10-1 指數與對數

1. 指數(a^P 稱為指數式，其中 $a>0$)：

設 P,Q 為實數，n 為正整數，m 為整數，指數式 a^P 中，a 稱為 底數 ，P 稱為 指數 。

(1)定義：$a^n = a\times a\times\cdots\times a$ (n 次)

①$a^0 =$ 1 ②$a^{-n} =$ $\frac{1}{a^n}$ ③$a^{\frac{1}{n}} =$ $\sqrt[n]{a}$ ④$a^{\frac{m}{n}} =$ $\sqrt[n]{a^m}$

(2)指數律

①$a^P\times a^Q =$ a^{P+Q} ②$\frac{a^P}{a^Q} =$ a^{P-Q} ③$(a^P)^Q =$ $a^{P\cdot Q}$ ④$(ab)^P =$ $a^P\cdot b^P$

2. 常用對數($\log M$，其中 $M>0$)

設 $M,N>0$，n,P 為實數，常用對數 $\log M$ 中，M 稱為 真數 。

(1)定義：【想法一】$P=\log M \Leftrightarrow$ $10^P = M$ 【想法二】$M=$ $10^{\log M}$ (化成以 10 為底的指數)

①$\log 1 =$ 0 ②$\log 10 =$ 1 ③$\log 10^n =$ n

(2)常用對數律

①$\log M+\log N =$ $\log(MN)$ ②$\log M-\log N =$ $\log(\frac{M}{N})$ ③$n\log M =$ $\log M^n$

3. 對數($\log_a M$，其中 ① $a>0$ ② $a\neq 1$ ③ $M>0$)

(1)定義：【想法一】$P=\log_a M \Leftrightarrow$ $a^P=M$ 【想法二】$M=$ $a^{\log_a M}$ (化成以 a 為底的指數)

①$\log_a 1 =$ 0 ②$\log_a a =$ 1 ③$\log_a a^n =$ n ④$\log_{a^m} a^n =$ $\frac{n}{m}$

(2)對數律(可以用換底公式，換成常用對數)

①加法：$\log_a M+\log_a N =$ $\log_a(MN)$

②減法：$\log_a M-\log_a N =$ $\log_a(\frac{M}{N})$

③係數積：$n\log_a M =$ $\log_a M^n$ ($\frac{n}{m}\log_a M =$ $\log_{a^m} M^n$)

*④乘法：$\log_a b\times\log_b c =$ $\log_a c$ (倒數關係：$\log_b a =$ $\frac{1}{\log_a b}$)

⑤除法：$\frac{\log_a c}{\log_a b} =$ $\log_b c$ (換底公式：$\boxed{\log_b c = \frac{\log c}{\log b}} = \frac{\log_a c}{\log_a b}$)

⑥指數型：$a^{\log_b c} =$ $c^{\log_b a}$

EXAMPLE 1

計算下列各值：

(1) $(\frac{81}{16})^{-0.25}\times(\frac{8}{27})^{-\frac{2}{3}}\times(0.25)^{-2.5}$　　(2) $(2^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}}+25^{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}\times 5^{\sqrt{3}}$

(3) $\log 100+\log 10\sqrt{10}-\log\frac{1}{1000}$　　(4) $\log_2\sqrt{32}+\log_2 2-\log_{\frac{1}{3}}9-\frac{\log 9}{\log 3}+3^{2\log_9 7}$

(5) $3\log 2+2\log 5-\frac{1}{2}\log 4$　　(6) $3\log_2\sqrt{2}-\frac{1}{2}\log_2 3+\log_2\frac{\sqrt{3}}{2}$

(1) $(\frac{81}{16})^{-\frac{1}{4}}\times(\frac{8}{27})^{-\frac{2}{3}}\times(\frac{1}{4})^{-\frac{5}{2}}=(\frac{16}{81})^{\frac{1}{4}}\times(\frac{27}{8})^{\frac{2}{3}}\times 4^{\frac{5}{2}}=(\frac{2}{3})\times(\frac{3}{2})^2\times 2^5=48$

(2) $2^6\times 5^{1-\sqrt{3}}\times 5^{\sqrt{3}}=2^6\times 5^1=320$

(3) $2+\frac{3}{2}-(-3)=\frac{13}{2}$

(4) $\log_2 2^{\frac{5}{2}}+\log_2 2-(\frac{2}{-1})\log_3 3-\frac{2\log 3}{\log 3}+7^{2\log_9 3}=\frac{5}{2}+2+2-2+7^{\log_9 9}=\frac{21}{2}$

(5) $\log 2^3+\log 5^2-\log 4^{\frac{1}{2}}=\log\frac{8\times 25}{2}=\log 100=2$

(6) $\log_2(\sqrt{2})^3-\log_2 3^{\frac{1}{2}}+\log_2\frac{\sqrt{3}}{2}=\log_2\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}$

EXAMPLE 2

設 $a^x+a^{-x}=\frac{5}{2}$，求：

(1) $a^{2x}+a^{-2x}$　(2) $a^{3x}+a^{-3x}$　(3) a^x　(4) $\frac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}$

(1) $(a^x+a^{-x})^2=a^{2x}+2\cdot a^x\cdot a^{-x}+a^{-2x}$

$(\frac{5}{2})^2=a^{2x}+a^{-2x}+2$

$\therefore a^{2x}+a^{-2x}=\frac{25}{4}-2=\frac{17}{4}$

(2) $a^{3x}+a^{-3x}=(a^x+a^{-x})(a^{2x}-1+a^{-2x})=\frac{5}{2}\times(\frac{17}{4}-1)=\frac{5}{2}\times\frac{13}{4}=\frac{65}{8}$

(3) $2a^x-5+2a^{-x}=0$, $2(a^x)^2-5(a^x)+2=0$

$[2\cdot(a^x)-1][(a^x)-2]=0$, $a^x=\frac{1}{2}$ 或 2

(4) $a^{2x}+1+a^{-2x}=\frac{17}{4}+1=\frac{21}{4}$

EXAMPLE 3

設 a 為一正實數，且滿足 $a^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，則下列何者正確？

(1) $a^2=2$　(2) $a^{4\sqrt{2}}=4$　(3) $a>1$　(4) $a<\sqrt{2}$

(5) $\log_{\sqrt{2}}a=\sqrt{2}$。

(1) $(a^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\Rightarrow a^2=2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ (×)

