6-1 古典機率 所有物品均視為 相異物

1. 機率空間與事件

(1)樣本空間：一試驗所有可能的結果所形成的集合稱樣本空間，以 S 表示。

而樣本空間中的元素稱為樣本點。

(2)事件：樣本空間 S 中的任意子集 A 稱為事件。

①和事件： $A\cup B$ ②積事件： $A\cap B$ ③餘事件： A'

④互斥事件：若 $A\cap B=\varnothing$ ，稱 A,B 互為互斥事件。

2. 古典機率

(1)定義：樣本空間 S 有 n 個樣本點且每一個樣本點出現 機會均等 ，

事件 A 是由 m 個樣本點所組成$(m\le n)$，則事件 A 發生的機率 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{m}{n}$。

(2)性質：① $P(\varnothing)=0$ ② $P(S)=1$ ③ $0\le P(A)\le 1$

④ $P(A')=1-P(A)$ ⑤ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

EXAMPLE 1

樣本空間 $S=\{1,2,3,4,5\}$ ，各基本事件出現的機會均等，則下列敘述何者正確？

(1)S 共有 5 個事件 (2)滿足 $A\subset S$ 且 $n(A)=2$ 的事件 A 有 10 個 (3)S 是一個事件 (4)$\varnothing$是一個事件

【key】 集合 S (樣本空間)有 n 個元素 ⇒ 子集 A (事件)共有 2^n 個

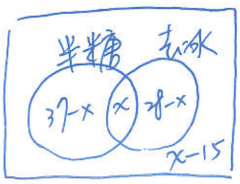
(1) $2^5=32$ (2) $C^5_2=10$ (3) 全事件 (○) (4) 空事件 (○)

選 (2)(3)(4)

EXAMPLE 2

針對某 50 人的班級調查喝飲料的習慣，發現其中習慣半糖（糖份減半）的有 37 人，而習慣去冰（不加冰塊）的有 28 人。現在若隨機抽問該班一位同學，他喝飲料的習慣是半糖且去冰的機率有可能是下列哪些選項？

(1)0.28 (2)0.46 (3)0.56 (4)0.66 (5)0.74



$\begin{cases}37-x\ge 0\\ x\ge 0\\ 28-x\ge 0\\ x-15\ge 0\end{cases}$

∴ $15\le x\le 28$

$\frac{15}{50}\le p\le\frac{28}{50}$

$= 0.3$ $= 0.56$

選 (2)(3)

EXAMPLE 3

從所有二位正整數中隨機選取一個數，設 p 是其十位數字小於個位數字的機率。關於 p 值的範圍，試選出正確的選項。

(1) $0.22\le p\le 0.33$ (2) $0.33\le p\le 0.44$

(3) $0.44\le p\le 0.55$ (4) $0.55\le p\le 0.66$

$x<y \Rightarrow C$

$C^9_2=36$

$p=\frac{36}{90}=0.4$ ，選 (2)

EXAMPLE 4

從 1,2,3,4,5,6,7,8,9 這九個數中任意取出三個相異的數,每數被取出的機率皆相等，求三數乘積是一完全平方數的機率。

$n(S)=C^9_3=\frac{9\times8\times7}{1\times2\times3}=84$

$A:(1,2,8),(1,4,9),(2,3,6),(2,4,8)$
$(2,8,9),(3,6,8)$,

$P=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{6}{84}=\frac{1}{14}$ #

EXAMPLE 5

袋中有七個白球，若干個黑球。今從袋中一次取出兩個球，已知此兩球同為白球的機率是 $\frac{7}{22}$ 。

請問袋中有幾個黑球？

設 x 個黑球

$P=\frac{C^7_2}{C^{x+7}_2}=\frac{7}{22}$, $\frac{7\times6}{(x+7)(x+6)}=\frac{7}{22}$,

