1. $b_1+b_2+\cdots+b_{20}=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_{21}-a_{20})=a_{21}-a_1=39-3=36$

$$a_n=\begin{cases}S_n-S_{n-1}, & n\geq 2\\ S_1, & n=1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}n^2-2n+4-\left[(n-1)^2-2(n-1)+4\right]=2n-1-2=2n-3, & n\geq 2\\ 1-2+4=3, & n=1\end{cases}$$

選(4)#

2. 理賠期望值 $=20000\times 20\%+50000\times 5\%=6500$

利潤 = 收入 − 支出 $=10000-6500=3500$

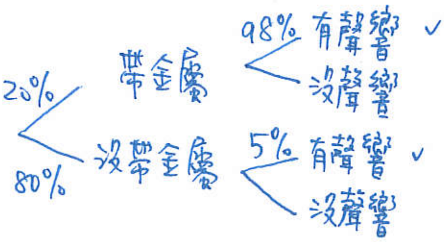
選(3)#

3.
$f(a)=a-2=-2a+3$, $a=\frac{5}{3}$

$f(b)=b-2=2b+1$, $b=-3$

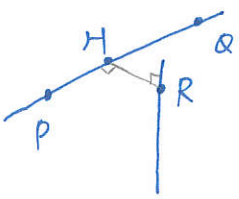
$f(c)=2c+1=-2c+3$, $c=\frac{1}{2}$　　$a>c>b$

選(5)#

4.


$$P=\frac{20\%\cdot 98\%}{20\%\cdot 98\%+80\%\cdot 5\%}=\frac{196}{196+40}=\frac{49}{59}$$

選(1)#

5.


$\overline{PQ}$、$\overline{BF}$ 為二歪斜線.

$\triangle PQR$ 面積 $=\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times$ 高.

當高為兩歪斜線距離時, $\triangle PQR$ 有最小值.

亦即 $\overline{RH}$ 為二歪斜線之公垂線段

$\boxed{\text{※ 此題題目需假設 } D(0,0,0),\ A(8,0,0),\ C(0,8,0),\ H(0,0,8) \text{ 方可解題}}$

$P(8,0,6)$, $\underbrace{Q(1,8,8)}$, $R(8,8,r)$, $\underbrace{\text{設 } H(8-7t,8t,6+2t)}$

$\overrightarrow{PQ}=(-7,8,2)$　　$\overrightarrow{RH}=(-7t,8t-8,2t-r+6)$

$\overrightarrow{RH}\cdot\overrightarrow{PQ}=0\Rightarrow 49t+64t-64+4t-2r+12=0$

$\overrightarrow{RH}\cdot\overrightarrow{BF}=0\Rightarrow 2t-r+6=0$

$\overrightarrow{BF}$: $(0,0,1)$

$$\Rightarrow\begin{cases}117t-2r=52\\ 2t-r=-6\end{cases}$$

$\therefore\ 334t-4r=104$ $\quad\therefore\ 113r=806$

$334t-117r=-702$ $\quad r=\dfrac{806}{113}$

選(2)#

6. M^{-1}存在，$\det M\neq 0$，$-2(a+3)-(x-a)(x+3)\neq 0$

$\Rightarrow -2a-6-(x^2+(3-a)x-3a)\neq 0$，$x^2+(3-a)x+(6-a)\neq 0$ 恆成立

即 $x^2+(3-a)x+(6-a)$ 恆正，$(3-a)^2-4\cdot 1\cdot(6-a)<0$

$a^2-6a+9+4a-24<0$，$a^2-2a-15<0$，$-3<a<5$

$a=-2,-1,0,1,2,3,4$，共7個． 選(4)#

7.

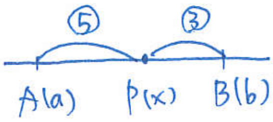
$y=ax^2+bx+c$
- a：開口
- b：y截距的切線斜率
- c：y截距

	$\therefore$	真實
a	$a<0$	$a>0$
b	$b>0$	$b<0$
c	$c>0$	$c>0$

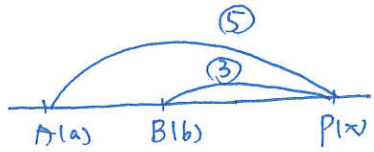
$y=ax^3+bx+c$：中心$(0,c)$，$a>0$ 右上

↑ y軸上方 $\quad ab<0$ 有波峰波谷． 選(5)#

8. case 1：



case 2：



(1) $\overline{PA}=|x-a|$，$\overline{PB}=|x-b|$ $\therefore\ 5\overline{PB}=3\overline{PA}$，$5|x-b|=3|x-a|$ (x)

(2) case 2，P在 $\overline{AB}$ 外 (x)