選 (2)(3)(4)

(2) $(a^{\sqrt{2}})^4=(\sqrt{2})^4\Rightarrow a^{4\sqrt{2}}=4$ (○)

(3) $(a^{\sqrt{2}})^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=(\sqrt{2})^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\Rightarrow a=2^{\frac{1}{2\sqrt{2}}}>2^0=1$ (○)

(4) $a=2^{\frac{1}{2\sqrt{2}}}<2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$ (○)

(5) $\log_{\sqrt{2}}a=\frac{\log a}{\log\sqrt{2}}=\frac{\log 2^{\frac{1}{2\sqrt{2}}}}{\log 2^{\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (×)

EXAMPLE 4

設 $2^{2a}=3^{3b}=6$，求 $\frac{3}{a}+\frac{2}{b}$ 之值。

$\begin{cases}2^{2a}=6\\3^{3b}=6\end{cases}\Rightarrow\begin{array}{l}2=6^{\frac{1}{2a}}\ \cdots①\\3=6^{\frac{1}{3b}}\ \cdots②\end{array}$

①×②：$6=6^{\frac{1}{2a}}\times 6^{\frac{1}{3b}}=6^{\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}}$

$\therefore \frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}=1$, $\frac{3}{a}+\frac{2}{b}=6$

EXAMPLE 5

小明身體不舒服，依照醫生指示服藥。假設在吞藥後t小時，殘留在胃裡的藥量尚有$M(t)=450\times(0.64)^t$毫克，據此回答下面問題：
(1)經過 1.5 小時後，要量殘留多少毫克？
(2)自t小時到$t+1$小時吸收的藥量，與第t小時殘存藥量比值為何？

(1) $450\times(0.64)^{\frac{3}{2}}=450\times\left(\frac{64}{100}\right)^{\frac{3}{2}}=450\times\frac{512}{1000}$
$=230.4$

(2) $\frac{M(t)-M(t+1)}{M(t)}=\frac{450\times(0.64)^t-450\times(0.64)^{t+1}}{450\times(0.64)^t}$

$=\frac{1-0.64}{1}=0.36$ #

EXAMPLE 6

某個手機程式，每次點擊螢幕上的數a後，螢幕上的數會變成a^2。當一開始時螢幕上的數b為正且連續點擊螢幕三次後，螢幕上的數接近81^3。試問實數b最接近下列哪一個選項？
(1)1.7　(2)3　(3)5.2　(4)9　(5)81

$b\xrightarrow{1次}b^2\xrightarrow{2次}(b^2)^2\xrightarrow{3次}(b^4)^2$

$b^8=81^3$, $b=(3^{12})^{\frac{1}{8}}=3^{\frac{3}{2}}=\sqrt{27}\approx5.2$

選 (3) #

EXAMPLE 7

已知$a=\log 8$、$b=\log 2$，求下列各值：
(1)100^a　(2)10^{2a+b-1}

$10^a=10^{\log 8}=8$, $10^b=2$

(1) $100^a=10^{2a}=(10^a)^2=8^2=64$ #

(2) $10^{2a+b-1}=8^2\times2\times\frac{1}{10}=\frac{64}{5}$ #

EXAMPLE 8

設$\log_{x-1}(-3x^2+11x-6)$有意義，求x的範圍。

Sol：
$\boxed{\text{KEY}}$ $\log_a b$有意義$\Rightarrow$ $a>0,\ a\neq1,\ b>0$

$\begin{cases}x-1>0\\x-1\neq1\\-3x^2+11x-6>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>1\\x\neq2\\(3x-2)(x-3)<0\end{cases}$

$\Rightarrow 1<x<3,\ x\neq2$ #

EXAMPLE 9

已知坐標平面上三點$A(3,\log 3)$、$B(6,\log 6)$、$C(12,y)$在同一直線上，求y值。

$\frac{y-\log 6}{12-6}=\frac{\log 6-\log 3}{6-3}$

$y=\log 6+2\log 2$
$=\log 6+\log 2^2=\log 24$ #

EXAMPLE 10

設a,b,c均為正整數，
$a\log_{520}2+b\log_{520}5+c\log_{520}13=3$，
求$a+b+c$ 之值。

$\frac{\log 2^a}{\log 520}+\frac{\log 5^b}{\log 520}+\frac{\log 13^c}{\log 520}=3$

$\log 2^a+\log 5^b+\log 13^c=3\log 520$

$\log(2^a\times5^b\times13^c)=\log 520^3$

$2^a\times5^b\times13^c=(2^3\times5\times13)^3$

$\therefore a=9,\ b=3,\ c=3$

10-2 科學記號

1. 科學記號

將一個正數x表成$x=a\times10^n$，其中$1\le a<10$，n是整數，這種記法稱為科學記號。

$x=a\times10^n=10^{\log a}\times10^n=10^{n+\log a}$，其中$0\le\log a<1$。

(1)判斷位數⇒ n (整數)

①$n\ge0$時，表示x的整數部分為 $(n+1)$ 位數。

②$n<0$時，表示x在小數點後第 $(-n)$ 位數字開始不為 0。

(2)判斷最高位數字⇒ $\log a$ (小數)

x和a的數字相同，只有位數不同。

常用對數值：$\log2\approx0.3010$、$\log3\approx0.4771$、$\log4=$ $2\log2$、$\log5=$ $1-\log2$、

$\log6=$ $\log2+\log3$、$\log7\approx0.8451$、$\log8=$ $3\log2$、$\log9=$ $2\log3$

(以下例題假設給定$\log2\approx0.3010$、$\log3\approx0.4771$、$\log7\approx0.8451$)

EXAMPLE 1

將$(\sqrt[3]{49})^{100}$寫成科學記號$(\sqrt[3]{49})^{100}=a\times10^n$，其中$1\le a<10$，且$n$為正整數。若$a$的整數部分為$m$，則數對$(m,n)$。