$x^2+13x+42=132$, $x^2+13x-90=0$

$(x+18)(x-5)=0$, $x=5$ #

EXAMPLE 6

某公司規定員工可在一星期（七天）當中選擇兩天休假。若甲、乙兩人隨機選擇休假日且兩人的選擇互不相關，試問一星期當中發生兩人在同一天休假的機率為何？

$n(S)=C^7_2\times C^7_2=441$

$n(A)=\underbrace{C^7_1\times C^6_2\times2!}_{1天同}+\underbrace{C^7_2\times1}_{2天同}=210+21=231$

$P=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{231}{441}=\frac{11}{21}$ #

EXAMPLE 7

一隻青蛙位於坐標平面的原點，每步隨機朝上、下、左、右跳一單位長，總共跳了四步。求青蛙跳了四步後恰回到原點的機率。

(上,下)×1 , (左,右)×1 ⇒ $4!=24$
(上,下)×2 ⇒ $\frac{4!}{2!2!}=6$
(左,右)×2 ⇒ $\frac{4!}{2!2!}=6$

$n(A)=36$

$P=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{36}{4^4}=\frac{9}{64}$ #

EXAMPLE 8

12 張分別標以 1,2,3,…,12 的卡片，任意分成兩疊，每疊各六張，求：
(1)1,2,3 三張在同一疊的機率　(2)1,2,3,4 四張中，每疊各兩張的機率。

【key】分子分母要一致

【法一】兩疊可互換

$n(S)=C^{12}_6C^6_6\times\frac{1}{2!}$

(1) 剩下 9 張分 (6,3) , 1,2,3 放入

$C^9_6C^3_3\times1$ ⇒ $P=\frac{C^9_6C^3_3}{C^{12}_6C^6_6\times\frac{1}{2!}}=\frac{6\times5\times4}{12\times11\times10\times\frac{1}{2}}=\frac{2}{11}$ #

(2) 剩下 8 張分 (4,4) , 1,2,3,4 分 (2,2) , (4,4)和(2,2)組合

$C^8_4C^4_4\times\frac{1}{2!}\times\left[C^4_2\times C^2_2\times\frac{1}{2!}\right]\times2!$ ⇒ $P=\frac{C^8_4C^4_4C^4_2C^2_2\times\frac{1}{2!}}{C^{12}_6C^6_6\times\frac{1}{2!}}=\frac{5}{11}$ #

【法二】*A*、*B* 兩疊

$n(S)=\underset{A}{C^{12}_6}\times\underset{B}{C^6_6}$

(1) 1,2,3 選 A or B　補 3 張給 1,2,3

$2\times C^9_3$ ⇒ $P=\frac{C^9_3\times2}{C^{12}_6}=\frac{2}{11}$ #

(2) 1,2,3,4 分 A, B , 剩下分 4 張給 A, 4 張給 B

$\underset{A}{C^4_2}\underset{B}{C^2_2}\times\underset{A}{C^8_4}\underset{B}{C^4_4}$ ⇒ $P=\frac{C^4_2C^8_4}{C^{12}_6}=\frac{5}{11}$ #

6-2 期望值

1. 期望值⇒可想成 平均

一試驗有 k 種可能結果，各結果的報酬分別為 $m_1, m_2, \cdots, m_k$，而這些報酬的機率分別為 $P_1, P_2, \cdots, P_k$（其中 $P_1+P_2+\cdots+P_k=1$），則此實驗的期望值為 $m=m_1P_1+m_2P_2+\cdots+m_kP_k$

