高三彈性數學

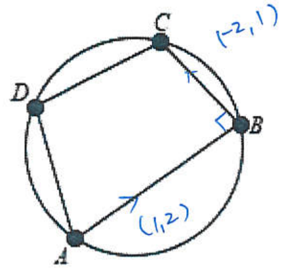
班級:　　　　　　　座號:　　　　　　　姓名:

第 1 至 3 題為題組

已知有一個圓形的湖泊，A,B,C,D 在圓上，寒暑假期間旅遊公司推出了遊湖行程，期規劃的路徑是船從 A 出發，

沿著向量 $\overrightarrow{v}=(1,2)$ 前進 300 公尺到達休息站

B，再沿著 $\overrightarrow{u}=(-2,1)$ 前進 200 公尺到達休息站 C，接著再從休息站 C 沿著直線前進到最後一個休息站 D，最後再沿著直線前進返回一開始出發地 A。



1. 試問這個湖的直徑為何？

   (1)$100\sqrt{11}$　(2)$100\sqrt{13}$　(3)$100\sqrt{15}$　(4)$100\sqrt{17}$　(5)$100\sqrt{19}$

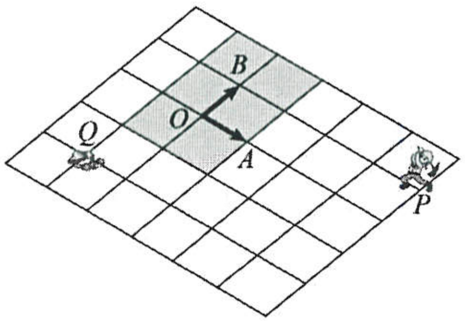
2. ΔACD 面積的最大值為何？

3. $\overline{AD}+\overline{CD}$ 的最大值為何？

題號	作　答　區
1	1　2　3　4　5　6　7　8　9　0　－　±
2	1. $\because \vec{u}\cdot\vec{v}=0$　$\therefore \overline{AC}$ 為直徑 $\overline{AC}=\sqrt{300^2+200^2}=100\sqrt{13}$，選(2) 2. $\because \angle B=90^\circ$　$\therefore \angle D=90^\circ$ 設 $\overline{AD}=x$，$\overline{CD}=y$，$x^2+y^2=(100\sqrt{13})^2$ 求 $\frac{1}{2}\cdot x\cdot y$ 之 Max $\frac{x^2+y^2}{2}\geq\sqrt{x^2 y^2}=xy$，$\frac{1}{2}\cdot xy\leq\frac{1}{4}\cdot 130000$ $=32500$
3	3. $(x^2+y^2)(1^2+1^2)\geq(x+y)^2$ $130000\times 2\geq(x+y)^2$ $\therefore x+y\leq 100\sqrt{26}$ 答案：(2)　32500　100(26)^.5

第 4 至 6 題為題組

偽三維（又稱為 **2.5D**、**假 3D**）是一種應用在二維畫面中的技術，使得圖像或場景有三維的視覺效果。全平面的地圖是從上往下俯視景物與操作人物，市面上有許多電玩遊戲是採斜角的方向來觀看景物，這種方式可以製作出類似 3D 的畫面，而使用的貼圖技巧卻只有 2D 而已，而且效果並不差，如圖是一斜角地圖的範例：

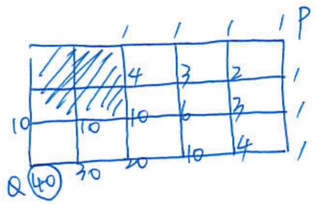


已知每個小平行四邊形均全等，令圖中 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{b}$，試回答下列問題。

4. 已知圖中鋪色的樹林區表示 K 點所形成的區域（含邊界），且滿足 $\overrightarrow{OK}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$，下列哪個選項為係數 x、y 的範圍？（單選題）
   (1) $0\le x\le 2$，$0\le y\le 2$　(2) $0\le x\le 3$，$0\le y\le 3$
   (3) $-1\le x\le 2$，$-1\le y\le 2$　(4) $-1\le x\le 1$，$-1\le y\le 2$
   (5) $-1\le x\le 2$，$-1\le y\le 1$

