxed{\frac{p^2+q^2}{2}\geq\sqrt{p^2q^2}}$

EXAMPLE 13

已知 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊長為 a、b、c，則下列條件 $\triangle ABC$ 必為鈍角三角形？

(1) $a^2+b^2<c^2$　(2) $\sin A=\sin B=\frac{1}{3}$　(3) $a:b:c=5:6:7$　(4) $b=4$，$c=6$，$\angle B=30°$

(5) $\triangle ABC$ 的三個高長度為 9、12、15

(1) $\angle C$ 為鈍角 (○)

(2) 若 $\angle A$、$\angle B$ 有鈍角 $\Rightarrow \angle A+\angle B=180°$, 不合.

設 $\angle A$、$\angle B$ 均為銳角.

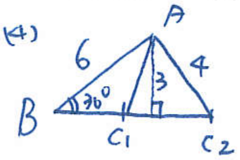
$\sin A=\frac{1}{3}<\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin45°$. 則 $\angle A=\angle B<45°$

∴ $\angle C$ 必為鈍角 (○)

(3) 最大角為 $\angle C$　∴ $\angle C$ 為銳角 (×)

$7^2=49<5^2+6^2$

(4)



可能為 $\triangle ABC_1$ 或 $\triangle ABC_2$

$\triangle ABC_1$ 中 $\angle C_1$ 為鈍角

$\triangle ABC_2$ 中 $\overline{AB}=6$, $\overline{AC_2}=4$, $\overline{BC_2}=3\sqrt{3}+\sqrt{7}$

$6^2+4^2=52$

$(3\sqrt{3}+\sqrt{7})^2=27+7+6\sqrt{21}=34+6\times(3.\cdots)>52$

∴ $\angle A$ 為鈍角 (○)

(5) $\frac{1}{2}\times a\times9=\frac{1}{2}\times b\times12=\frac{1}{2}\times c\times15$.

∴ $a:b:c=20:15:12$

$20^2=400>15^2+12^2=369$

∴ $\angle A$ 為鈍角 (○)

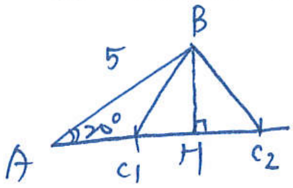
選 (1)(2)(4)(5) #

EXAMPLE 14

在 ΔABC 中，已經知道 $\angle A = 20°$ $\overline{AB} = 5$ 和 $\overline{BC} = 4$。試選出正確的選項。

(1) 可以確定 $\angle B$ 的餘弦值　(2) 可以確定 $\angle C$ 的餘弦值　(3) 可以確定 ΔABC 的面積

(4) 可以確定 ΔABC 的內切圓半徑　(5) 可以確定 ΔABC 的外接圓半徑



作 ΔABC 中，$\angle B$ 的高 $\overline{BH}$

$\overline{BH} = 5\cdot \sin 20° < 5\cdot\sin 30° = \frac{5}{2} < 4$

$\therefore$ 可能為 ΔABC_1 或 ΔABC_2

(1) $\angle ABC_1 \neq \angle ABC_2$，故 $\angle B$ 餘弦值不同 (×)

(2) $\angle AC_1B + \angle AC_2B = 180°$，且 $\angle AC_1B \neq \angle AC_2B$ (×)

(3) 由圖知 $\Delta ABC_2 > \Delta ABC_1$ (×)

(4) ΔABC_1 的內切圓小於 ΔABC_2 的內切圓 (×)

(5) $\frac{4}{\sin 20°} = 2R$ (○)

選 (5) #

EXAMPLE 15

在 ΔABC 中，已經知道 $\overline{AB} = 4$ 和 $\overline{AC} = 6$，此時尚不足以確定 ΔABC 的形狀與大小。但是，只要再知道某些條件（例如：再知道 $\overline{BC}$ 的長度），就可確定 ΔABC 唯一的形狀與大小。試選出正確的選項。

(1) 如果再知道 $\cos A$ 的值，就可確定 ΔABC 唯一的形狀與大小

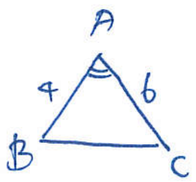
(2) 如果再知道 $\cos B$ 的值，就可確定 ΔABC 唯一的形狀與大小