結果	X_1	X_1	$\cdots$	X_n
報酬	m_1	m_2	$\cdots$	m_k
機率	p_1	p_2	$\cdots$	p_k

2. 期望值的加法原理：

試驗 A 的期望值 $E(A)=m_A$，試驗 B 的期望值 $E(B)=m_B$，那麼完成試驗 A 和 B 後的期望值

$E(A+B)=E(A)+E(B)=$ m_A+m_B 。

3. 重複實驗的期望值：

試驗 A 的期望值 $E(A)=m_A$，那麼此實驗進行了 n 次後的期望值 $E(nA)=nE(A)=$ $n\cdot m_A$ 。

EXAMPLE 1

有一箱子，內有 3 黑球與 2 白球。有一遊戲，從箱子中任取出一球。假設每一顆球被取出的機率都相同，若取出黑球可得獎金 50 元，而取出白球可得獎金 100 元，求此遊戲的獎金期望值。

[法一] 平均 $\dfrac{50\times3+100\times2}{5}=70$ #

[法二]

事件	黑	白
X	50	100
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

$E(x)=50\times\frac{3}{5}+100\times\frac{2}{5}=70$ #

EXAMPLE 2

有一種遊戲，每次輸贏規則如下：先從 1 至 6 中選定一個號碼 n，再擲三粒均勻的骰子。若三粒骰子的點數全都是 n，則可贏 3 元；恰有兩個點數為 n，則可贏 2 元；恰有一個點數為 n，則可贏 1 元；而沒有點數為 n，則輸 1 元。如此，玩一次的期望值（贏為正，輸為負）為何？

事件	n, n, n	n, n, x	n, x, x	x, x, x
X	3	2	1	−1
P	$\frac{1}{6^3}$	$\frac{C^3_2\times1^2\times5}{6^3}$	$\frac{C^3_1\times1\times5^2}{6^3}$	$\frac{5^3}{6^3}$

$E(x)=3\times\frac{1}{216}+2\times\frac{15}{216}+1\times\frac{75}{216}-\frac{125}{216}=\frac{-17}{216}$ #

EXAMPLE 3

擲一均勻硬幣三次，每出現一個正面得 5 元，一個反面賠 2 元，求所得總額之期望值。

[法一]

事件	3正	2正1反	1正2反	3反
X	15	8	1	−6
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$E(x)=15\times\frac{1}{8}+8\times\frac{3}{8}+1\times\frac{3}{8}+(-6)\times\frac{1}{8}=\frac{36}{8}=\frac{9}{2}$ #

[法二] $E(丟3次)=3\times E(丟1次)$

$=3\times\left[\frac{1}{2}\times5+\frac{1}{2}\times(-2)\right]=\frac{9}{2}$ #

EXAMPLE 4

袋子裡有 3 個球，2 個球上標 1 元，1 個球上標 5 元。從袋中任取 2 個球，即可得到兩個球所標錢數的總和，求此玩法所得錢數的期望值。

$E(2球)=2\times E(1球)$

$=2\times\left(\frac{2}{3}\times1+\frac{1}{3}\times5\right)$

$=\frac{14}{3}$ #

EXAMPLE 5

某次數學測驗共有 25 題單一選擇題，每題都有五個選項，每答對一題可得 4 分，答錯倒扣 1 分。某生確定其中 16 題可答對；有 6 題他確定五個選項中有兩個選項不正確，因此這 6 題他就從剩下的選項中分別猜選一個；另外 3 題只好亂猜，則他這次測驗得分之期望值為______分。

16題會，6題部分　　3題猜

$16\times4+6\times\left(\frac{1}{3}\times4+\frac{2}{3}\times(-1)\right)+3\times\left(\frac{1}{5}\times4+\frac{4}{5}\times(-1)\right)$

$=\underline{68}$ #

EXAMPLE 6

某電視台舉辦抽獎遊戲，現場準備的抽獎箱裡放置了四個分別標有 1000、800、600、0 元獎額的球。參加者自行從抽獎箱裡摸取一球(取後即放回)，主辦單位及贈送與此球上數字等額的獎金，並規定抽取到 0 元的人可以再摸一次，但是所得獎金折半(若再摸到 0 就沒有第三次機會)；則一個參加者可得獎金的期望值是______元。

x	1000	800	600	500	400	300	0
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$

