4-1 數列與級數

1. 數列與級數

(1)數列：將一些數字排成一列，用","區隔：$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$。此數列常用 $\underline{<a_n>}$ 表示。

(2)級數：將一些數字排成一列，用"+"連接：$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$。

前 n 項的和常用 $\underline{S_n}$ 表示，即 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$。

(3) a_n 與 S_n：① $a_1=\underline{S_1}$ ② $a_n=\underline{S_n-S_{n-1}}$ $(n\ge 2)$

2. 等差與等比

	等差	等比
定義	$a_n-a_{n-1}=d$	$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=r$
一般項	$a_n=\underline{a_1+(n-1)d}$ $=\underline{a_m+(n-m)d}$ $=\underline{dn+k}$	$a_n=\underline{a_1r^{n-1}}$ $=\underline{a_mr^{n-m}}$ $=\underline{k\times r^n}$
前 n 項和	$S_n=\underline{\dfrac{n(2a_1+(n-1)d)}{2}}$ $=\underline{\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}}$	$S_n=\underline{\dfrac{a_1(r^n-1)}{r-1}}$ $(r\ne 1)$ $=\underline{na_1}$ $(r=1)$
連 3 項 (a,b,c)	假設法：$\underline{a-d,a,a+d}$ 等差中項：$b=\underline{\dfrac{a+c}{2}}$	假設法：$\underline{\dfrac{a}{r},a,ar}$ 等比中項：$b=\underline{\pm\sqrt{ac}}$
連 n 項和	$S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n},\cdots$ 亦成等差	$S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n},\cdots$ 亦成等比

3. 常見級數和公式：

(1) $1+2+3+\cdots+n=\underline{\dfrac{n(n+1)}{2}}$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\underline{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

(3) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\underline{[\dfrac{n(n+1)}{2}]^2}$

② 不知道如何做 ⇒ 換 a_1, d

EXAMPLE 1

數列 $a_1+2, a_2+4, \cdots, a_{10}+20$ 共十項，其和為 240。$a_1+a_2+\cdots+a_{10}$ 之值。

$(a_1+2)+(a_2+4)+\cdots+(a_{10}+20)=240$

$\Rightarrow (a_1+a_2+\cdots+a_{10})+(2+4+\cdots+20)=240$

$\Rightarrow a_1+a_2+\cdots+a_{10}=240-110=\underline{130}$ ※

$\left[\ 2+4+\cdots+20=\dfrac{10(2+20)}{2}=110\ \right]$

EXAMPLE 2

等差數列共 10 項，其奇數項和為 15，偶數項和為 30，求此數列之公差。

$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=15 \cdots ①$

$a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=30 \cdots ②$

又 $a_2-a_1=a_4-a_3=a_6-a_5=a_8-a_7$

$=a_{10}-a_9=d$

②−①：$5d=15$, $\underline{d=3}$ ※

EXAMPLE 3 ② 換 a_1, r

等比數列前 10 項和為 80，前 5 個奇數項和為 120，求首項 a_1 的範圍。

(1) $a_1<80$ (2) $80\le a_1<90$ (3) $90\le a_1<100$
(4) $100\le a_1<110$ (5) $110\le a_1<120$

$a_1+a_1r+\cdots+a_1r^9=80 \cdots ①$

$a_1+a_1r^2+a_1r^4+a_1r^6+a_1r^8=120 \cdots ②$

$\begin{cases} \dfrac{a_1(1-r^{10})}{1-r}=80 \cdots ① \\ \dfrac{a_1(1-(r^2)^5)}{1-r^2}=120 \cdots ② \end{cases}$

$\dfrac{①}{②}$：$\dfrac{1-r^2}{1-r}=\dfrac{80}{120}$, $1+r=\dfrac{2}{3}$, $r=\dfrac{-1}{3}$

代入①, $a_1=\dfrac{80\times\frac{4}{3}}{1-(\frac{1}{3})^{10}}\approx 80\times\dfrac{4}{3}=106.\cdots$

