第壹部分、選擇（填）題（占 85 分）

一、單選題（占 30 分）

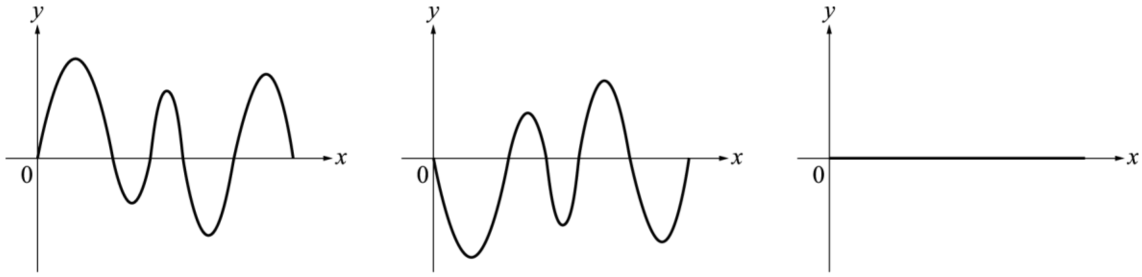
說明：第 1 題至第 6 題，每題 5 分。

1. 下列各選項中的圓方程式，何者與 x、y 軸均相切？
   (1) $x^2+y^2+x+y=1$　(2) $x^2+y^2+x+y=\frac{1}{2}$　(3) $x^2+y^2+x+y=\frac{1}{4}$
   (4) $x^2+y^2+x+y=0$　(5) $x^2+y^2+x+y=-\frac{1}{4}$

2. 一物體從實驗器皿中取出 t 分鐘 $(0\le t\le 10)$ 後，其溫度 T(單位：℃) 滿足關係式：
   $$T=2^{t-2}-2^{3-t}。$$
   試問此物體取出經過多少時間後，物體的溫度為 3.5 ℃？
   (1) 210 秒　(2) 4 分鐘　(3) 270 秒　(4) 5 分鐘　(5) 330 秒

3. 1948 年，美國工程師 Shannon 在貝爾實驗室出版的專門期刊上發表了「通訊的數學理論」，給出了信息度量的數學公式：
   $$C=B\times\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)，$$
   其中 C 為通道最大可能的傳輸速度 (bps)，B 為頻寬 (Hz)，$\frac{S}{N}$ 為訊號雜訊比。依 Shannon 公式，若不改變頻寬 B，而將訊號雜訊比 $\frac{S}{N}$ 從 999 提升至 1999，則 C 大約增加多少百分比？
   (1) 10 ％　(2) 30 ％　(3) 50 ％　(4) 70 ％　(5) 100 ％

4. 主動式抗噪耳機的原理是先用麥克風測量周圍的噪音，再創造一個反向的波來抵消，如下圖的說明。



麥克風測量到的周圍噪音　　反向的噪音　　抵消之後的結果

今有一噪音產生的波為 $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+1$，試問抗噪耳機所創造的反向波為下列哪一個選項？

(1) $y=\sin\left(2x+\dfrac{4}{3}\pi\right)-1$　(2) $y=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)+1$　(3) $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)-1$

(4) $y=\sin\left(2x+\dfrac{2}{3}\pi\right)+1$　(5) $y=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)-1$

5. 一等比數列 $\langle a_n \rangle$ 的首項 $a_1=2023$，公比 $r=-\dfrac{1}{2}$。令 $\prod_n=a_1\times a_2\times\cdots\cdots\times a_n$ 表示首 n 項的乘積，則下列選項中最大的是何者？

(1) $\prod_8$　(2) $\prod_9$　(3) $\prod_{11}$　(4) $\prod_{12}$　(5) $\prod_{13}$

6. 設 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$，試問集合 $\left\{\begin{bmatrix}p & q\\ r & s\end{bmatrix}\middle|\ p、q、r、s \text{ 為 } 0、3、6、9 \text{ 或 } 12\right\}$ 中共有幾個矩陣 B 滿足 $AB=BA$？