$E(x)=1000\times\frac{1}{4}+800\times\frac{1}{4}+600\times\frac{1}{4}+500\times\frac{1}{16}+400\times\frac{1}{16}+300\times\frac{1}{16}$

$=\underline{675}$ #

EXAMPLE 7

根據統計資料：一個 45 歲的人，在一年內生存的機率為 98.8%，某人保一年的壽險 1000000 元，需繳保險費 15000 元，求保險公司的獲利期望值。

[法一]

事件	生	死
X(獲利)	15000	$-1000000+1500$
p	98.8%	1.2%

$E(x)=15000\times98.8\%+(-1000000+15000)\times1.2\%$

$=\underline{15000\times1}+\underline{(-1000000)\times1.2\%}=\underline{300}$ #

[法二] 獲利 = 收入 − 支出

EXAMPLE 8

莊家設一賭局：玩家擲 3 枚公正硬幣，若出現 1 個正面，可得 10 元；若出現 2 個正面，可得 15 元；若出現 3 個正面，可得 20 元。若要求賭局公平，則沒有出現正面時，玩家要賠莊家多少錢？

【key】公平⇒ 期望值為 0

事件	1正(2反)	2正(1反)	3正	3反
x	10	15	20	$-x$
p	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

$E(x)=10\times\frac{3}{8}+15\times\frac{3}{8}+20\times\frac{1}{8}+(-x)\times\frac{1}{8}=0$

$x=95$， 賠 95元

EXAMPLE 9

摸彩箱裝有若干編號為$1,2,\cdots,10$的彩球，其中各種編號的彩球數目可能不同。今從中隨機摸取一球，依據所取球的號數給予若干報酬。現有甲、乙兩案：甲案為當摸得彩球的號數為 k 時，其所獲報酬同為 k；乙案為當摸得彩球的號數為 k 時，其所獲報酬為 $11-k$ ($k=1,2,\cdots,10$)。已知依甲案每摸取一球的期望值為$\frac{67}{14}$，求依乙案每摸取一球的期望值為何？

$E(甲+乙)=11=E(甲)+E(乙)$

$\therefore E(乙)=11-\frac{67}{14}=\underline{\frac{87}{14}}$ #

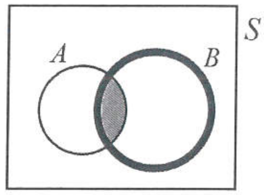
6-3 條件機率與貝氏定理

1. 條件機率 $\Rightarrow$ 可視為樣本空間限縮($S \to B$)

設 A,B 為 S 中的兩個事件，

已知事件 B 發生的情況下，求事件 A 發生的機率

$P(A\mid B)=$ $\underline{\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}}$ 。

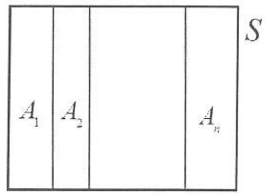


2. 貝氏定理 $\Rightarrow$ ＿樹狀圖＿

(1)分割：設 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是樣本空間 S 的一個分割，則

① $A_i\cap A_j=$ $\underline{\varnothing}$ (對所有 $i\neq j$)

② $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=$ $\underline{S}$

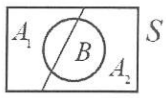


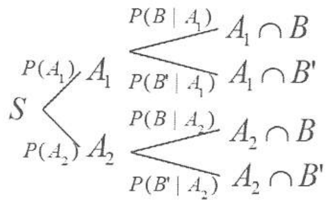
(2)貝氏定理：

設 A_1,A_2 是樣本空間 S 的一個分割，

則對 S 中任意事件 B，

$$P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1)\cdot P(B\mid A_1)}{P(A_1)\cdot P(B\mid A_1)+P(A_2)\cdot P(B\mid A_2)}\text{。}$$