$\underline{選 (4)}$ ※

EXAMPLE 4

a_1, a_2, a_3 是等差數列，b_1, b_2, b_3 是等比數列且此六數均為實數。下列哪些正確？

(1) $a_1<a_2$ 和 $a_2>a_3$ 可能同時成立
(2) $b_1<b_2$ 和 $b_2>b_3$ 可能同時成立
(3)若 $a_1+a_2<0$，則 $a_2+a_3<0$
(4)若 $b_1b_2<0$，則 $b_2b_3<0$
(5) b_1, b_2, b_3 均為正整數且 $b_1<b_2$，則 b_1 整除 b_2

② 等差 $\begin{cases} d>0, \langle a_n\rangle \text{ 遞增} \\ d<0, \langle a_n\rangle \text{ 遞減} \end{cases}$

等比 $\begin{cases} r>0, \langle a_n\rangle \text{ 全正 or 全負} \\ r<0, \langle a_n\rangle \text{ 正負相間} \end{cases}$

(1) 非遞增或遞減 (x)

(2) 如：$-1, 2, -4$ (o)

(3) 若 $-1, 0, 1$ (x)

(4) $b_1b_2<0$ 表示一正一負 ⇒ $r<0$

∴ b_2, b_3 必為一正一負 ∴ $b_2b_3<0$ (o)

(5) 若 $r=\frac{3}{2}$ 如：4, 6, 9 (x)

$\underline{選 (2)(4)}$ ※

EXAMPLE 5

求下列各級數的和：

(1) $11^3+12^3+\cdots 20^3$ (2) $1^2+3^2+5^2+\cdots+19^2$ (3) $\dfrac{1}{1\times3}+\dfrac{1}{3\times5}+\dfrac{1}{5\times7}+\cdots+\dfrac{1}{19\times21}$

(1) $[1^3+2^3+\cdots+10^3+11^3+\cdots+20^3]-(1^3+2^3+\cdots+10^3)$

$=\left(\dfrac{20\times21}{2}\right)^2-\left(\dfrac{10\times11}{2}\right)^2=44100-3025=\underline{41075}$ ※

(2) $(1^2+2^2+3^2+\cdots+19^2)-(2^2+4^2+\cdots+18^2)$

$=\dfrac{19\times20\times39}{6}-2^2(1^2+2^2+\cdots+9^2)$

$=2470-4\times\dfrac{9\times10\times19}{6}=2470-1140=\underline{1330}$ ※

(3) ② 分式型：$\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$

$\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

所求 $=\frac{1}{2}(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})+\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+\frac{1}{2}(\frac{1}{19}-\frac{1}{21})$

$=\frac{1}{2}[(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{19}-\frac{1}{21})]$

$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{21})=\underline{\frac{10}{21}}$ ※

EXAMPLE 6

已知四個正數 $2, x, y, 12$ 中，前三項成等~~差~~比數列，後三項成等~~比~~差數列，求 $x+y$ 之值。

$x^2=2y \cdots ①$

$2y=x+12 \cdots ②$

①代入②：$x^2=x+12$

$x^2-x-12=0$

$x=4$ 或 -3（取正）

$\therefore 2y=16,\ y=8$

$\underline{x+y=12}$ #

EXAMPLE 7

設一等比級數，首項為 3，末項為 192，其和為 381，求此數列的項數。

$a_1=3$

$a_n=a_1r^{n-1} \Rightarrow 192=3\times r^{n-1},\ r^{n-1}=64$

$S_n=\dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r} \Rightarrow 381=\dfrac{3(1-64r)}{1-r}$

$\therefore 381-381r=3-192r,\ 189r=378$

$\therefore r=2$，得 $2^{n-1}=64$，$\underline{n=7}$ #

EXAMPLE 8

數列 $\langle a_n \rangle$ 前 n 項和

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=2^{n+1}(n^2-2n)，$$

求此數列第 n 項 a_n。

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=2^{n+1}\cdot(n^2-2n)-2^n\cdot[(n-1)^2-2(n-1)]$

$=2^n\cdot(2n^2-4n)-2^n\cdot(n^2-4n+3)$

$=\underline{2^n\cdot(n^2-3)}$ #

EXAMPLE 9

若一數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足

$$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=n^2+3n+1，n\ge 1，$$

試求 a_{20} 的值。

$a_1+2a_2+\cdots+19a_{19}+20a_{20}=20^2+3\times20+1$

$a_1+2a_2+\cdots+19a_{19}=19^2+3\times19+1$

兩式相減：$20a_{20}=39+3=42$

$\therefore \underline{a_{20}=\dfrac{21}{10}}$ #

4-2 遞迴關係

1. 遞迴關係

[型一]等差型⇒ 連加　[型二]等比型⇒ 連乘　[型三]其他⇒ 找規律

$a_n = a_{n-1} + k$ (係數相等)　　$a_n = k \cdot a_n$ (沒有常數項)