(1) 4 個　(2) 5 個　(3) 7 個　(4) 8 個　(5) 10 個

二、多選題（占 30 分）

說明：第 7 題至第 12 題，每題 5 分。

7. $\triangle ABC$ 中，$\overline{BC}=a$、$\overline{AC}=b$、$\overline{AB}=c$。已知 $\angle A>\angle B$ 且 $\angle A\neq 90^\circ$，請選出必定正確的選項。

(1) $\dfrac{\sin A}{a}>\dfrac{\sin B}{b}$

(2) $\dfrac{\sin A}{b}>\dfrac{\sin B}{a}$

(3) $\sin A>\sin B$

(4) $\cos A>\cos B$

(5) $|\tan A|>|\tan B|$

8. 某醫院為篩檢某種疾病，需要檢驗每份血液是否為陽性，現有 n (n 為正整數) 份血液樣本，有以下兩種檢驗方式：

㈠逐一檢驗，則需要檢驗 n 次。

㈡混合檢驗，將 n 份血液樣本分別取樣混合在一起檢驗，若檢驗結果為陰性，則這 n 份血液全為陰性，因而這 n 份血液樣本只要檢驗一次就夠了；但如果檢驗結果為陽性，為了確認這 n 份血液究竟哪幾份為陽性，就要對這 n 份再逐一檢驗，此時這 n 份血液的檢驗次數總共為 $n+1$ 次。

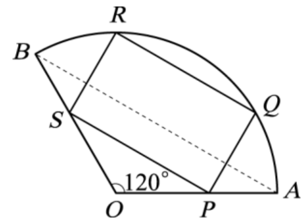
假設在接受檢驗的血液樣本中，每份樣本的檢驗結果是陽性還是陰性都是互相獨立的，且每份樣本是陽性的機率為 p ($0<p<1$)，則下列各選項的 n，p 值中，請選出會使「採用㈠逐一檢驗方式，樣本需要檢驗總次數的期望值」大於「採用㈡混合檢驗方式，樣本需要檢驗總次數的期望值」的選項。

(1) $n=5$，$p=\dfrac{1}{4}$　(2) $n=6$，$p=\dfrac{1}{4}$　(3) $n=7$，$p=\dfrac{1}{4}$　(4) $n=10$，$p=\dfrac{1}{5}$　(5) $n=11$，$p=\dfrac{1}{5}$

參考數值：

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\dfrac{\log n}{n}$	0.1505	0.1590	0.1505	0.1398	0.1297	0.1207	0.1129	0.1060	0.1	0.0947

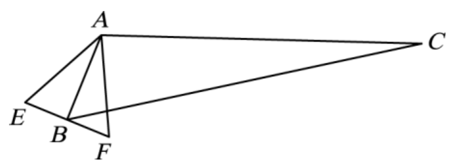
9. 將一塊圓心角為 120°，半徑為 1 公尺的扇形鐵片 OAB 裁出一塊矩形 $PQRS$，其中 P、S 分別在半徑 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$ 上，R、Q 在 AB 上，且矩形的邊 $\overline{RQ}$ 與弦 $\overline{AB}$ 平行，如右圖所示。設 $\angle QOP=\theta\,(0^\circ<\theta<60^\circ)$，請選出正確的選項。



(1) $\overline{RQ}=2\sin(60^\circ-\theta)$
(2) $\angle QPO=120^\circ$
(3) $\overline{PQ}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}\sin\theta$
(4)當矩形 $PQRS$ 為正方形時，$\tan\theta=6-3\sqrt{3}$
(5)矩形 $PQRS$ 的面積最大值為 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 平方公尺

10. 已知三次實係數多項式函數 $y=f(x)$ 的圖形之對稱中心為 $(-1,-2)$，請選出正確敘述的選項。
(1) $f(x)$ 除以 $(x+1)^2$ 的餘式不可能為 $x+1$
(2) $f(x)$ 除以 $(x+1)^2$ 的商式不可能為 $x+1$
(3)函數 $y=f(x)$ 的圖形在 $x=-1$ 附近的近似直線不可能為 $y=3x+1$
(4)函數 $y=f(x)$ 的圖形不可能過點 $(1,-2)$
(5)不等式 $f(x)<0$ 的解不可能為 $x<0$ 且 $x\neq-2$