3. 獨立事件：

A,B 為獨立事件 $\Leftrightarrow P(A\mid B)=P(A)\Leftrightarrow$ $\underline{P(A\cap B)=P(A)\times P(B)}$ 。反之，稱 A,B 為相關事件。

【性質】A,B 為獨立事件 $\Leftrightarrow A,B'$ 為獨立事件 $\Leftrightarrow A',B$ 為獨立事件 $\Leftrightarrow A',B'$ 為獨立事件

<c.f.>互斥事件：A,B 互為獨立事件 $\Leftrightarrow$ $\underline{P(A\cap B)=0}$

4. 三事件的獨立事件：

A,B,C 互為獨立事件，則須滿則下列四個關係式

(1) $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ (2) $P(B\cap C)=P(B)\times P(C)$ (3) $P(A\cap C)=P(A)\times P(C)$

(4) $P(A\cap B\cap C)=P(A)\times P(B)\times P(C)$

EXAMPLE 1

不透明袋中有 3 白 3 紅共 6 個球，球大小形狀相同，僅顏色相異。甲、乙、丙、丁、戊 5 人依甲第一、乙第二、…、戊第五的次序，從袋中各取一球，取後不放回。試求在甲、乙取出不同色球的條件下，戊取得紅球的機率。

甲,乙取不同色，意即剩下 2白2紅

公平遊戲不分順序,機率相同，故 戊取紅球機率 = 丙取紅球機率 = $\frac{2}{4}=\underline{\frac{1}{2}}$

EXAMPLE 2

設 $P(X)$ 表示事件 X 發生的機率，而 $P(X|Y)$ 表示在事件 Y 發生的條件下，事件 X 發生的機率。今有 2 顆黑球、2 顆白球、3 顆紅球共 7 顆大小相同的球排成一列。設事件 A 為 2 顆黑球相鄰的事件，事件 B 為 2 顆黑球不相鄰的事件，而事件 C 為任 2 顆紅球都不相鄰的事件。選出正確的選項。

(1) $P(A)>P(B)$　(2) $P(C)=\frac{2}{7}$

(3) $2P(C|A)+5P(C|B)<2$　(4) $P(C|A)>0.2$

(5) $P(C|B)>0.3$

插×黑黑

(1) $n(A)=\frac{6!}{2!3!}=60$　$n(B)=\frac{5!}{2!3!}\times C^6_2=150$

黑黑白白紅紅紅, 排列　先排 白白紅紅紅

$\therefore P(A)<P(B)$ (×)

(2) $n(C)=\frac{4!}{2!2!}\times C^5_3=60$, $n(S)=\frac{7!}{2!2!3!}=210$, $P(C)=\frac{2}{7}$ (○)

先排 黑黑白白, 再插紅紅紅

(3)(4)(5) $P(C|A)=\frac{n(A\cap C)}{n(A)}$

$A\cap C$ 表示 黑相鄰, 紅不相鄰

$B\cap C$ 表示 黑不相鄰 且紅不相鄰

$n(A\cap C)=\frac{3!}{2!}\times C^4_3=12$

先排 黑黑 白白, 再插紅,紅,紅

$n(B\cap C)=$ case1: 黑黑 白白 $\Rightarrow \frac{3!}{2!}\times C^4_2=18$

case2: 白白 $\Rightarrow C^3_2\times C^5_3=30$

$=48$

$P(C|A)=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}=0.2$

$P(C|B)=\frac{48}{150}=\frac{16}{50}=0.32$

選(2)(5)

EXAMPLE 3

全班男女生共 51 人，票選畢業旅行的目的地，每人限投一票，結果如右表。現以簡單隨機抽樣，抽出兩人，若這兩人都是女生，求這兩人都想去墾丁的機率。

	女	男
墾丁	10	10
澎湖	6	10
花東	9	6

$n(S)=C^{25}_2$

$n(A)=C^{10}_2$

$\Rightarrow p=\frac{C^{10}_2}{C^{25}_2}=\frac{\frac{10\times 9}{2}}{\frac{25\times 24}{2}}=\frac{3}{20}$

