

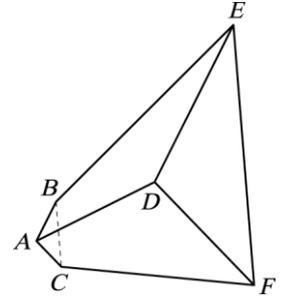
第壹部分、選擇（填）題（占 85 分）

一、單選題（占 35 分）

說明：第 1 題至第 7 題，每題 5 分。

1. 設三個多項式 $(x^3-2)^6$ 、 $(2x^2+3x)^4$ 、 $(3x^2-11)^3$ 除以 $x-3$ 的餘式依序為 a 、 b 、 c ，則下列何者是正確的？
(1) $a < b < c$ (2) $a < c < b$ (3) $c < a < b$ (4) $b < c < a$ (5) $c < b < a$
2. 設 $a > 0$ ，若 $\log a = 30 + \log 3$ ，則 $a \times 2^{30}$ 的整數部分是幾位數？
(1) 38 位數 (2) 39 位數 (3) 40 位數 (4) 41 位數 (5) 42 位數
3. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 的前 n 項和為 $S_n = 2n^2 - 17n$ ，數列 $\langle b_n \rangle$ 的一般項為 b_n ，且 $b_n = 2^{a_n}$ 。若 $\langle b_n \rangle$ 的前 k 項之乘積大於 1，則最小正整數 k 的值為何？
(1) 6 (2) 7 (3) 8 (4) 9 (5) 10

4. 阿昌根據單點透視原理描繪出一個三角柱體，如右圖，已知直線 AD 、 BE 、 CF 會相交於同一點 $V(\alpha, \beta)$ 。若 $A(-1, 3)$ ， $B(0, 5)$ ， $D(5, 6)$ ， $E(9, 14)$ ，則 $\alpha + \beta$ 的值為何？
(1) -2 (2) -1 (3) 0 (4) 1 (5) 2



5. 某地區的人口數從 2019 年開始明顯減少，主要原因是人口外移和少子化，2021 年時的人口數約為 3000 人，2023 年時的人口數約為 2000 人。若用函數 $f(x) = a - b \log_2(x - 2019)$ 評估該區近幾年的人口數，其中 $f(x)$ 為人口數(單位：人)， x 是西元年，試推算此地區在西元幾年時的人口數會開始少於 1500 人？
(1) 2024 年 (2) 2025 年 (3) 2026 年 (4) 2027 年 (5) 2028 年
6. 在空間中，已知 O 為原點， $A(4, 0, 0)$ ， $B(0, 4, 0)$ ， $C(0, 0, 8)$ ，若平面 ABC 和平面 OAB 所成的兩面角為 θ ， $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ，則 θ 的度數為何？
(1) 小於 30° (2) 30° (3) 45° (4) 60° (5) 大於 60°
7. 小傑和家人共 6 人一起到外地旅遊，預訂了某家旅館的 3 間住宿房間，其中 A 房可住 1~3 人，B、C 兩房皆可住 1~2 人，則這 6 人分配房間的方式共有幾種？
(1) 210 種 (2) 220 種 (3) 230 種 (4) 240 種 (5) 250 種

二、多選題 (占 25 分)

說明：第 8 題至第 12 題，每題 5 分。

8. 某校科學社的社員來自高一、二兩年級，男、女學生人數如右表。語言社的社員也是只有高一、二兩年級。設 A 為從語言社社員中抽中高一學生的事件， B 為從語言社社員中抽中男生的事件，機率 $P(A) = \frac{2}{5}$ ， $P(B) = \frac{1}{3}$ ，試選出正確的選項。

年級 性別	高一	高二
男生	50	70
女生	40	80

科學社社員列聯表

- (1) 從科學社社員中任取一人，則抽中高一學生的機率為 $\frac{3}{8}$
- (2) 從科學社社員中任取一人，已知抽中的是高一學生的條件下，則抽中女生的機率為 $\frac{1}{3}$
- (3) 從科學社社員中任取一人，已知抽中的是男生的條件下，則抽中高二學生的機率為 $\frac{7}{24}$
- (4) 設 A, B 為獨立事件，從語言社社員中任取一人，則抽中高一女生的機率為 $\frac{2}{15}$
- (5) 設 A, B 為獨立事件，從語言社社員中任取一人，則抽中高二學生或是女生的機率為 $\frac{13}{15}$

9. 阿佑統計 100 位職棒選手上場的打擊次數 (x) 與上壘次數 (y)，資料如下：

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{100} = 500, \quad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{100}^2 = 3400, \quad y_1 + y_2 + \cdots + y_{100} = 300,$$