EXAMPLE 1

依據下列遞迴關係，找出 a_{100} 的值。

(1) $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + (2n+1) \\ a_1 = 1 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{\cancel{n-1}\ n}{n+1} a_n \\ a_1 = 100 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{1-a_n} \\ a_1 = 4 \end{cases}$

(1)
$a_{100} = \boxed{a_{99}} + (2\times 99+1)$
$\boxed{a_{99}} = \boxed{a_{98}} + (2\times 98+1)$
$\vdots$
$+)\ a_2 = a_1 + (2\times 1+1)$
$a_{100} = a_1 + 2\times(1+2+\cdots+99) + 99$
$= 1 + 2\times\frac{99\times 100}{2} + 99 = \underline{10000}$ #

(2)
$a_{100} = \frac{99}{100}\cdot \boxed{a_{99}}$
$\boxed{a_{99}} = \frac{98}{99}\cdot \boxed{a_{98}}$
$\vdots$
$\times)\ a_2 = \frac{1}{2}\cdot a_1$
$a_{100} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{99}{100} a_1$
$= \underline{1}$ #

(3)
$a_2 = \frac{1}{1-a_1} = -\frac{1}{3}$
$a_3 = \frac{1}{1-a_2} = \frac{3}{4}$
三次循環
$a_4 = \frac{1}{1-a_3} = 4$
$\therefore a_{100} = a_1 = \underline{4}$ #

EXAMPLE 3

遞迴數列 $<a_n>$ 滿足 $a_n = a_{n-1} + f(n-2)$，$n \ge 2$ 且 $f(x)$ 是二次多項式。若 $a_1 = 1$，$a_2 = 2$，$a_3 = 5$，$a_4 = 12$，求 a_5 的值。

[法一] 設 $f(x) = ax^2+bx+c$
$a_2 = a_1 + f(0) \Rightarrow c = 1$
$a_3 = a_2 + f(1) \Rightarrow a+b+c = 3$
$a_4 = a_3 + f(2) \Rightarrow 4a+2b+c = 7$
$\begin{cases} a+b=2 \\ 2a+b=3 \end{cases}$，$a=1, b=1$
$a_5 = a_4 + f(3) = 12+9+3+1 = \underline{25}$ #

[法二] 找規律(階差)
1　2　5　12　25 ③
1　3　7　13 ②
2　4　6 ①
故 $\underline{a_5 = 25}$ #

EXAMPLE 4

在等比數列 $<a_n>$ 中，$a_1 = 1$，$a_4 = 2-\sqrt{5}$，$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$，求 $<a_n>$ 的公比。

$a_n r^2 = a_n r + a_n$
$\Rightarrow r^2 = r+1 \Rightarrow r^2 - r - 1 = 0$, $r = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$
$\because a_1 > 0$ 且 $a_4 < 0$，$\therefore r < 0$
故 $r = \underline{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$ #

EXAMPLE 2

設各項都是實數的等差數列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 之公差為正實數 α。試選出正確的選項。

(1) 若 $b_n = -a_n$，則 $b_1 > b_2 > b_3 > \cdots$　(2) 若 $c_n = a_n^2$，則 $c_1 < c_2 < c_3 < \cdots$

(3) 若 $d_n = a_n + a_{n+1}$，則 $d_1, d_2, d_3, \cdots$ 是公差為 α 的等差數列

(4) 若 $e_n = a_n + n$，則 $e_1, e_2, e_3, \cdots$ 是公差為 $\alpha+1$ 的等差數列

(5) 若 f_n 為 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的算術平均數，則 $f_1, f_2, f_3, \cdots$ 是公差為 α 的等差數列

(1) $b_{n+1} - b_n = -a_{n+1} + a_n = -(a_{n+1} - a_n) = -\alpha < 0$，故遞減 (O)

(2) 如：$-1, 0, 1$，平方為 $1, 0, 1$ (X)