EXAMPLE 4

投擲一公正骰子三次，所得的點數依序為 a,b,c。在 b 為奇數的條件下，求行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}>0$ 的機率。

$\Updownarrow$ $ac>b^2$

$n(S)=6\times 3\times 6=108$

A: ① $b=1$, (a,c) 只要不是 $(1,1)$ 即可, 有 $6\times 6-1=35$ 種

② $b=3$, $(a,c)=(2,5\sim 6),(3,4\sim 6),(4,3\sim 6)$, $(5,2\sim 6),(6,2\sim 6)$ 共19種

③ $b=5$, $(a,c)=(5,6),(6,5\sim 6)$, 共3種

$p=\frac{35+19+3}{108}=\frac{57}{108}=\frac{19}{36}$

EXAMPLE 5

擲一枚均勻硬幣，連續三次出現同一面就停止。

a：恰好投擲三次停止

b：在第一次反面的情形下，恰好在第四次停止

c：在第一、二次都是反面的情形下，恰好在第五次停止

試求 a、b、c 三事件發生的機率大小關係。

a: 正正正 或 反反反 → $P_a=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$

b: 第2,3,4為正正正 → $P_b=\frac{1}{8}$

c: 第3,4,5為反反反 → $P_c=\frac{1}{8}$

$a>b=c$

EXAMPLE 6

袋中有 10 支籤，其中 3 支中獎籤。甲、乙、丙三人逐一抽取，取後不放回，求下列何者正確？

(1)甲中獎機率為 $\frac{3}{10}$　(2)乙中獎機率小於 $\frac{3}{10}$　(3)在甲不中獎情形下，乙中獎的機率為 $\frac{2}{9}$

(4)在甲、乙恰 1 人中獎情形下，丙中獎的機率為 $\frac{2}{8}$　(5)甲中獎和乙中獎為獨立事件

【key】公平遊戲⇒不分順序，獲勝機率相同

(1) $P(甲中)=\frac{3}{10}$　(2) $P(乙中)=P(甲中)=\frac{3}{10}$　(3) 剩下 3○6×, $P(乙中)=\frac{3}{9}$

(4) 剩下 2○6×, $P(丙中)=\frac{2}{8}$　(5) $P(甲中)=\frac{3}{10}$, $P(乙中)=\frac{3}{10}$, $P(甲中且乙中)=\frac{3\times 2}{10\times 9}=\frac{1}{15}$

$\therefore P(甲中)\times P(乙中)\neq P(甲中且乙中)$ (×)

選(1)(4)

EXAMPLE 7

投擲一個公正骰子三次，求下列各條件的機率：

(1)出現至少一次 1 點的機率　(2)在出現至少一次一點的情形下，求至少出現一次 6 點的機率

(3)最大的點數是 5 點的機率　(4)在最大是 5 點的情形下，求最小是 2 點的機率

$n(S)=6\times6\times6=216$

(1) $n(A)$

[正面] 1×× 11× 111

$C^3_1\times5^2+C^3_2\times5+C^3_3=91$

[反面] 全－(1~5) 3 次

$6^3-5^3=91$

$P=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{91}{216}$ #

(2) $P=\frac{n(\text{至少一次 1 點和一次 6 点})}{n(\text{至少一次 1 點})}$

n(至少1次1點和1次6点)

116　166　16×

$\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}+C^5_1\times3!=36$

$P=\frac{36}{91}$ #

(3) 從(1~5)選－從(1~4)選

$n(A)=5^3-4^3=61$

$P=\frac{61}{216}$ #

(4) A: 225　255　2×5

$\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}+C^2_1\times3!=18$

$P=\frac{18}{61}$ #

EXAMPLE 8

交通規則測驗時，答對有兩種可能，一種是會做而答對，一種是不會做但猜對。已知小華練習交通規則筆試測驗，會做的機率是 0.8。現有一題 5 選 1 的交通規則選擇題，設小華會做就答對，不會做就亂猜。已知此題小華答對，試問在此條件之下，此題小華是因會做而答對(不是亂猜)的機率是多少？