5. 已知金礦與礦工分別在圖中的 Q 點與 P 點，滿足 $\overrightarrow{PQ}=m\overrightarrow{a}+n\overrightarrow{b}$，則數對 $(m,n)=$＿＿＿＿＿＿。（非選擇題）

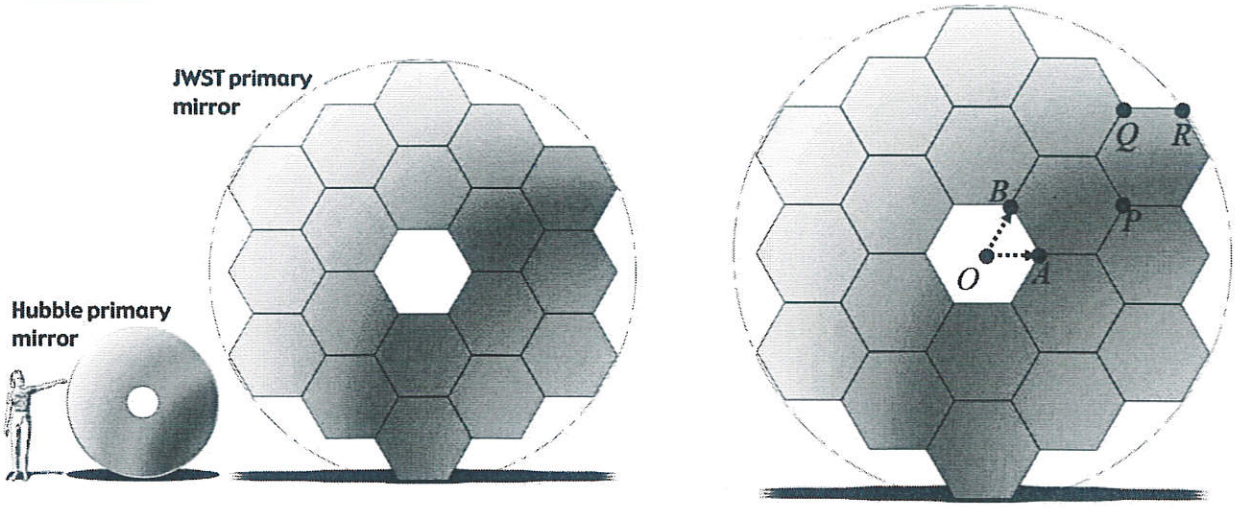
6. 承上題，設 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 的長度相等，若礦工沿著格線走捷徑到金礦處採礦，但不能穿越鋪色的樹林區（可以沿著樹林區的邊緣行走），則從 P 到 Q 共有幾種走法？（非選擇題）

題號	作　答　區
4	1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 − ±
5	4, $-1\le x\le 1$, $-1\le y\le 2$, 選(4) 5. $\overrightarrow{OP}=4\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ ⇒ $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$ $\overrightarrow{OQ}=-1\cdot\overrightarrow{OA}+(-2)\cdot\overrightarrow{OB}$ $=-5\cdot\overrightarrow{OA}+(-3)\cdot\overrightarrow{OB}$ 6.  40種.
6	答案: (4)　(-5,-3)　40 種

補充試題

第 7 至 9 題為題組

下圖為詹姆斯韋伯太空望遠鏡的主鏡平面圖，這完全密合的平面圖是由 18 片正六邊形組成，最外圍的圓剛好通過離中心點最遠的頂點。



在上圖中，標示中心點 O 及一些頂點 A,B,P,Q,R，並令正六邊形邊長為 1，向量 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA}$ 及向量 $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{OB}$，試回答下列問題。