$(\sqrt[3]{49})^{100}=7^{\frac{200}{3}}=(10^{\log7})^{\frac{200}{3}}=10^{\frac{200}{3}\log7}\approx10^{\frac{200}{3}\times0.8451}$

$=10^{56.34}=10^{0.34}\times10^{56}$ $a=2.\cdots$ ($\log1<0.34<\log2$) $m=2$, $n=56$

$(m,n)=(2,56)$

EXAMPLE 2

已知$\log2\approx0.3010$，$\log3\approx0.4771$，$\log7\approx0.8451$，若$3^{100}\times2^{50}$為a位正整數，其首位數字為b，個位數字為c，求$a+b+c$值。

答案：72

$3^{100}\times2^{50}=(10^{\log3})^{100}\times(10^{\log2})^{50}$

$=10^{100\log3+50\log2}\approx10^{62.76}$

$=10^{0.76}\times10^{62}$ ($\log5<0.76<\log6$)

$=5.\cdots\times10^{62}$

$a=63$, $b=5$, c→找規律,

$2^1\div10\cdots2$
$2^2\div10\cdots4$
$2^3\div10\cdots8$
$2^4\div10\cdots6$ 四次循環
$2^5\div10\cdots2$

$3^1\div10\cdots3$
$3^2\div10\cdots9$
$3^3\div10\cdots7$
$3^4\div10\cdots1$ 四次循環
$3^5\div10\cdots3$

$3^{100}\times2^{50}\div10\cdots$ $1\times4=4=c$

$a+b+c=72$

EXAMPLE 3

將$(\frac{2}{9})^{20}$表示成小數後，從小數點後第幾位開始不為 0？小數點後第一位不為 0 的數字為何？

$(\frac{2}{9})^{20}=(10^{\log\frac{2}{9}})^{20}=10^{(\log2-\log9)\times20}=10^{-13.064}=10^{0.936}\times10^{-14}=8.\cdots\times10^{-14}$

($\log9=0.9542$, $\log10=1$)

小數點後第14位數始不為0, 該數字為8

EXAMPLE 12

在 1999 年 6 月 1 日數學家利用超級電腦驗證出$2^{6972593}-1$是一個質數。若想要列印出此質數至少需要多少張 A4 紙？假定每張 A4 紙，可列印出 3000 個數字。在下列選項中，選出最接近的張數。

(1)50 (2)100 (3)200 (4)500 (5)700

$2^{6972593}=(10^{\log2})^{6972593}\approx10^{2098750.493}$

有2098751個數字, 每頁3000數字,

約700頁。 選(5)

EXAMPLE 13

芭樂電腦公司研發出一個測螢幕雜訊的方法。假設某螢幕的每平方公分有n個雜訊點，則其「雜訊程度」$r(n)$定義為$r(n)=1+\frac{1}{5}\log_4 n$。現已知$A$螢幕其雜訊程度為 67.3，$B$螢幕其雜訊程度為 48.1。若$A$螢幕每平方公分的雜訊點為$B$螢幕的$k$倍，則$k$的整數部分為幾位數。

$\log_4 n=5(r(n)-1)$

$n=4^{5(r(n)-1)}$

$67.3=1+\frac{1}{5}\log_4 n_A\Rightarrow n_A=4^{5\times66.3}$

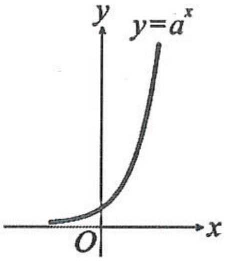
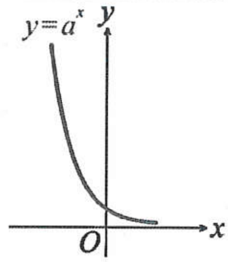
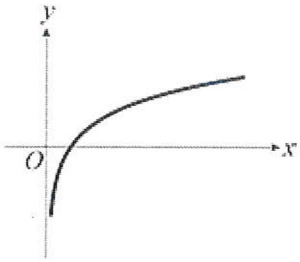
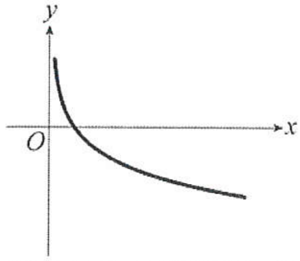
$48.1=1+\frac{1}{5}\log_4 n_B\Rightarrow n_B=4^{5\times47.1}$

$k=\frac{n_A}{n_B}=4^{5\times19.2}=4^{96}\approx(10^{\log4})^{96}\approx10^{57.792}$

k為58位數。

10-3 指數函數、對數函數及其圖形

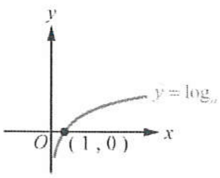
1. 指數函數與對數函數的圖形

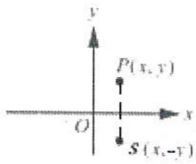
	$a>1$	$0<a<1$	
指數 $y=a^x$			(1)必過 (0,1) (2)恆在 x軸上方 (3)以 x軸 為漸近線
對數 $y=\log_a x$			(1)必過 (1,0) (2)恆在 y軸右側 (3)以 y軸 為漸近線
	遞增函數： 圖形越往右，函數值越大。 $a^{x_1}>a^{x_2}\Rightarrow$ $x_1>x_2$ $\log_a x_1>\log_a x_2\Rightarrow$ $x_1>x_2$	遞減函數： 圖形越往右，函數值越小。 $a^{x_1}>a^{x_2}\Rightarrow$ $x_1<x_2$ $\log_a x_1>\log_a x_2\Rightarrow$ $x_1<x_2$	

2. 兩圖形間的對稱

(1) $(x,y)\to(x,-y)$ ： $y=f(x)$ 與 $y=-f(x)$ 對稱於 x軸 。

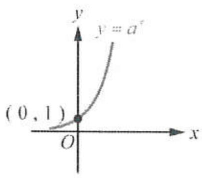
如： $y=\log_a x$ 和 $-y=\log_a x$ ($\Rightarrow y=$ $\log_{\frac{1}{a}} x$)的圖形。