11. 在△ABC 和△AEF 中，B 為 $\overline{EF}$ 的中點，$\overline{AB}=\overline{EF}=1$，$\overline{BC}=6$，$\overline{CA}=\sqrt{33}$，如右圖所示。若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}=2$，請選出正確的選項。



(1) $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}$
(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1$
(3) $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=2$
(4) $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BC}=4$
(5)以 $\overrightarrow{EF}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 為邊所形成的三角形面積為 $2\sqrt{5}$

12. 某校運動會的立定跳遠和 30 秒跳繩兩個單項比賽分成預賽和決賽兩個階段。下表為 10 名學生的預賽成績，其中有三個數據模糊不清 (如表中的 x、y、z)。

學生	甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛	壬	癸
立定跳遠 (單位：公尺)	1.96	1.92	1.82	1.8	1.78	1.76	1.76	1.72	1.68	1.6
30 秒跳繩 (單位：次)	63	x	75	60	63	72	70	y	z	65

已知這 10 名學生中，進入立定跳遠及 30 秒跳繩決賽的均有 8 人，同時進入兩種決賽的共有 6 人，若 x、y、z 均為正整數且 $y=x-1$，請選出正確的選項。

⑴戊一定有進入 30 秒跳繩決賽

⑵ x 的值可能為 60

⑶乙一定有進入 30 秒跳繩決賽

⑷壬一定有進入 30 秒跳繩決賽

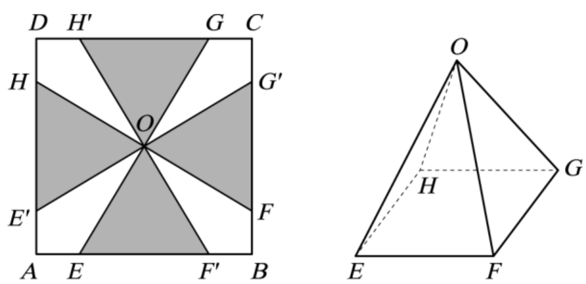
⑸ z 的值一定 ≥ 60

(註：若兩人跳繩成績相同，則兩人一起進入決賽或一起都沒進入決賽)

三、選填題（占 25 分）

說明：第 13 題至第 17 題，每題 5 分。

13. 如下圖所示，將一塊邊長為 10 的正方形 $ABCD$ (中心點為 O) 剪去四個全等的四邊形 $OEAE'$、$OFBF'$、$OGCG'$、$OHDH'$ (其中 $\overline{AE}=\overline{AE'}=\overline{BF}=\overline{BF'}=\overline{CG}=\overline{CG'}=\overline{DH}=\overline{DH'}=2$) 後，將剩下的部分 (即圖㈠中的陰影部分) 折成一個四角錐 $O-EFGH$，其中點 E、E' 重合於點 E，點 F、F' 重合於點 F，G、G' 重合於點 G，點 H、H' 重合於點 H，如圖㈡所示。



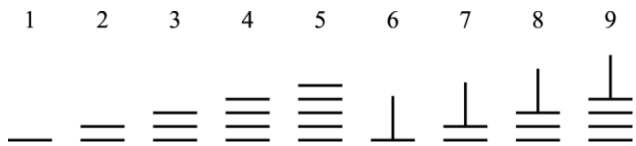
圖㈠　圖㈡

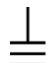
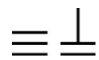
試求四角錐 $O-EFGH$ 的體積為 ⑬-1 ⑬-2 。$\left(\text{註：角錐體積}=\frac{1}{3}\times\text{底面積}\times\text{高}\right)$