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{100}^2 = 2500, \quad x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_{100} y_{100} = k, \quad \text{打擊次數 } (x) \text{ 和上壘次數 } (y)$$

的相關係數為 $r = \frac{1}{2}$ ，上壘次數 (y) 對打擊次數 (x) 的最適合直線方程式為 $L: y = ax + b$ ，試

選出正確的選項。

- (1) $5a + b = 3$
- (2) 打擊次數的標準差 σ_x 大於上壘次數的標準差 σ_y
- (3) $k > 2000$
- (4) $a > \frac{1}{2}$
- (5) $b < -\frac{1}{2}$

10. 一袋中共有 12 顆球，其中 1、2、3、4、5、6 號球各有兩顆，設每顆球被取到的機會均等，已知東東從此袋中一次取出兩球，試選出正確的選項。

(1) 東東 取到 1、2 號球各一顆的機率為 $\frac{1}{33}$

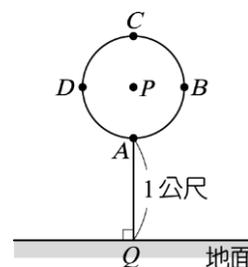
(2) 東東 取到的兩球號碼不同的機率為 $\frac{10}{11}$

(3) 東東 取到的兩球號碼總和小於 6 的機率為 $\frac{3}{22}$

(4) 已知東東 取到的兩球號碼不同，則這兩球號碼總和小於 6 的機率為 $\frac{4}{15}$

(5) 若取到 n 號球可得獎金 n 元，另外當兩球的號碼相同時獎金加倍，例如：取到 1、3 號可得 $1+3=4$ 元，取到 5、5 號可得 $(5+5)\times 2=20$ 元，則東東 一次取出兩球可得獎金的期望值大於 8 元

11. 如右圖，小宜 進行一個實驗，將一個圓心為 P 點、半徑為 0.5 公尺的圓形滾輪，架在一個 1.5 公尺的立架 PQ 上， PQ 垂直於地面，且滾輪最低點 A 離地面 1 公尺。已知滾輪每隔 1 分鐘均勻旋轉 1 圈，小宜 在 A 點上作記號並開始計時，在逆時針旋轉 15 秒後（轉了 $\frac{1}{4}$ 圈）記號到達 B 點；



30 秒後（轉了 $\frac{1}{2}$ 圈）記號到達 C 點（最高點）。設該記號在 t 秒時所在的高

度為 y 公尺，以函數 $y=f(t)=a \sin (bt+c)+d$ 表示，其中 $a>0, b>0, d>0, -\pi<c<\pi$ ，試選出正確的選項。

(1) $y=f(t)$ 圖形的振幅為 0.5 公尺

(2) $d=0.5$

(3) $b=\frac{\pi}{15}$

(4) $c=-\frac{\pi}{2}$

(5) $f(40)=\frac{7}{4}$ (公尺)

12. 在坐標平面上，已知 $\Gamma: x^2 + y^2 - 4x - 2y + f = 0$ 為正三角形 ABC 之內切圓，其中 f 為實數，設 A 點在第一象限， Γ 和 \overline{AB} 相切於點 $P(5, -3)$ ，試選出正確的選項。

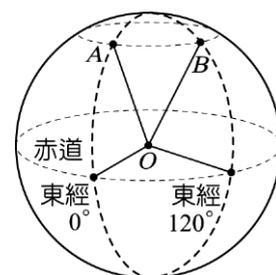
- (1) $f=20$
- (2) \overline{AP} 的長為 $5\sqrt{3}$
- (3) A 點的 x 坐標為 $5 + 4\sqrt{3}$
- (4) B 點的 y 坐標為 $-3 - 4\sqrt{3}$
- (5) C 點的 x 、 y 坐標乘積為 -36

三、選填題 (占 25 分)

說明：第 13 題至第 17 題，每題 5 分。

13. 在球心為 O 的球形地球儀上， A 、 B 兩點都在北緯 60° 線上，且經度依

序為東經 0° 、 120° ，如右圖，則 $\cos \angle AOB$ 的值為 $\frac{\textcircled{13-1}}{\textcircled{13-2}}$ 。(化為最簡分數)



14. 坐標平面上，已知 $y=f(x)$ 為三次多項式函數， $f(2)=0$ ， $f(3)=4$ 且對稱中心為 $(1, 2)$ 。設 $g(x)=2f(x)+1$ ，且 $y=g(x)$ 在 $x=1$ 附近的一次近似函數為 $h(x)=px+q$ ，則實數數對