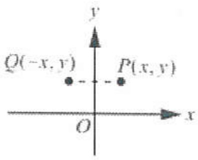




(2) $(x,y)\to(-x,y)$ ： $y=f(x)$ 與 $y=f(-x)$ 對稱於 y軸 。

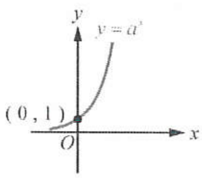
如： $y=a^x$ 和 $y=a^{-x}$ ($\Rightarrow y=$ $(\frac{1}{a})^x$)的圖形。

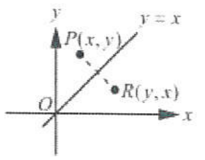




(3) $(x,y)\to(y,x)$ ： $y=f(x)$ 與 $x=f(y)$ 對稱於 直線 $y=x$ 。

如： $y=a^x$ 和 $x=a^y$ ($\Rightarrow y=$ $\log_a x$)的圖形。





3. 繪製含負號或絕對值的函數圖形：先畫 $y=f(x)$ 的圖形

(1) $y=-f(x)$ 的圖形：將 $y=f(x)$ 圖形對稱 x軸

(2) $y=f(-x)$ 的圖形：將 $y=f(x)$ 圖形對稱 y軸

(3) $y=|f(x)|$ 的圖形：①保留 $y=f(x)$ 的圖形在 x 軸上方部分

②將 $y=f(x)$ 的圖形在 x 軸下方部分 翻正 (y 值負變正)

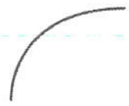
(4) $y=f(|x|)$ 的圖形：① $x\geq 0$ 的部分，先畫 $y=f(x)$ 的圖形

② $x\geq 0$ 的部分，直接把①對稱 y軸

4. 凹向性

(1)凹口向上：圖形上任兩點的連線（弦）在圖形上方。(如：指數函數圖形 $y=a^x$)

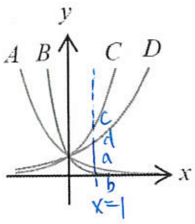
(2)凹口向下：圖形上任兩點的連線（弦）在圖形下方。(如：常用對數函數 $y=\log_{10}x$)



EXAMPLE 1

試比較 $a,b,c,d,1$ 的大小關係：

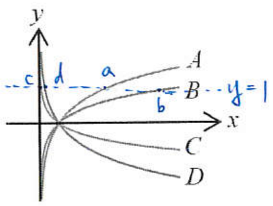
(1)



$A:y=a^x$、$B:y=b^x$

$C:y=c^x$、$D:y=d^x$

(2)



$A:y=\log_a x$、$B:y=\log_b x$

$C:y=\log_c x$、$D:y=\log_d x$

(1) $x=1$ 代入 與 A,B,C,D

交點分別為 $(1,a),(1,b),(1,c),(1,d)$

故 $c>d>a>b$

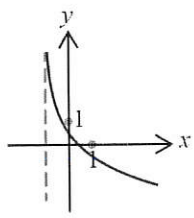
(2) $y=1$ 代入，與 A,B,C,D

交點分別為 $(a,1),(b,1),(c,1),(d,1)$

故 $b>a>d>c$

EXAMPLE 2

下圖為 $y=a+\log_b(x+c)$ 的圖形，且以 $x=-1$ 為漸近線，試問下列選項何者正確？



(1) $a>0$，$0<b<1$，$c>0$

(2) $a>0$，$0<b<1$，$c<0$

(3) $a>0$，$b>1$，$c>0$

(4) $a>0$，$b>1$，$c<0$

(5) $a<0$，$0<b<1$，$c>0$

$y=\log_b x$ 必過 $(1,0)$ 且漸近線為 $x=0$

$\rightarrow y=\log_b(x+1)$

向左移 1，漸近線為 $x=-1$，但過 $(0,0)$，$c=1$

向上移 a，與 y 軸交點 $(0,a)$，$0<a<1$

$\rightarrow y=a+\log_b(x+1)$

圖形遞減，$\therefore 0<b<1$，選 (1)

EXAMPLE 3

若 (a,b) 是對數函數 $y=\log x$ 圖形上一點，則下列哪些選項中的點也在該對數函數的圖形上？

(1) $(1,0)$ (2) $(10a,b+1)$ (3) $(2a,2b)$

(4) $(\frac{1}{a},1-b)$ (5) $(a^2,2b)$

題意 $b=\log a$

(1) $\log 1=0$ (o)

(2) $\log 10a=\log 10+\log a=1+b$ (o)

(3) $\log 2a=\log 2+\log a=\log 2+b$ (x)

(4) $\log\frac{1}{a}=-\log a=-b$ (x)

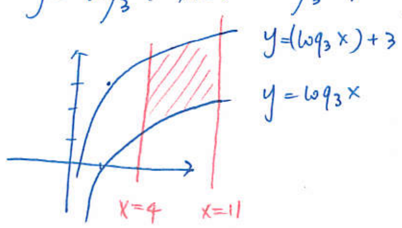
(5) $\log a^2=2\log a=2b$ (o)

選 (1)(2)(5)

EXAMPLE 4

函數 $y=\log_3(27x)$ 在直線 $x=4$、$x=11$ 與 x 軸之間所圍成的區域面積為 A；函數 $y=\log_3 x$ 在直線 $x=4$、$x=11$ 與 x 軸之間所圍成的區域面積為 B，求 $A-B$。

$y=\log_3(27x)=\log_3 27+\log_3 x=(\log_3 x)+3$



$A-B=7\times 3=\underline{21}$

EXAMPLE 5

關於指數與對數函數，下列敘述哪些是正確的？

(1) $y=2010^x$ 的圖形恆在 $y=99^x$ 的圖形上方

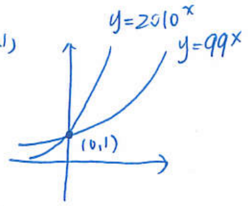
(2) $y=\log x$ 和 $y=\log_{\frac{1}{10}} x$ 的圖形對稱於 x 軸