(3) 由 case 1, 2 知 有兩種可能 (x)

(4) $x<b$，僅符合 case 1，$a=12-\dfrac{24-12}{3}\times 5=-8$ (o)

(5) 由 case 1, 2 知 正確 (o)

選(4)(5)#

9. (1) $\vec{u}\parallel\vec{v}\Rightarrow \dfrac{1}{1+4k}=\dfrac{-1}{2+3k}$，$2+3k=-1-4k$，$7k=-3$，$k=\dfrac{-3}{7}$ (x)

(2) $\vec{u}\perp\vec{v}\Rightarrow(1,-1)\cdot(1+4k,2+3k)=0$，$1+4k-2-3k=0$，$k=1$ (o)

(3) $\vec{u}\cdot\vec{v}=4$, $k-1=4$, $k=5$ (o)

(4) $\vec{u}\cdot\vec{v}=3\sqrt{3}$, $k-1=3\sqrt{3}$, $k=1+3\sqrt{3}=1+\sqrt{27}>5$ (x)

(5) 正射影 $=\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\cdot\vec{u}=(3,-3)$, 即 $\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|^2}=3$, $\dfrac{k-1}{2}=3$, $k=7$ (x)

選 (2)(3) #

10. (1) $\mu_x=\dfrac{9+11+12+13+15}{5}=12$ (o)

(2) $\mu_y=43+\dfrac{(-1)+(-3)+1+0+3}{5}=43$ (o)

(3)

$x-\mu_x$	-3	-1	0	1	3
$y-\mu_y$	-1	-3	1	0	3

$r=\dfrac{3+3+0+0+9}{\sqrt{9+1+0+1+9}\sqrt{1+9+1+0+9}}=\dfrac{15}{20}=\dfrac{3}{4}$ (x)

(4) ① 點 $(\mu_x,\mu_y)=(12,43)$

② $m=r\cdot\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{\sqrt{\dfrac{9+1+0+1+9}{5}}}{\sqrt{\dfrac{1+9+1+0+9}{5}}}=\dfrac{3}{4}$, 斜率不同 (x)

(5) 迴歸線: $y-43=\dfrac{3}{4}(x-12)$

$x=8$ 代入得 $y=43+\dfrac{3}{4}\times(-4)=40$ (o)

選 (1)(2)(5) #

11.

$f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+45^\circ)$

$g(x)=\sin x\cdot\cos x=\dfrac{1}{2}\cdot\sin 2x$

$h(x)=f(x)+g(x)=\sin x+\cos x+\sin x\cdot\cos x=\dfrac{t^2}{2}+t-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}(t+1)^2-1$

(令 $t=\sin x+\cos x$, 其中 $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$.
則 $t^2=1+2\sin x\cdot\cos x$, $\sin x\cdot\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$)

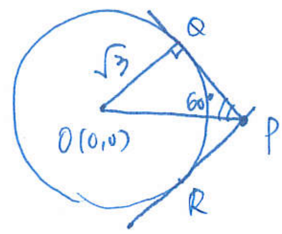
(1) $f(x)$ 週期為 2π (x)　(2) $g(x)$ 週期為 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$ (o)

(3) $f(x)$ 最小值為 $\sqrt{2}\times(-1)=-\sqrt{2}$ (o)　(4) $g(x)$ 的最小值為 $\dfrac{1}{2}\times(-1)=-\dfrac{1}{2}$ (x)

(5) $h(x)$ 最小值為 -1 (x)

選 (2)(3) #

12.

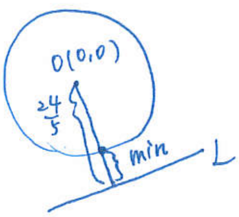


(1) ∵ $r=\overline{OQ}=\sqrt{3}$，又 $\triangle OQP$ 是 $30°-60°-90°$ 的三角形

∴ $\overline{OP}=2$，故 P 可能為 $(-2,0)$ (○)

(2) 切線段長 $\overline{QP}=1$ (×)

(3) 由(1)知 $\overline{OP}=2$，即 $\sqrt{x^2+y^2}=2$，$x^2+y^2=4$ (○)

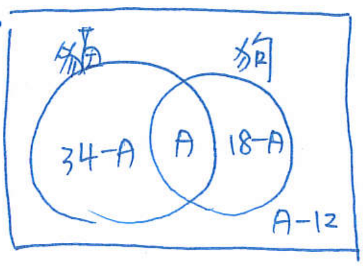


(4) $d(O,L)=\dfrac{|0+0-24|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{24}{5}$，由圖知 $\min=\dfrac{24}{5}-2=\dfrac{14}{5}$ (×)

(5) OQPR 面積 $=2\times\triangle OPQ$ 面積 $=2\times\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$ (○)

選 (1)(3)(5)

13.