(3) $d_{n+1} - d_n = (a_{n+1} + a_{n+2}) - (a_n + a_{n+1}) = (a_{n+1} - a_n) + (a_{n+2} - a_{n+1}) = 2\alpha$ (X)

(4) $e_{n+1} - e_n = (a_{n+1} + (n+1)) - (a_n + n) = (a_{n+1} - a_n) + 1 = \alpha + 1$ (O)

(5) $f_{n+1} - f_n = \frac{a_1 + \cdots + a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \frac{\frac{n+1}{2}(2a_1 + (n+1-1)\alpha)}{n+1} - \frac{\frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)\alpha)}{n} = \frac{\alpha}{2}$ (X)

選 (2)(4) #

EXAMPLE 5

設 $(a_{n+1})^2 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(a_n)^2$，$n$ 是正整數且 $a_n > 0$。令 $b_n = \log a_n$，則數列 $b_1, b_2, b_3, \cdots$ 為

(1)公差為正的等差數列 (2)公差為負的等差數列

(3)公比為正的等比數列 (4)公比為負的等比數列

$10^{b_n} = 10^{\log a_n} = a_n$

$(10^{b_{n+1}})^2 = 10^{-\frac{1}{2}} \cdot (10^{b_n})^2$

$10^{2b_{n+1}} = 10^{-\frac{1}{2}+2b_n}$

得 $2b_{n+1} = -\frac{1}{2} + 2b_n$

$\Rightarrow b_{n+1} - b_n = -\frac{1}{4}$ → 等差且 $d = -\frac{1}{4}$，選(2)#

EXAMPLE 6

設 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 為實數數列，對所有正整數 n 滿足

$a_{n+1} = \dfrac{n(n+1)}{2} - a_n$，請選出正確的選項。

(1)若 $a_1 = 1$，則 $a_2 = 1$。

(2)若 a_1 是整數，則此數列每一項都是整數。

(3)若 a_1 是無理數，則此數列每一項都是無理數。

(4) $a_2 \le a_4 \le \cdots \le a_n \le \cdots$

(5)若 a_k 是奇數，則 $a_{k+2}, a_{k+4}, \cdots, a_{k+2n}, \cdots$ 都是奇數

(1) $a_2 = \frac{1\times2}{2} - a_1 = 1-1 = 0$ (×)

(2) $\frac{n(n+1)}{2}$ 為整數，整數±整數為整數 (○)

(3) 整數±無理數為無理數 (○)

(4) $a_{n+2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - a_{n+1}$ …①

$a_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} - a_n$ …②

②代入①得 $a_{n+2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} + a_n$

$\Rightarrow a_{n+2} = (n+1) + a_n$

故 $a_2 \le a_4 \le \cdots$ (○)

(5)若 $a_2 = 1$，則 $a_4 = 3+1 = 4$ (×)

選(2)(3)(4)#

EXAMPLE 7

用觀察下圖 1,2,3 中的火柴棒規律，則(圖 20)需要使用______根火柴棒。

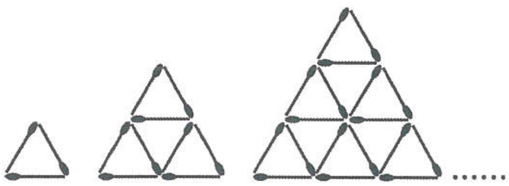


圖 1 圖 2 圖 3

[法一] 找規律

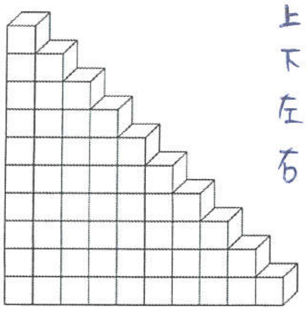
3 → 9 → 18 →, 差 6, 9, 12

$a_{20} = \underbrace{3+6+9+\cdots}_{19項} = \frac{20\times(2\times3+19\times3)}{2} = 630$#

[法二] $a_n = (1+2+\cdots+n)\times3$，$a_{20} = \frac{20\times21}{2}\times3 = 630$#

EXAMPLE 8

將邊長為 1 公分的正立方體堆疊成一階梯形立體，如下圖所示，其中第 1 層（最下層）有 10 塊，第 2 層有 9 塊，…，依此類推。當堆疊完 10 層時，該階梯形立體的表面積（即該立體的前、後、上、下、左、右各表面的面積總和）為多少？