(3) $y=\log(x^2-10x+33)$ 的圖形與 x 軸相交

(4)若 P,Q 是 $y=\log x$ 上相異兩點，則直線 PQ 斜率必為正。

(5)若直線 $y=ax$ 和 $y=10^x$ 的圖形有兩個交點，則直線 $y=\frac{1}{a}x$ 和 $y=\log x$ 的圖形也有兩個交點。

(1)



當 $x<0$ 時，在下方 (x)

(2) $y=\log x$

$y=\log_{\frac{1}{10}} x=\frac{\log x}{\log(\frac{1}{10})}=-\log x$

$(x,y)\leftrightarrow(x,-y)$ 對稱 x 軸 (o)

(3) $\begin{cases} y=\log(x^2-10x+33) \\ y=0 \end{cases}$

$\log(x^2-10x+33)=0$,

$x^2-10x+33=1$,

$x^2-10x+32=0$

$D=(-10)^2-4\times1\times32<0$

沒有交點 (x)

(4) $y=\log x$ 是遞增，直線 PQ 斜率為正 (o)

(5) $y=ax$ 和 $y=10^x$

$\big\updownarrow$ 對稱 $y=x$　$(x,y)\leftrightarrow(y,x)$

$x=ay$ 和 $x=10^y$

$(y=\frac{1}{a}x)$　$(y=\log x)$

交點個數相同 (o)

選 (2)(4)(5)

EXAMPLE 6

若 $A(0,4)$、$B(12,6)$ 為 $\Gamma: y=b+\log_2(x+k)$ 圖形上的兩點，下列哪些選項正確？

(1) $(b,k)=(4,2)$

(2)若點 $(-2,\alpha)$ 在 Γ 上，則 $\alpha=3$。

(3)若點 $(1,\beta)$ 在 Γ 上，則 $8^\beta=8000$。

(4)若 $P(12,c)$、$Q(14,d)$ 在 Γ 上，則 $\overline{PQ}>\sqrt{5}$

(5)將 Γ 向左平移 2 單位，向下平移 1 單位，則得函數 $y=\log_2(2x+12)$

A(0,4) 代入 $4=b+\log_2 k$ …①

B(12,6) 代入 $6=b+\log_2(12+k)$ …②

①－②：$-2=\log_2(\frac{k}{k+12})$，$\frac{k}{k+12}=2^{-2}=\frac{1}{4}$

$4k=k+12$，$3k=12$，$k=4$

$b=4-\log_2 4=2$

(1) $(b,k)=(2,4)$ (x)

(2) $\beta=2+\log_2(-2+4)=2+\log_2 2=3$ (o)

(3) $\alpha=2+\log_2(1+4)$，$\alpha-2=\log_2 5$，

$5=2^{\alpha-2}\Rightarrow 5=\frac{2^\alpha}{4}$，$2^\alpha=20$

$8^\alpha=(2^3)^\alpha=(2^\alpha)^3=(20)^3=8000$ (o)

(4) $\overline{PQ}=\sqrt{2^2+(d-c)^2}$

若 $|d-c|>1$，則 $\overline{PQ}>\sqrt{5}$

$|d-c|\le1$，則 $\overline{PQ}\le\sqrt{5}$

$d=2+\log_2(14+4)$

$c=2+\log_2(12+4)$

$\therefore d-c=\log_2\frac{18}{16}<\log_2 2=1$ (x)

(5) $y=2+\log_2(x+4)\xrightarrow[x\to x+2]{\text{左 }2} y=2+\log_2(x+6)$

$\xrightarrow[y\to y+1]{\text{下 }1} y+1=2+\log_2(x+6)$，$y=1+\log_2(x+6)$

$=\log_2 2+\log_2(x+6)$

$=\log_2(2x+12)$ (o)

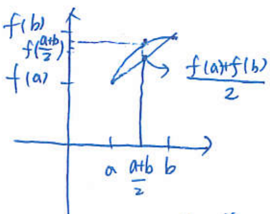
選 (2)(3)(5)

EXAMPLE 7

已知 $A(a,f(a))$、$B(b,f(b))$ 為函數 $y=f(x)$ 圖形上相異兩點，且滿足 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\ge\frac{f(a)+f(b)}{2}$，

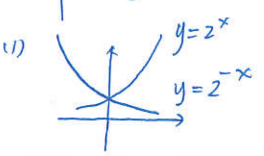
下列哪些選項可為滿足題意敘述的函數 $f(x)$？

(1) 2^{-x}　(2) -2^x　(3) $(\frac{1}{2})^x$　(4) $\log x$　(5) $-\log_2 x$



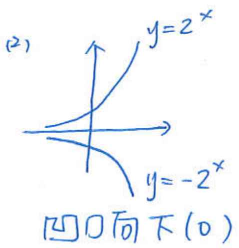
凹口向下.

(1)



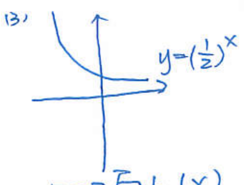
凹口向上 (x)

(2)



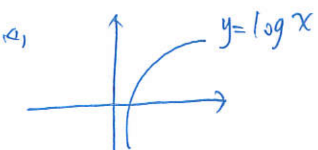
凹口向下 (o)

(3)



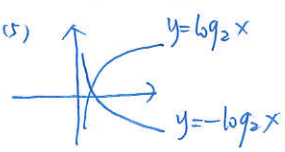
凹口向上 (x)

(4)



凹口向下 (o)

(5)



凹口向上 (x)

10-4 指數與對數方程式及不等式

1. 一對一性質（用於解方程式）

(1)若 $a^{x_1}=a^{x_2}$，則 $x_1=x_2$ 。

(2)若 $\log x_1=\log x_2$，則 $x_1=x_2$ 。

2. 遞增遞減性質（用於比較數值大小及解不等式）

(1)當 $a>1$ 時，圖形遞增。若 $a^{x_1}>a^{x_2}$，則 $x_1>x_2$。若 $\log_{10}x_1>\log_{10}x_2$，則 $x_1>x_2$ 。

(2)當 $0<a<1$ 時，圖形遞減。若 $a^{x_1}>a^{x_2}$，則 $x_1<x_2$ 。

EXAMPLE 1

請比較下列各數的大小：

$A=2\sqrt[3]{4}$、$B=4^{-0.25}$、$C=(0.25)^{-2}$、$D=(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$。