$(p, q) = \underline{\textcircled{14-1} \textcircled{14-2}, \textcircled{14-3} \textcircled{14-4}}$ 。

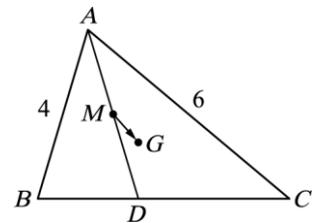
15. 某地區有三家便利商店 A、B、C，已知 B 在 A 的正東方，C 在 A 的東 45° 北處，A、C 相距 $\sqrt{6}$ 公里，B、C 相距 2 公里，其中 $2\angle A < \angle B < \pi$ 。若 $\angle B = \alpha$ 弧度，且 A、B 相距 β 公里，

則數對 $(\alpha, \beta) = \left(\frac{\textcircled{15-1}\pi}{\textcircled{15-2}}, \sqrt{\textcircled{15-3} - \textcircled{15-4}} \right)$ 。(化為最簡分數)

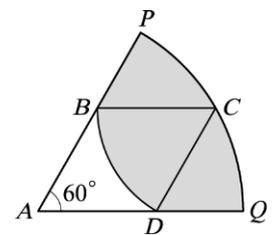
16. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{AC} = 6$ ，G 為 $\triangle ABC$ 之重心， \overline{AD} 平分 $\angle BAC$ ，D 在 \overline{BC} 上，M 為 \overline{AD} 之中點。若

$\overrightarrow{MG} = r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$ ，則實數數對 $(r, s) =$

$\left(\frac{\textcircled{16-1}}{\textcircled{16-2}\textcircled{16-3}}, \frac{\textcircled{16-4}}{\textcircled{16-5}\textcircled{16-6}} \right)$ 。(化為最簡分數)



17. 如右圖，扇形 PAQ 中，圓心角 $\angle A = 60^\circ$ ，半徑 $\overline{AP} = \overline{AQ} = 6$ 公分， $\overline{BC} \parallel \overline{AQ}$ 且 $\overline{CD} \parallel \overline{AP}$ ，其中 B、C、D 分別在 \overline{AP} 、 \widehat{PQ} 、 \overline{AQ} 上，以 C 為圓心， \overline{BC} 為半徑畫出 \widehat{BD} ，則由 \overline{BP} 、 \widehat{PCQ} 、 \overline{DQ} 、 \widehat{BD} 所圍的區域面積為 $\textcircled{17-1}\pi - \textcircled{17-2}\sqrt{\textcircled{17-3}}$ 平方公分。(化為最簡根式)



第貳部分、混合題或非選擇題（占 15 分）

說明：本部分共有 1 題組，多選題每題 3 分，非選擇題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

18-20 題為題組

設二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & -1 \end{bmatrix}$ ，其中 a 、 b 皆為實數，試回答下列問題。

18. 試選出正確的選項。(多選題，3 分)

- (1) $A^2 = B^2$
- (2) $A^3 = B^3$
- (3) $AB = BA$
- (4) $A^{-1} = A$
- (5) $B^{-1} = B^{10}$

19. 已知 $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $(A + I_2)^3 = mA + nI_2$ ，其中 m 、 n 為實數，則數對 $(m, n) = ?$ (非選擇題，6 分)

20. 設 n 為正整數， X_n 為二階方陣，滿足 $A^n X_n = B$ ，則 $X_n = ?$ (非選擇題，6 分)

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n[2a + (n-1)d]}{2}$

首項為 a ，公比為 $r (r \neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

3. 一維數據 $X : x_1, x_2, \dots, x_n$,

算術平均數 $\mu_x = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$

標準差 $\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1 - \mu_x)^2 + (x_2 - \mu_x)^2 + \dots + (x_n - \mu_x)^2]}$

$$= \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - n\mu_x^2]}$$

4. 二維數據 $(X, Y) : (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$,

相關係數 $r_{X,Y} = \frac{(x_1 - \mu_x)(y_1 - \mu_y) + (x_2 - \mu_x)(y_2 - \mu_y) + \dots + (x_n - \mu_x)(y_n - \mu_y)}{n\sigma_x\sigma_y}$

迴歸直線 (最適合直線) 方程式為 $y - \mu_y = r_{X,Y} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \mu_x)$

5. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$ ， $10^{0.03} \approx 1.07$

6. 對數值： $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ， $\log 5 \approx 0.6990$ ， $\log 7 \approx 0.8451$