7. 試求 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 的值。
8. 試求線段 OQ 的長度。
9. 試求最外圍的圓之半徑。

答案： 1/2 13^.5 19^.5

7. $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\frac{1}{2}$

8. $\overrightarrow{OQ}=3\vec{b}+\vec{a}$

$|\overrightarrow{OQ}|=|\vec{a}+3\vec{b}|$

$=\sqrt{|\vec{a}|^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2}$

$=\sqrt{1+6\cdot\frac{1}{2}+9}=\sqrt{13}$

9. $r=|\overrightarrow{OR}|$

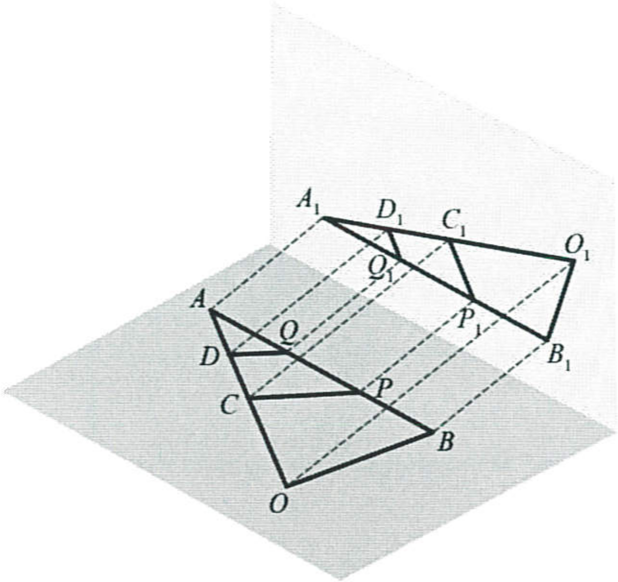
$\overrightarrow{OR}=3\vec{b}+2\vec{a}$

$|\overrightarrow{OR}|=\sqrt{9|\vec{b}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{a}|^2}$

$=\sqrt{9+12\cdot\frac{1}{2}+4}=\sqrt{19}$

第 10 至 12 題為題組

某人於度假時入住一間有三角形窗戶的小木屋，三角形窗戶如圖中的$\triangle A_1B_1O_1$，已知Q_1、P_1分別為$\overline{A_1B_1}$的三等分點，而C_1為$\overline{A_1O_1}$的中點，D_1為$\overline{A_1C_1}$的中點，設於下午某時刻，夕陽將窗戶投射在地面上的影子如圖中的$\triangle ABO$，其中A_1、B_1、C_1、D_1、O_1、P_1、Q_1在地面上的投影點分別為A、B、C、D、O、P、Q，試回答下列問題：



(示意圖)

10. 已知$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，且$x$、$y$為常數，則下列選項何者為數對$(x,y)$？（單選題）

(1) $(1,2)$　(2) $(2,1)$　(3) $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$　(4) $(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$　(5) $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

11. 已知$\overrightarrow{CP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$，且$m$、$n$為常數，則$m+n=$__________。（非選擇題）

12. 設把地面當成坐標平面（單位長為公寸），若以O為原點，則A、B兩點的坐標分別為$(12,24)$、$(15,-3)$，已知影子的長度為物體長度的$\frac{5}{6}$倍，求窗戶之斜柱$\overline{C_1P_1}$的長度為幾公寸？（非選擇題）

答案: (3)　1/2　12 公寸

10. ∵平行 ∴ $\overline{AQ}=\overline{QP}=\overline{PB}$, $\overline{AP}:\overline{PB}=2:1$. $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$, 選(3)

11. $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OP}=\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right)+\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\right)=\frac{-1}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$, $m+n=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

12. $C=\frac{A+O}{2}=(6,12)$. $P=\frac{A+2B}{3}=(14,6)$

$\overline{C_1P_1}=\frac{6}{5}\overline{CP}=\frac{6}{5}\times\sqrt{8^2+6^2}=12$