Sol：

$\boxed{\text{KEY}}$指對數比大小⇒化同底

$A=2^1\times2^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{5}{3}}$

$B=4^{-0.25}=(2^2)^{-0.25}=2^{-0.5}$

$C=(0.25)^{-2}=(\frac{1}{4})^{-2}=(2^{-2})^{-2}=2^4$

$D=(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}=(2^{\frac{1}{2}})^{\sqrt{2}}=2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$C>A>D>B$

EXAMPLE 2

請比較下列各數的大小：

$A=\log 2$、$B=\log\frac{1}{3}$、$C=-\log 4$、$D=1$。

$A=\log 2$

$B=\log\frac{1}{3}$

$C=\log 4^{-1}=\log\frac{1}{4}$

$D=\log 10$

$D>A>B>C$

EXAMPLE 3

$a>1>b>0$，關於下列不等式，請選出正確選項。

(1) $(-a)^7>(-a)^9$　　(2) $b^{-9}>b^{-7}$

(3) $\log_{10}\frac{1}{a}>\log_{10}\frac{1}{b}$　　(4) $\log_a 1>\log_b 1$

(5) $\log_a b\geq\log_b a$

(1) $a>1$：$a^7<a^9$，$-a^7>-a^9$，$(-a)^7>(-a)^9$ (o)

(2) $0<b<1$ 且 $-9<-7$：$b^{-9}>b^{-7}$ (o)

(3) $\frac{1}{a}<1<\frac{1}{b}$：$\log\frac{1}{a}<\log\frac{1}{b}$ (x)

(4) $\log_a 1=0=\log_b 1$ (x)

(5) $\log_2\frac{1}{3}<\log_{\frac{1}{3}}2$

$\log_{\frac{1}{2}}3>\log_3\frac{1}{2}$

$-\frac{\log 3}{\log 2}$　$-\frac{\log 2}{\log 3}$

無法判定 (x)

選(1)(2)

EXAMPLE 4

下列哪個選項是正確的？

(1) $3^7>7^3$　(2) $5^{10}<10^5$　(3) $2^{100}<10^{30}$

(4) $\log_a 1>\log_b 1$　(5) $\log_2 11<3.5$

(1) $2187>343$ (o)

(2) $25^5>10^5$ (x)

(3) $(2^{10})^{10}=1024^{10}>1000^{10}=(10^3)^{10}$ (x)

(4) $\log_a 1=\log_b 1=0$ (x)

(5) $3.5=\log_2 2^{3.5}=\log_2 8\sqrt{2}$

$8\sqrt{2}=\sqrt{128}>11$

$\therefore \log_2 8\sqrt{2}>\log_2 11$ (o)

選(1)(5)

EXAMPLE 5

下列各數中，哪一個數最小？

(1) $0.1^{0.1}$ (2) $0.2^{0.2}$ (3) $0.3^{0.3}$ (4) $0.4^{0.4}$ (5) $0.5^{0.5}$

(1) $0.1^{0.1}$

(2) $0.04^{0.1}$

(3) $0.027^{0.1}$

(4) $0.0256^{0.1}$

(5) $\left(\frac{1}{32}\right)^{0.1} = (0.03\cdots)^{0.1}$

選 (4) #

EXAMPLE 6

設 $a > b > 1000$，令 $p = \sqrt{(\log a)(\log b)}$、$q = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$、$r = \log(\frac{a+b}{2})$，試比較 p,q,r 的大小。

$q = \frac{\log a + \log b}{2} > \sqrt{(\log a)(\log b)} = p$

($\because \log a \neq \log b$ $\therefore$ "=" 不成立)

$\frac{1}{2}(\log a + \log b) = \frac{1}{2}\log ab = \log\sqrt{ab}$

$r = \log\frac{a+b}{2} > \log\sqrt{ab} = q$

($\because a \neq b$ $\therefore$ "=" 不成立)

$\therefore r > q > p$ #

EXAMPLE 7

解下列各方程式及不等式：

(1) $2^{2x+1} - 33 \cdot 2^{x-2} + 1 = 0$

$2\cdot(2^x)^2 - \frac{33}{4}(2^x) + 1 = 0$

$8\cdot(2^x) - 33(2^x) + 4 = 0$

$(8\cdot(2^x) - 1)(2^x - 4) = 0$

$2^x = \frac{1}{8}$ 或 4

$x = -3$ 或 2 #

(2) $2(4^x + 4^{-x}) - 5(2^x + 2^{-x}) + 6 = 0$

令 $t = 2^x + 2^{-x}$，$t \geq 2$

$t^2 = 4^x + 2 + 4^{-x}$，$4^x + 4^{-x} = t^2 - 2$

$2(t^2-2) - 5t + 6 = 0$，$2t^2 - 5t + 2 = 0$

$(2t-1)(t-2) = 0$，$t = \frac{1}{2}$ 或 2 ($\frac{1}{2}$ 不合)

$2^x + 2^{-x} = 2$，$2^x = 2^{-x} \Rightarrow x = 0$ #

("=" 成立)

(3) $\log x + \log(x+1) = 1 + \log 3$

$\log x(x+1) = \log 10\cdot 3$

$\Rightarrow x(x+1) = 30$

$\Rightarrow x^2 + x - 30 = 0$

$\Rightarrow x = -6$ or 5 (-6 不合)

$\therefore x = 5$ #

註 真數 > 0

$\begin{cases} x > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0$

(4) 設 $0 < x < 1$，$\log_x 4 - \log_2 x = 1$

註 $\log 4 - \log 2 = \log 2$

註 真數 > 0：$x > 0$，

原式：$\frac{\log 4}{\log x} - \frac{\log x}{\log 2} = 1$

$\Rightarrow (\log 4)(\log 2) - (\log x)^2 = (\log x)(\log 2)$

$\Rightarrow (\log x)^2 + (\log 2)(\log x) - (\log 4)(\log 2) = 0$

$\Rightarrow (\log x - \log 2)(\log x + \log 4) = 0$，$\log x = \log 2$ or $-\log 4$

$x = \frac{1}{4}$ or 2 (2 不合)

$\therefore x = \frac{1}{4}$ #

(5) $x^{\log x} = 10^6 x$

$(10^{\log x})^{\log x} = 10^6 \cdot 10^{\log x}$

$(\log x)^2 = 6 + \log x$

$(\log x)^2 - \log x - 6 = 0$

$(\log x - 3)(\log x + 2) = 0$

$\log x = 3$ or -2，$x = 10^3$ or 10^{-2} #

(6) $10^9 < 2^x < 9^{10}$，x 為正整數.