14. 設 k 為實數，若方程式 $|x-1|+|x-k|=2$ 有實數解，則 k 值的範圍為

　14-1 14-2 $\leq k \leq$ 14-3　。

15. 中國在古代曾經有過以一根根同長短的小木棍作為計算數字的工具，下圖是數字 1～9 的排列方式：



例如：8 可以用四根小木棍排成「」表示，37 可以用六根小木棍排成「」表示。

現有六根小木棍，六根均使用共可排列成　15-1 15-2　個不同的「二位數」。

16. 設二元一次聯立不等式 $\begin{cases} x \geq 1 \\ x-2y+3 \geq 0 \\ y \geq x \end{cases}$ 在平面上所表示的區域為 Ω_1，而二階方陣 $\begin{bmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

所表示的線性變換將區域 Ω_1 映射至區域 Ω_2。若點 A、B 分別為區域 Ω_1、Ω_2 中的任意點，

試求 $\overline{AB}$ 長的最小值為　$\dfrac{\text{16-1}\sqrt{\text{16-2}}}{\text{16-3}}$　。(化為最簡根式)

17. <u>書豪</u>於今年初加入 PLG 職業籃球聯盟「高雄 17 直播鋼鐵人」隊，在<u>臺灣</u>掀起一陣籃球旋風。已知<u>書豪</u>每場比賽罰球時，若他前一次罰球投進，則後一球罰進的機率為 $\frac{4}{5}$；若他前一次罰球投不進，則後一球罰進的機率為 $\frac{2}{3}$，且每場比賽第一次罰球投進的機率為 $\frac{1}{2}$。今某場比賽<u>書豪</u>共有 4 次的罰球機會，已知他前 3 球恰有 2 球罰球進球的條件下，試問<u>書豪</u>第 4 次罰球進球的條件機率為 $\frac{\text{17-1}\ \text{17-2}}{\text{17-3}\ \text{17-4}}$。(化為最簡分數)

第貳部分、混合題或非選擇題（占 15 分）

說明：本部分共有 1 題組，多選題每題 6 分，非選擇題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

<u>18-19 題為題組</u>

空間中四個相異點 $A(0,0,16)$，$B(0,0,1)$，$C(7,1,4)$，$D(-1,7,4)$。已知直線 $\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{CD}$ 均與平面 Ω 平行且兩直線在平面 Ω 的異側，若 A 點到平面 Ω 的距離為 3，試回答下列問題。

18. 請選出正確的選項。(多選題，6 分)

(1) A、B、C、D 四點不在同一平面上

(2)向量 $\overrightarrow{AB}$ 垂直 $\overrightarrow{CD}$

(3) C 點到平面 Ω 的距離為 1

(4)平面 Ω 的方程式為 $3x+4y=15$

(5)四面體 $ABCD$ 的體積為 100

19. 設直線 $\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{BD}$ 分別與平面 Ω 交於 P、Q、S、R，試求四邊形 $PQRS$ 的面積。(非選擇題，9 分)

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{n[2a+(n-1)d]}{2}$

   首項為 a，公比為 r $(r\neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角函數的和(差)角公式：$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

   $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$

   $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

   $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$

   $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

   $\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$

3. $\triangle ABC$ 的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ (R 為$\triangle ABC$ 外接圓半徑)

   $\triangle ABC$ 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

4. 一維數據 X：x_1，x_2，……，x_n，

   算術平均數 $\mu_X=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)$

   標準差 $\sigma_X=\sqrt{\dfrac{1}{n}[(x_1-\mu_X)^2+(x_2-\mu_X)^2+\cdots\cdots+(x_n-\mu_X)^2]}$

   $=\sqrt{\dfrac{1}{n}[(x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2)-n\mu_X^2]}$

5. 二維數據 (X, Y)：(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，……，(x_n, y_n)，

   相關係數 $r_{X,Y}=\dfrac{(x_1-\mu_X)(y_1-\mu_Y)+(x_2-\mu_X)(y_2-\mu_Y)+\cdots\cdots+(x_n-\mu_X)(y_n-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

   迴歸直線 (最適合直線)方程式為 $y-\mu_Y=r_{X,Y}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$

6. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414$，$\sqrt{3}\approx 1.732$，$\sqrt{5}\approx 2.236$，$\sqrt{6}\approx 2.449$，$\pi\approx 3.142$
7. 對數值：$\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$，$\log 5\approx 0.6990$，$\log 7\approx 0.8451$