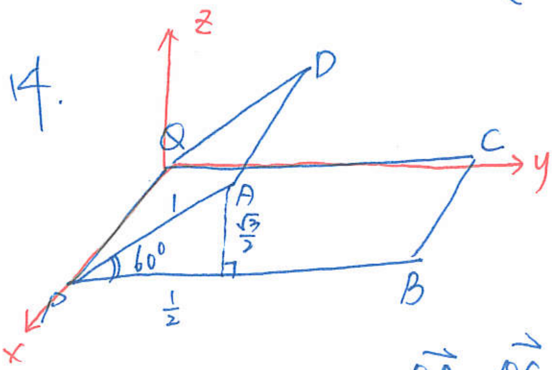
$$\begin{cases} A\geq 0 \\ 18-A\geq 0 \\ 34-A\geq 0 \\ A-12\geq 0 \end{cases} \Rightarrow 12\leq A\leq 18$$

$B=34-A \Rightarrow 16\leq B\leq 22$

$C=18-A \Rightarrow 0\leq C\leq 6$

∴ $(x,y,z)=(18,22,6)$

14.



坐標化.

設 $O(0,0,0)$, $P(1,0,0)$, $C(0,2,0)$

則 $A(1,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$

$$\cos\angle AOC=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}|}=\frac{(1,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})\cdot(0,2,0)}{\sqrt{2}\times 2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

15.

$$256\times\left(\frac{1000}{1024}\right)^3 \text{ GiB}=\frac{2^8\times10^9}{2^{30}}=\frac{10^9}{2^{22}}=\frac{10^9}{(10^{0.301})^{22}}=\frac{10^9}{10^{6.622}}=\frac{10^3}{10^{0.622}}$$

$$\approx\frac{10^3}{10^{\log 4.19}}=\frac{1000}{4.19}\approx 238.6\cdots\approx 239$$

16.

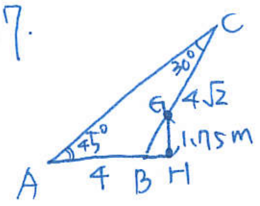
$$\underset{0827}{C^4_2}\ \underset{其餘}{C^6_2}\times(4!-\underset{1B放回原位}{C^2_1\times 3!}+\underset{2B放回原位}{C^2_2\times 2!})$$

$n(S)=C^4_2\,C^6_2\times(4!-C^2_1\times 3!+C^2_2\times 2!)=6\times 15\times(24-12+2)=1260$

$n(A)=1$

$P=\dfrac{1}{1260}$ #

17.



$\triangle ABC$ 中，$\dfrac{4}{\sin 30^\circ}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sin A}$，$\sin A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\angle A=45^\circ$ or 135°

(不合，$\angle A$ 為銳角)

$\therefore \angle ABC=105^\circ$，$\dfrac{\overline{AC}}{\sin B}=\dfrac{4}{\sin 30^\circ}$，$\overline{AC}=4\times 2\times\sin 105^\circ=2(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

$\triangle ACD$ 為 $45^\circ-45^\circ-90^\circ$ $\therefore \overline{AD}=\overline{CD}=\dfrac{2(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}=2(\sqrt{3}+1)$

可省略

設 $\overline{GH}=1.75$ m 為龍龍走到會感應發亮的位置

$\Rightarrow \dfrac{1.75}{\overline{BH}}=\tan 75^\circ$，$\overline{BH}=\dfrac{1.75}{2+\sqrt{3}}=\dfrac{7}{4}(2-\sqrt{3})\approx 0.469$

$\therefore$ 走了 $\overline{EH}=5-0.469=4.531\approx 4.53$ #

18.

(1) 衰減 10%，即變為原本的 90%

10年是 $\frac{10}{3}$ 個 3年，即變為原本的 $(90\%)^{\frac{10}{3}}$，選(4) #

(2) x 年是 $\frac{x}{3}$ 個 3年，即變為原本的 $(90\%)^{\frac{x}{3}}$

$Q(x)=A\cdot(0.9)^{\frac{x}{3}}$ #

(3) 承(2)，$\cancel{A}\cdot(0.9)^{\frac{x}{3}}=\cancel{A}\cdot 0.1$

$\Rightarrow (10^{\log 0.9})^{\frac{x}{3}}=10^{\log 0.1}$ $\Rightarrow \dfrac{x}{3}\cdot\log\dfrac{9}{10}=\log\dfrac{1}{10}$

$\Rightarrow \dfrac{x}{3}(0.9542-1)=-1$，$x=\dfrac{3}{0.0458}\approx 65.\cdots$

至少 66 年 #