$10^9 < (10^{\log 2})^x < (10^{\log 9})^{10}$

$9 < x\cdot\log 2 < 10\cdot\log 9$

$\frac{9}{\log 2} < x < 10\cdot\frac{\log 9}{\log 2}$

$29.\cdots < x < 31.7\cdots$

$x = 30$ 或 31 #

(7) $(0.25)^{3x^2} < (0.5)^{10x+4}$

$(0.5)^{6x^2} < 0.5^{10x+4}$

$\Rightarrow 6x^2 > 10x+4$

$\Rightarrow 3x^2-5x-2>0$

$\Rightarrow (3x+1)(x-2)>0$

$\Rightarrow x>2$ 或 $x<\frac{-1}{3}$

(8) $\log(2x+3)-\log(x-1) \geq \log(x+5)$

◎真數 > 0

$\begin{cases} 2x+3>0 \\ x-1>0 \\ x+5>0 \end{cases} \Rightarrow x>1 \cdots ①$

$\log \frac{(2x+3)}{(x-1)} \geq \log(x+5)$

$\Rightarrow \frac{2x+3}{x-1} \geq x+5$

$\Rightarrow (2x+3) \geq (x+5)(x-1)$ $(\because x>1)$

$\Rightarrow x^2+2x-8 \leq 0$, $(x+4)(x-2) \leq 0$

$\Rightarrow -4 \leq x \leq 2 \cdots ②$ 由①②知：$1 < x \leq 2$ #

EXAMPLE 8

已知 $x>0$，$y>0$，$x+2y=12$，試求 3^x+9^y 的最小值。

$3^x+9^y = 3^x+3^{2y} = 3^x+3^{12-x} = 3^x+\frac{3^{12}}{3^x}$

$\frac{3^x+\frac{3^{12}}{3^x}}{2} \geq \sqrt{(3^x)(\frac{3^{12}}{3^x})} = 3^6 = 729$

$3^x+9^y \geq 2\times 729 = \underline{1458}$ #

EXAMPLE 9

設 $x>1$，$f(x)=\log_4(\frac{x^2}{8})+\log_x(\frac{8}{\sqrt{x}})$，求 $f(x)$ 的最小值。

$f(x) = \frac{\log(\frac{x^2}{8})}{\log 4} + \frac{\log(\frac{8}{\sqrt{x}})}{\log x}$

$= \frac{2\log x - 3\log 2}{2\log 2} + \frac{3\log 2 - \frac{1}{2}\log x}{\log x}$

$= \frac{\log x}{\log 2} - \frac{3}{2} + 3\frac{\log 2}{\log x} - \frac{1}{2} \geq \underline{2\sqrt{3}-2}$ #

$\left(\frac{\frac{\log x}{\log 2}+\frac{3\log 2}{\log x}}{2} \geq \sqrt{(\frac{\log x}{\log 2})(\frac{3\log 2}{\log x})} \right)$

EXAMPLE 10

下列各敘述，試選正確的選項。

(1)方程式 $2^{-x}=x$ 有實數解

(2)方程式 $x^2=2^{-|x|}$ 恰有 2 個實數解

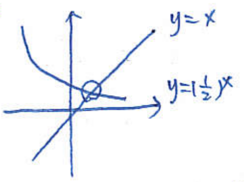
(3)方程式 $|\log_2 x|=2-x$ 恰有 1 個實數解

(4)方程式 $2^x=\log_2 x$ 沒有實數解

(5)方程式 $\log_2(-x)+x+5=0$ 有 2 個實數解

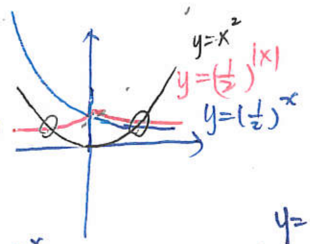
◎實數解個數 ⇒ 畫圖找交點數.

(1) $\begin{cases} y=2^{-x}=(\frac{1}{2})^x \\ y=x \end{cases}$



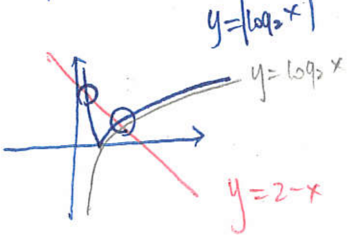
1個實根 (o)

(2) $\begin{cases} y=x^2 \\ y=2^{-|x|}=(\frac{1}{2})^{|x|} \end{cases}$



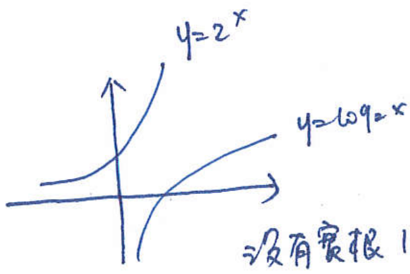
2個實根 (o)

(3) $\begin{cases} y=|\log_2 x| \\ y=2-x \end{cases}$



2個實根 (x)

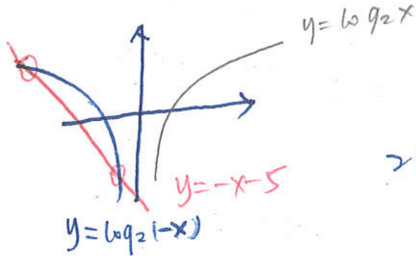
(4) $\begin{cases} y=2^x \\ y=\log_2 x \end{cases}$



沒有實根 (o)

(5) $\log_2(-x)=-x-5$

$\begin{cases} y=\log_2(-x) \\ y=-x-5 \end{cases}$



2個實根 (o)