(3) 如果再知道 $\cos C$ 的值，就可確定 ΔABC 唯一的形狀與大小

(4) 如果再知道 ΔABC 的面積，就可確定 ΔABC 唯一的形狀與大小

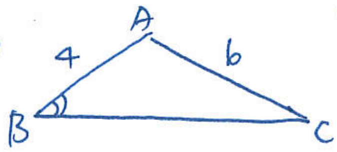
(5) 如果再知道 ΔABC 的外接圓半徑，就可確定 ΔABC 唯一的形狀與大小

(1)



SAS 全等 (○)

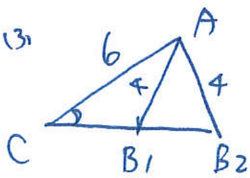
(2)



SSA，但 $\overline{AC} > \overline{AB}$

$\therefore$ 僅唯一三角形 (○)

(3)



SSA，如圖，

可能為 ΔACB_1 或 ΔACB_2

(×)

(4) $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \sin A$

即 $\sin A$ 為定值，

但 $\angle A$ 可能有 2 解 $(\theta, 180° - \theta)$

$\therefore$ 不一定唯一 (×)

(5) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

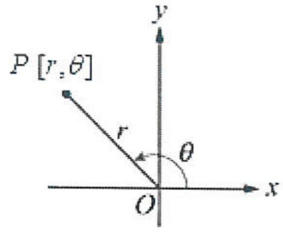
同(4)，僅能確定正弦值，

不一定唯一。(×)

選 (1)(2) #

8-3 三角函數的應用

1. 極坐標

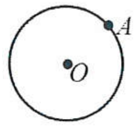


在坐標平面上，異於原點 O 的任一點 P。設 $\overline{OP}=r$，且 θ 為以 $\overline{OP}$ 為終邊的標準位置角。我們將 P 點的極坐標表示為 $\underline{[r,\theta]}$。

(1)若 P 點的極坐標為 $[r,\theta]$，則 P 點的直角坐標為 $\underline{(r\cos\theta, r\sin\theta)}$。

(2)若 P 點的直角坐標為 (x,y)，則 $r=\underline{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\cos\theta=\underline{\dfrac{x}{r}}$，$\sin\theta=\underline{\dfrac{y}{r}}$。

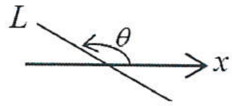
2. 圓的參數式



若圓方程式為 $x^2+y^2=r^2$，亦即圓心 $O(0,0)$、半徑為 r。

圓上任一點 A 可表示成 $\underline{(r\cos\theta, r\sin\theta)}$。

3. 直線 L 的斜角：

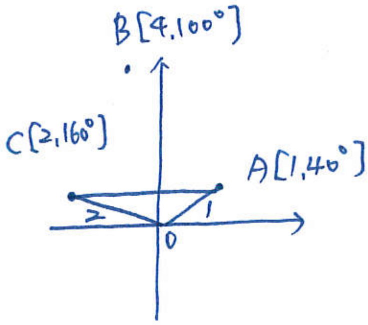


設直線 L 與正 x 軸的夾角為 θ，則直線斜率 $m=\underline{\tan\theta}$。

EXAMPLE 1

極坐標平面上，若有三點分別為 $A[1,40°]$，$B[4,100°]$，$C[2,160°]$，求

(1) $\overline{AC}$ 長　　(2) ΔABC 的面積



(1) 考慮 ΔOAC

$\overline{OA}=1$, $\overline{OC}=2$

$\angle AOC=120°$

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{1^2+2^2-2\cdot1\cdot2\cdot\cos120°}$

$=\underline{\sqrt{3}}$ #

(2) $\Delta ABC=\Delta OAB+\Delta OBC-\Delta OAC$

$=\frac{1}{2}\times1\times4\cdot\sin60°+\frac{1}{2}\cdot4\cdot2\cdot\sin60°$

$-\frac{1}{2}\cdot1\cdot2\cdot\sin120°$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(4+8-2)=\underline{\frac{5}{2}\sqrt{3}}$ #

EXAMPLE 2

設一質點 P 在以原點 O 為圓心之圓 C 上一點 $A(-3,3\sqrt{3})$ 出發，以逆時針且角速度 $\dfrac{\pi}{6}$ (弧度/秒)繞圓 C 運行，求 10 秒後質點 P 的 x 坐標。

$A(-3,3\sqrt{3})=[6,120°]$

10 秒後到 $[6,120°+10\times30°]=[6,420°]=[6,60°]=(3,3\sqrt{3})$

所求 $=\underline{3}$ #