上 10

下 10

左 10

右 10

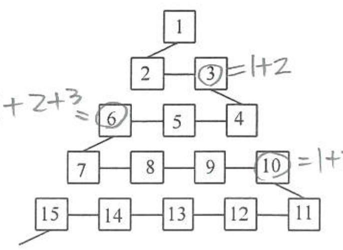
前 $1+2+\cdots+10 = \frac{10\times11}{2} = 55$

後 $1+2+\cdots+10 = 55$

$10+10+10+10+55+55 = 150$#

EXAMPLE 9

下圖是從事網路工作者經常用來解釋網路運作的蛇形模型：數字 1 出現在第 1 列；數字 2,3 出現在第 2 列；數字 6,5,4(從左至右)出現在第 3 列；數字 7,8,9,10 出現在第 4 列；依此類推。試問第 99 列，從左至右算，第 67 個數字為何？



第99列第1個數為 $1+2+\cdots+99 = 4950$

左至右第67個數為 $4950-66 = 4884$#

2. 數學歸納法的證明步驟 ⇒ 使用時機：<u>　對所有正整數，某算式均成立　</u>

(1)當 $n=1$ 時，證原式成立。

(2)設 $n=k$ 時，原式成立。

則 $n=k+1$ 時，證原亦式成立。

(3)由數學歸納法得知，對所有自然數 n，原式皆成立。

EXAMPLE 10

利用數學歸納法證明：對於所有的正整數 n，

$$1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\cdots+n(n+2)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$$

(1) 當 $n=1$ 時，左式 $=1\cdot3$

右式 $=\frac{1}{6}\times1\times2\times9$

左式=右式，原式成立

(2) 設 $n=k$ 時，原式成立，

即 $1\cdot3+2\cdot4+\cdots+k(k+2)=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+7)$

當 $n=k+1$ 時，左式 $=1\cdot3+2\cdot4+\cdots+k(k+2)+(k+1)(k+3)$

$=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+7)+(k+1)(k+3)$

$=\frac{1}{6}(k+1)[(2k^2+7k)+(6k+18)]$

$=\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+13k+18)=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+9)$

右式 $=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2(k+1)+7)$

左式=右式

(3) 由數學歸納法，⋯

EXAMPLE 11

對所有的正整數 n，$a_n=2^{n+2}+7^n$ 恆為一個質數 p 的倍數，試著推測 p 值，並利用數學歸納法驗證。

(1) $n=1$ 時，$a_1=2^3+7^1=15=3\times5$

$n=2$ 時，$a_2=2^4+7^2=65=5\times13$。 預測 $p=5$

(2) 設 $n=k$ 時，a_k 是5的倍數，即 $2^{k+2}+7^k=5t\ (t\in\mathbb{Z})$

當 $n=k+1$ 時，$a_{k+1}=2^{k+3}+7^{k+1}$

$=2\cdot2^{k+2}+7\cdot7^k$

$=2\cdot2^{k+2}+7(5t-2^{k+2})$

$=35t-5\cdot2^{k+2}$

是5的倍數

(3) 由數學歸納法，⋯

EXAMPLE 12

數列 $<a_n>$ 滿足遞迴關係式 $\begin{cases}a_1=\dfrac{1}{2}\\ a_n=\dfrac{1}{2-a_{n-1}}\quad(n\geq2)\end{cases}$，試推測一般項 a_n，並利用數學歸納法驗證。

(1)

$a_1=\frac{1}{2}$

$a_2=\dfrac{1}{2-a_1}=\dfrac{1}{\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{3}$

$a_3=\dfrac{1}{2-a_2}=\dfrac{1}{\frac{4}{3}}=\dfrac{3}{4}$

預測 $a_n=\dfrac{n}{n+1}$

(2) 設 $n=k$ 時，原式成立，

即 $a_k=\dfrac{k}{k+1}$

當 $n=k+1$ 時，$a_{k+1}=\dfrac{1}{2-a_k}=\dfrac{1}{2-\frac{k}{k+1}}$

$=\dfrac{1}{\frac{k+2}{k+1}}=\dfrac{k+1}{k+2}$

(3) 由數學歸納法，⋯