- 0.8 會
  - 1 對 ✓
  - 0 錯
- 0.2 不會
  - $\frac{1}{5}$ 對 ✓
  - $\frac{4}{5}$ 錯

$P=\frac{0.8\times1}{0.8\times1+0.2\times\frac{1}{5}}$

$=\frac{80}{84}=\frac{20}{21}$ #

EXAMPLE 9

某公司員工中有 15%為行政人員，35%為技術人員，50%為研發人員。這些員工中，60%的行政人員有大學文憑，40%的技術人員有大學文憑，80%的研發人員有大學文憑。從有大學文憑的員工中隨機抽選一人，求他是技術人員的機率。

- 15% 行政
  - 60% 大
  - 40% ×
- 35% 技術
  - 40% 大
  - 60% ×
- 50% 研發
  - 80% 大
  - 20% ×

$P=\frac{35\%\times40\%}{15\%\times60\%+35\%\times40\%+50\%\times80\%}$

$=\frac{14}{9+14+40}=\frac{14}{63}=\frac{2}{9}$

EXAMPLE 10

高二舉行打靶練習，甲、乙兩人射擊命中率分別為 $\frac{2}{3}$、$\frac{3}{4}$。今兩人同時射擊一靶，各射擊一發且兩人互不影響，求：

(1)靶面命中一發的機率

(2)已知靶面命中一發，求是甲命中的機率。

(1) 甲中乙不中 或 甲不中乙中

$\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{5}{12}$ #

(2) $\frac{\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}}{\frac{5}{12}}=\frac{2}{5}$ #

EXAMPLE 11

設某人投籃命中率為 $\frac{2}{3}$，試問此人需連續投幾球，至少投進一球的機率超過 0.999。

設連續 n 球

全－n 球都不進

$=1-\left(\frac{1}{3}\right)^n>0.999$，$\left(\frac{1}{3}\right)^n<\frac{1}{1000}$，$3^n>1000$

$n\geq7$ #

EXAMPLE 12

有兩組供機器運作的配件 A、B，其單獨發生故障的機率分別為 0.1、0.15。只有當 A, B 都發生故障時，此機器才無法運作。A、B 兩配件若用串接方式，前面故障會導致後面故障，但若後面故障則不會影響前面的故障情形；若用並列方式，則故障情形互不影響。若考慮以下三種情形：

(一) 將 B 串接於 A 之後　(二) 將 A 串接於 B 之後　(三) 將 A, B 獨立並列

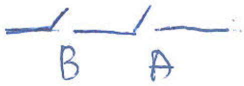
在情況(一)、(二)、(三)之下，機器無法運作的機率分別為 p_1、p_2、p_3。

請選出正確的選項。

(1) $p_1 > p_2 > p_3$　(2) $p_2 > p_1 > p_3$　(3) $p_3 > p_2 > p_1$　(4) $p_3 > p_1 > p_2$　(5) $p_1 = p_2 > p_3$

(一)

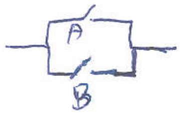
(二)



→ 前面故障，無法運作 $P_1 = 0.1$

前面正常，可以運作 $P_2 = 0.15$

(三)



→ $P_3 = 0.1 \times 0.15 = 0.015$

故 $P_3 < P_1 < P_2$，選(2)

EXAMPLE 13

根據 50 個學生對校外教學的滿意度調查，如下表所示。已知滿意度與學生性別為獨立事件，求 x, y 值。

	滿意	不滿意
男	x	12
女	y	8

$$\begin{cases} x+y=30, \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow x = 18, y = 12$