選 $\underline{(1)(2)(4)(5)}$ #

10-5 應用問題

1. 利息問題：設本金 N 元，期利率 p，經過 n 期，

   (1)以單利計算的本利和為 $N(1+np)$。

   (2)以複利計算的本利和為 $N(1+p)^n$。

2. 成長率：設原先人口 N 人，每年成長率 r，經過 n 年後人口為 $N(1+r)^n$。

3. 半衰期：設原先質量 M，半衰期 k 年，經過 n 年後質量為 $M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{k}}$。

   （每年變為原先的 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{k}}$ 倍） $\frac{n}{k}$個半衰期

EXAMPLE 1

小華準備向銀行貸款 3 百萬元當做創業基金，其年利率爲 3%，約定三年期滿一次還清貸款的本利和。銀行貸款一般以複利（每年複利一次）計息還款，但給小華創業優惠改以單利計息還款。試問在此優惠下，小華在三年期滿還款時可以比一般複利計息少繳多少元。

單利 $= 300(1+3\%\times 3) = 327$ (萬)

複利 $= 300(1+3\%)^3 = 327.8181$ (萬)

) 多 8181元

EXAMPLE 2

在養分充足的情況下，細菌的數量會以指數函數的方式成長，假設細菌 A 的數量每兩個小時可以成長為兩倍，細菌 B 的數量每三個小時可以成長為三倍。若養分充足且一開始兩種細菌的數量相等，則大約幾小時後細菌 B 的數量除以細菌 A 的數量最接近 10？

($\log 2 \approx 0.3010$、$\log 3 \approx 0.4771$)

(1) 24 小時。(2) 48 小時。(3) 69 小時。(4) 96 小時。(5) 117 小時。

設 n 小時，經過 $\left(\frac{n}{2}\right)$個 2小時，$2^{\frac{n}{2}}$ 倍

經過 $\left(\frac{n}{3}\right)$個 3小時，$3^{\frac{n}{3}}$ 倍

$\frac{3^{\frac{n}{3}}}{2^{\frac{n}{2}}} = 10$，$\frac{\left(10^{\log 3}\right)^{\frac{n}{3}}}{\left(10^{\log 2}\right)^{\frac{n}{2}}} = 10$，$10^{\frac{n}{3}\log 3 - \frac{n}{2}\log 2} = 10$，$\frac{n}{3}\log 3 - \frac{n}{2}\log 2 = 1$

$n = \frac{1}{\frac{\log 3}{3} - \frac{\log 2}{2}} \approx 117$，選(5)

EXAMPLE 3

某公司為了響應節能減碳政策，決定在五年後將公司該年二氧化碳排放量降為目前排放量的 75%。公司希望每年依固定的比率(當年和前一年排放量的比)逐年減少二氧化碳的排放量。若要達到這項目標，則該公司每年至少要比前一年減少______% 的二氧化碳的排放量。(計算到小數點後第一位，以下四捨五入。)($\log 2 \approx 0.3010$ 、 $\log 3 \approx 0.4771$ 、 $\log 9.44 \approx 0.9750$)

設減少 $r\%$

$(1-r\%)^5 = 75\% = \frac{3}{4}$

$\left(10^{\log(1-r\%)}\right)^5 = 10^{\log\frac{3}{4}}$

$5\log(1-r\%) = \log 3 - \log 4 \approx -0.1249$

$\log(1-r\%) = -0.02498 = -1 + 0.97502$

$\approx \log\frac{1}{10} + \log 9.44 = \log 0.944$

$1-r\% = 0.944$. $r = 5.6$

EXAMPLE 4

放射性物質的半衰期 T 定義為每經過時間 T，該物質的質量會衰退成原來的一半。鉛製容器中有兩種放射性物質 A、B，開始紀錄時容器中物質 A 的質量為物質 B 的兩倍，而 120 小時後兩種物質的質量相同。已知物質 A 的半衰期為 7.5 小時，請問物質 B 的半衰期為幾小時？

A 經過 $\frac{120}{7.5} = 16$ 個半衰期，質量變為原來 $(\frac{1}{2})^{16}$ 倍 $\Rightarrow (\frac{1}{2})^{16}\cdot n_A$

B 經過 $\frac{120}{T}$ 個半衰期，質量變為原來 $(\frac{1}{2})^{\frac{120}{T}}$ 倍 $\Rightarrow (\frac{1}{2})^{\frac{120}{T}}\cdot n_B$

$\begin{cases} n_A = 2n_B \\ (\frac{1}{2})^{16}\cdot n_A = (\frac{1}{2})^{\frac{120}{T}}\cdot n_B \end{cases} \Rightarrow (\frac{1}{2})^{15} = (\frac{1}{2})^{\frac{120}{T}}$, $\frac{120}{T} = 15$, $T = 8$

EXAMPLE 5

根據統計資料，在 A 小鎮當某件訊息發布後，t 小時之內聽到該訊息的人口是全鎮人口的 $100(1-2^{-kt})\%$，其中 k 是某個大於 0 的常數。今有某訊息，假設在發布後 3 小時之內已經有 70%的人口聽到該訊息。又設最快要 T 小時後，有 99%的人口已聽到該訊息，則 T 最接近下列哪一個選項？($\log 2 \approx 0.3010$ 、 $\log 3 \approx 0.4771$)

(1)5 小時　(2) $7\frac{1}{2}$ 小時　(3) 9 小時　(4) $11\frac{1}{2}$ 小時　(5) 13 小時

3 小時，$100(1-2^{-3k})\% = 70\%$，$2^{-3k} = \frac{3}{10}$

T 小時，$100(1-2^{-Tk})\% = 99\%$，$2^{-Tk} = \frac{1}{100}$

$2^{-Tk} = (2^{-3k})^{\frac{T}{3}} = (\frac{3}{10})^{\frac{T}{3}} = \frac{1}{100}$，$\left(10^{\log\frac{3}{10}}\right)^{\frac{T}{3}} = 10^{-2}$，$\frac{T}{3}\log\frac{3}{10} = -2$

$T = \frac{-6}{\log 3 - \log 10} \approx 11.5$，選(4)